



**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

POSGRADO EN CIENCIAS APLICADAS

**Transporte Electrónico en Ratchets
Cuánticos**

Tesis que presenta

Juan Pedro Palomares Báez

Para obtener el grado de

Maestro en Ciencias Aplicadas

En la opción de

Nanociencias y Nanotecnología

Codirectores de la Tesis:

Dr. Aldo Humberto Romero Castro

Dr. José Luis Rodríguez López

San Luis Potosí, S.L.P., enero de 2006



CRÉDITOS INSTITUCIONALES

Esta tesis fue elaborada en la División de Materiales Avanzados del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección de los doctores José Luis Rodríguez López y Aldo Humberto Romero Castro.

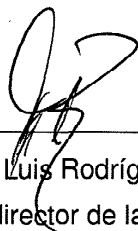
Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (No. de registro 182521) y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

CONSTANCIA DE APROBACIÓN DE LA TESIS

La tesis “**Transporte Electrónico en Ratchets Cuánticos**” presentada para obtener el Grado de Maestro en Ciencias Aplicadas con opción en Nanociencia y Nanotecnología fue elaborada por **Juan Pedro Palomares Báez** y aprobada el **24 de enero de 2006** por los suscritos, designados por el colegio de profesores de la División de Materiales Avanzados del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.



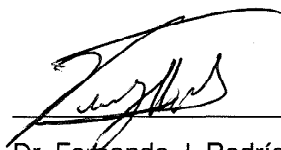
Dr. Aldo Humberto Romero Castro
Codirector de la tesis



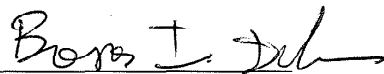
Dr. José Luis Rodríguez López
Codirector de la tesis



Dr. Haret C. Rosu Barbus
Asesor



Dr. Fernando J. Rodríguez Macías
Asesor



Dr. Boris Ivanovich Ivlev
Asesor externo



INSTITUTO POTOSINO
DE INVESTIGACIÓN
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.

IPICYT

Acta Núm. 014

Nombre del Sustentante:

JUAN PEDRO
PALOMARES
BÁEZ



[Handwritten signature]
Firma

Acta de Examen de Grado

En la ciudad de San Luis Potosí, a los 24 días, del mes de ENERO del año 2006, se reunió a las 10:00 horas, en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

<u>DR. ALDO HUMBERTO ROMERO CASTRO</u>	<u>PRESIDENTE</u>
<u>DR. JOSE LUIS RODRÍGUEZ LÓPEZ</u>	<u>SECRETARIO</u>
<u>DR. BORIS IVANOYICH IVLEV</u>	<u>SINODAL</u>
<u>DR. FERNANDO JAIME RODRIGUEZ MACIAS</u>	<u>SINODAL</u>
<u>DR. HARET ROSU BARBUS</u>	<u>SINODAL</u>

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de Maestro (a) en Ciencias Aplicadas en la opción de Nanociencias y Nanotecnología, sustentó el (la)

C. JUAN PEDRO PALOMARES BÁEZ

sobre la Tesis intitulada: TRANSPORTE ELECTRÓNICO EN RATCHETS CUÁNTICOS

que se desarrolló bajo la dirección de: DR. JOSE LUIS RODRÍGUEZ LÓPEZ
DR. ALDO HUMBERTO ROMERO CASTRO

El Jurado, después de deliberar, determinó: APROBARLO

Dándose por terminado el acto a las 11:45 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fé el Secretario Académico del Instituto.

[Handwritten signature]
Presidente

[Handwritten signature]
Secretario

[Handwritten signature]
Sinodal

[Handwritten signature]
Sinodal

[Handwritten signature]
Sinodal
III



DEDICATORIA

A mi familia por apoyarme siempre.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mis asesores, los doctores José Luis Rodríguez López y Aldo Humberto Romero Castro por el constante apoyo durante el desarrollo de esta tesis. Quiero agradecer también a mis compañeros y amigos con los que he tenido el gusto de compartir estos dos años, y finalmente, agradezco a mi familia que siempre me ha brindado su apoyo.

ÍNDICE GENERAL

CERTIFICADO DE GRADO	III
CRÉDITOS INSTITUCIONALES	V
CONSTANCIA DE APROBACIÓN DE LA TESIS	VII
DEDICATORIA	IX
AGRADECIMIENTOS	XI
RESUMEN	XXIII
ABSTRACT	XXV
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. PREFACIO	1
1.2. EL RÉGIMEN MESOSCÓPICO	2
1.3. TRANSPORTE ELECTRÓNICO EN EL RÉGIMEN MESOSCÓPICO	3
1.4. HETEROESTRUCTURAS DE ALGAAS-GAAS	4
1.4.1. EL DIODO DE TUNELAMIENTO RESONANTE	5
1.5. RATCHETS	8
1.5.1. EL RATCHET DE SMOLUCHOWSKY-FEYNMAN	8
1.5.2. TIPOS DE RATCHETS	10
1.5.3. RATCHETS CUÁNTICOS	11
1.6. OBJETIVOS	14
2. TEORÍA Y CONCEPTOS BÁSICOS	17

ÍNDICE GENERAL

2.1. TEORÍA BÁSICA DE SEMICONDUCTORES	17
2.2. APROXIMACIÓN DE MASA EFECTIVA	23
2.3. GAS DE ELECTRONES BIDIMENSIONAL (2DEG)	29
2.3.1. EL MOSFET	29
2.3.2. 2DEG EN HETEROESTRUCTURAS DE GAAS-ALGAAS	31
2.3.3. SPLIT GATES	34
2.4. TRANSPORTE BALÍSTICO EN SISTEMAS MESOSCÓPICOS	36
2.4.1. REGÍMENES DE TRANSPORTE BALÍSTICO Y DIFUSIVO	36
2.5. LA ECUACIÓN DE LANDAUER	40
3. MODELO Y MÉTODO	43
3.1. MODELO	43
3.2. MÉTODO NUMÉRICO	46
3.3. MÉTODO PARA CALCULAR $t(E)$	47
4. RESULTADOS	51
4.1. BARRERA TRIANGULAR	53
4.1.1. UNA CAÍDA DE VOLTAJE $V_d \propto x^2$	53
4.2. UNA BARRERA DE POTENCIAL SUAVE	57
4.2.1. V_d TIPO GAUSIANA	65
4.3. V_d ASIMÉTRICO	70
4.4. RESULTADOS EN FUNCIÓN DEL TAMAÑO	76
5. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS	77
BIBLIOGRAFÍA	79

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. <i>Diodo de tunelamiento resonante</i> creado mediante heteroestructuras de AlGaAs-GaAs. Las capas de AlGaAs generan barreras de potencial rectangulares en la dirección z . El ancho de la capa central de GaAs, puede construirse de tal forma que exista solo un estado resonante en el sistema. Figura tomada y modificada de [8].	6
1.2. (a) Doble barrera de potencial y coeficiente de transmisión característico en este tipo de potencial. El coeficiente de transmisión muestra picos pronunciados en E_1 y E_2 (resonancias). (b) Simplificación de la aplicación de un voltaje entre los extremos de las barreras. Para ciertos voltajes las resonancias se alinean con los estados ocupados de la izquierda y se produce un pico en la corriente. El fenómeno de <i>resistencia diferencial negativa</i> puede notarse cuando el pico de la corriente empieza a disminuir.	7
1.3. Ratchet de Smoluchowsky-Feynman, la barra central está conectada en un extremo a una paleta y en el otro a una rueda dentada (tipo diente de sierra) cuyo movimiento es controlado mediante un gatillo. El sistema se encuentra inmerso en un gas en equilibrio térmico. El objetivo del dispositivo es la rectificación del movimiento aleatorio experimentado por la paleta. El movimiento es provocado cuando las partículas del gas colisionan con la paleta. Si la suposición de Smoluchowsky acerca del funcionamiento del gatillo fuera cierta, el dispositivo violaría la segunda ley de la termodinámica y este sería una especie de demonio de Maxwell [17].	10

1.4. (a) Ejemplo de un *On-off ratchet*, donde el potencial se alterna en el tiempo entre dos formas. El encendido y apagado consecutivo del potencial provoca un flujo de partículas en una dirección. (b) Esquema de un *Ratchet oscilado*. Debido al cambio en las alturas del potencial, la probabilidad de que las partículas salten las barreras hacia la derecha en el tiempo t_1 es más alta que la probabilidad de que salten hacia la izquierda en el tiempo t_2 12

1.5. Realización experimental de un ratchet cuántico. El dispositivo ha sido fabricado haciendo uso de heteroestructuras de AlGaAs-GaAs. Las partes oscuras son canales que se han formado al retirar parte de la capa superior de la heteroestructura. De esta forma, el gas electrónico que se forma en la interfase del AlGaAs y el GaAs es confinado a la parte central del dispositivo, donde los electrones al moverse experimentan un potencial asimétrico (ratchet). Las partes laterales del dispositivo se utilizan para generar un potencial que ayuda a aumentar el confinamiento de los electrones dentro del ratchet. Figura tomada de [34]. 14

2.1. (a) Estructura cristalina del diamante. Cada átomo está unido a sus cuatro primeros vecinos mediante un enlace covalente formando un tetraedro. Semiconductores como el silicio (Si) y el germanio (Ge) poseen esta estructura. (b) Estructura cristalina del arsenuro de galio (GaAs), cada átomo de arsénico en la red (en color verde) se encuentra unido covalentemente a cuatro átomos de galio (en color azul) formando un tetraedro. A esta estructura se le conoce como *zinc-blenda*. Figura tomada de [49]. 18

2.2. Formación de la estructura de bandas. Los potenciales de los átomos individuales (a) se unen para formar un potencial cristalino periódico (b). Las bandas son creadas mediante combinaciones de los estados de los átomos individuales. Al espaciamiento entre la banda de valencia y la banda de conducción se le conoce como el *gap* del semiconductor (c). 20

2.3. Gráficas de perspectiva de la estructura de bandas de el arsenuro de galio y del silicio. La figura de la izquierda muestra la zona de Brillouin, y la sección bidimensional sobre la cual son desplegadas las bandas de energía, Las bandas de energía son mostradas a la derecha. Las cuatro superficies que se encuentran debajo de 0 eV son las bandas de valencia, y las superficies superiores son las bandas de conducción. Para el arsenuro de galio el máximo de la banda de valencia se encuentra en $k = 0$, al igual que el mínimo de la banda de conducción, por lo que el GaAs es un semiconductor de gap directo, al contrario del silicio que es un semiconductor de gap indirecto. Fig. tomada y modificada de [50]. 22

2.4. Un paquete de onda es construido tomando funciones de Bloch de una pequeña región del espacio recíproco, y sumándolas con ciertos pesos. Los pesos $\psi(k)$ tienen una pequeña extensión Δk en el espacio recíproco; cuando es llevada al espacio real, la extensión es grande, dado que $\Delta r \approx 1/\Delta k$; entonces el paquete de onda tiene una extensión finita, y representa la función de onda de una partícula. Por ejemplo, si restringimos la suma en el espacio recíproco al 1% de la zona de Brillouin, el paquete de onda se extiende sobre $1/0.01=100$ átomos en el espacio real. La función de onda en el espacio real está dada por la función de Bloch en el punto k_0 , modulada por una función envolvente $\psi(r)$, la cual es la transformada de Fourier de los pesos $\psi(k)$. Fig. tomada de [50]. 24

2.5. La función envolvente $\psi(r)$ modula a la función de Bloch $\phi_{n0}(x)$ para producir la función de onda $\Phi(x)$. Fig. tomada y modificada de [50]. 25

2.6. Esquema de un MOSFET. Se muestra el comportamiento de la banda de valencia E_v , la banda de conducción E_c y de las energías de Fermi en la interfase entre el semiconductor (derecha) y un metal (izquierda). Un voltaje V_g es aplicado entre el semiconductor y el metal, el cual dobla la banda de conducción del semiconductor, creando una capa de inversión (sombreada) entre el óxido y el semiconductor. Fig. tomada y modificada de [48] 30

2.7. Esquema de la formación de un gas bidimensional en la interfase entre dos semiconductores. La transferencia de carga entre el AlGaAs (izquierda) y el GaAs (derecha) induce una distorsión en la banda de conducción en la interfase, la cual genera un pozo de potencial que confina a los electrones a una interfase bidimensional. 32

2.8. El gas bidimensional creado en la interfase de dos semiconductores puede ser manipulado para formar canales estrechos. La figura presenta la técnica de confinamiento más utilizada. Mediante la aplicación de un potencial, los electrones son obligados a moverse por constricciones estrechas, el movimiento en tales constricciones resulta cuantizado, y ocurre el fenómeno conocido como conductancia cuantizada. 35

3.1. Coeficientes de transmisión para ambos signos de voltaje aplicado. Se muestra también la diferencia entre estos dos coeficientes, nótese como para ciertas energías la diferencia es positiva y para otras energías es negativa. 45

3.2. Esquema que muestra como se aproxima una barrera de potencial cualquiera mediante una secuencia de barreras rectangulares, el ancho de las barreras ha sido exagerado para mayor claridad. 48

4.1. (a) Barrera de potencial (ratchet) para ambos signos del voltaje aplicado (V y $-V$). Las alturas de las barreras difieren debido a que se ha supuesto una forma lineal para V_d . Para mayor claridad se ha aplicado un voltaje grande y se ha mantenido uno de los extremos de la barrera de potencial en cero. (b) Coeficientes de transmisión $t(E)$ correspondientes a las barreras de la parte (a). Se muestra además $\Delta t(E)$ y la ventana de Fermi $\Delta f(E)$. Nótese que $\Delta t(E)$ es positivo en todo el intervalo de energías dentro de la ventana de Fermi, por lo tanto se deduce que la corriente fluye en una sola dirección. Se utilizaron una energía de Fermi $E_F = 11.7$ meV y una altura original del potencial de 12.0 meV. 52

4.2. (a) Barrera triangular (potencial diente de sierra). Este es el modelo más sencillo para representar un ratchet cuántico. Se ha supuesto un drop lineal aprovechando que bajo esta condición el potencial mantiene su altura constante. La altura del potencial es 12.0 meV y el voltaje aplicado es 2.5 mV. (b) Coeficientes de transmisión correspondientes a cada signo del voltaje aplicado. Se muestran además $\Delta t(E)$ y la ventana de Fermi. $\Delta t(E)$ después de alcanzar un mínimo tiende a cero conforme la energía aumenta. 54

4.3. (a) Barrera triangular bajo la acción de los voltajes V y $-V$. La forma de V_d está dada por una función cuadrática, la cual provoca una deformación más significativa de la barrera que haciendo uso de una función lineal. (b) De la misma forma que una función cuadrática se puede suponer a V_d proporcional a una función del tipo $f(x) = x^n$, donde n es entero. Como resultado puede notarse que un cambio en el valor de n solo provoca un aumento en la magnitud de $\Delta t(E)$ pero no un cambio en su dirección. 56

4.4. Representación gráfica de la Ec. 4.1. 57

4.5. (a) Barrera de potencial construida mediante una combinación lineal de una función seno y una función coseno. Se muestra también la forma de V_d que se eligió. (b) Coeficientes de transmisión y $\Delta t(E)$ para el potencial de (a). $\Delta t(E)$ cambia de signo como función de la energía (inserción). 59

4.6. Corriente contra voltaje como función de la energía de Fermi E_F para la barrera de potencial de la Fig. 4.5. La magnitud de la inversión mostrada por $\Delta t(E)$ (Fig. 4.5(b)) no es suficiente para que ocurra una inversión en la corriente. 60

4.7. Barrera de potencial resultado de multiplicar la Ec. 4.1 por una función exponencial. Esta barrera es más abrupta que la construida a partir de la Ec. 4.1, por lo tanto, provoca que para energías cercanas a la altura de la barrera ocurran más reflexiones. El desfase que ocurre entre los dos coeficientes de transmisión y las oscilaciones de estos para energías cercanas a la altura de la barrera, provocan que $\Delta t(E)$ cambie de signo y que su magnitud sea suficiente para que ocurra inversión de corriente. 61

4.8. Gráficas de superficie $I-V$ en función de la energía de Fermi para una temperatura fija (a) y en función de la temperatura para una energía de Fermi dada (b). En (a) la corriente invierte su dirección en más de una ocasión como función de E_F . En la parte (b) puede observarse como la corriente cambia de signo en función del voltaje aplicado. Además, por encima de $V = 2.0$ mV la corriente se invierte como función de la temperatura. 62

4.9. Coeficientes de transmisión característicos de barreras rectangulares (línea roja) y de barreras triangulares (línea negra). En el caso de las barreras rectangulares, $t(E)$ empieza a crecer para valores de energía cercanos a la altura de la barrera y muestra oscilaciones (resonancias) para energías superiores a esta. Las barreras triangulares producen menos reflexiones por lo que $t(E)$ no muestra oscilaciones. 63

4.10. V_d construido a partir de una función gaussiana. 65

4.11. $V(x) \pm f(x)$, donde la altura del potencial permanece constante. Se muestran los coeficientes de transmisión para ambos casos V y $-V$, la diferencia entre los coeficientes $\Delta t(E)$ y la ventana de Fermi. $\Delta t(E)$ se invierte de signo (inserción) debido a que los coeficientes de transmisión están muy cercanos y se cruzan dentro de la ventana de Fermi. 67

4.12. Curvas de corriente contra voltaje para el potencial mostrado en la Fig. 4.11. (a) $I-V$ en función del nivel de Fermi. Se aprecia como la corriente cambia de signo al aumentar E_F . (b) $I-V$ en función de la temperatura para $E_F = 11.7$ meV. Nótese como la corriente se hace negativa alrededor de $V=1.5$ mV y como a partir de este punto la curva muestra inversión en función de la temperatura. La altura del potencial es 12 meV. 68

4.13. $\Delta t(E)$ para distintos valores del ancho de la gaussiana σ con la que construimos V_d . La magnitud de $\Delta t(E)$ aumenta de forma considerable cuando hacemos más delgada la gaussiana. variando el ancho de la gaussiana cambiamos el efecto de V_d sobre las barreras. 69

4.14.(a) En este caso, al potencial triangular es multiplicado por una función exponencial dada por la Ec. 4.3 utilizando un C distinto para cada signo del voltaje aplicado. Después se le aplica un V_d lineal. (b) Inversión de signo de $\Delta t(E)$ correspondiente al potencial de la parte (a). Esta inversión indica una posible inversión en la corriente. 71

4.15.1.41.0 Curvas $I-V$ como función del nivel de Fermi para una temperatura $T = 0.3$ K (a), y como función de la temperatura para $E_F = 10.5$ meV (b). Nótese como la corriente cambia de signo como función de E_F (a) y como función de V (b). La corriente también cambia de signo en función de la temperatura. 72

4.16. Curvas de corriente contra voltaje para tres distintas temperaturas. La inversión en la corriente desaparece como efecto de la temperatura. 73

4.17.(a) Potencial asimétrico construido a partir de una barrera triangular truncada. Se ha aplicado V_d de la misma forma que a la barrera de la Fig. 4.14. (b) $\Delta t(E)$ correspondiente a la barrera de la parte (a). Las oscilaciones que se observan son debido al efecto de truncar la barrera. 74

4.18.(a) $I-V$ como función de la energía de Fermi para el potencial de la Fig. 4.17(a). El efecto provocado por truncar la barrera puede observarse claramente en la forma en que la curva oscila en función de E_F . La corriente cambia de dirección en varias ocasiones como función de E_F . (b) $I-V$ como función de la temperatura. La corriente se invierte como función del voltaje aplicado y como función de la temperatura. 75

4.19. $\Delta t(E)$ para varios tamaños del potencial dado por la E. 4.1. La magnitud de $\Delta t(E)$, cambia considerablemente con el tamaño del sistema. Se utilizaron $V = 2.5$ mV y una altura de la barrera de 12.0 meV. 76

LISTA DE TABLAS

2.1. Resumen de algunas de las propiedades físicas del silicio y el arsenuro de galio. Tabla tomada y modificada de [48].	33
--	----

RESUMEN

Actualmente, el problema de la miniaturización progresiva de los dispositivos electrónicos ha conducido a la elaboración de sofisticadas técnicas litográficas y de crecimiento cristalino. Gracias a estas técnicas es que se han podido construir dispositivos que exhiban nuevos e interesantes fenómenos. Los *ratchets* cuánticos son un ejemplo de tales dispositivos. Un *ratchet* es un sistema asimétrico fuera del equilibrio el cual puede producir una corriente de partículas directa (fluyendo en una dirección) sin la necesidad de un gradiente de potencial. Fenómenos como la inversión en la dirección de la corriente neta pueden ser inducidos en *ratchets* oscilados (*rocked ratchets*) cuando efectos cuánticos como el tunelamiento son tomados en cuenta.

En el presente trabajo de tesis, estudiamos modelos idealizados de *ratchets* cuánticos oscilados. Los *ratchets* son modelados mediante barreras de potencial asimétricas y las curvas $I - V$ características de estos sistemas modelo son estudiadas en función de distintos parámetros como son, energía de Fermi, variación espacial del potencial debido al voltaje aplicado (*drop*) y la temperatura.

En general, las barreras de potencial que tienen una variación suave producen magnitudes de corriente menores a las de otras barreras. Se obtiene un mayor número de inversiones en la dirección de la corriente cuando se asume una variación significativa de las barreras debido al voltaje aplicado. Se logra una mayor similitud a los resultados experimentales cuando se asume que la variación del potencial es distinta para cada signo del voltaje aplicado, lo que nos lleva a pensar que este fenómeno es uno de los que mayor influencia tienen en la inversión de la corriente dentro de los *ratchets* experimentales.

ABSTRACT

Nowadays, the progressive miniaturization of electronic devices has led to a more sophisticated lithographic and crystal growth techniques. Thanks to these techniques, devices that exhibit new and interesting phenomena had been constructed. Quantum ratchets are a perfect example of these devices. A ratchet is an asymmetric system, out of equilibrium. Such systems can produce a direct current of particles (flowing in one direction) without the need of a potential gradient. Phenomena such as reversion of current can be induced in oscillated ratchets (rocked ratchets) when quantum effects, as tunneling, are taken into account.

In this thesis, we study quantum rocked ratchets through idealized models. The ratchets are modeled using asymmetric potential barriers and the characteristics I-V curves of these systems are studied as function of parameters such as Fermi energy, spatial variation due to the applied voltage (drop) and temperature.

Broadly, potential barriers with a soft variation produce currents of lower magnitude. More reversions in the current direction are observed when a significant variation to the applied voltage is assumed. When an asymmetric variation is assumed for every sign of applied voltage, the results found are more similar to the experimental values. Because of this, we can think that this phenomena is one of the most influential in the current reversion in experimental ratchets.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1. PREFACIO

La física fundamental del estado sólido ha sido enormemente beneficiada por el esfuerzo masivo en la investigación y desarrollo tecnológicos, que se han hecho con el fin de llevar a cabo la miniaturización progresiva de dispositivos semiconductores. Este esfuerzo ha resultado en la elaboración de sofisticadas técnicas litográficas y de crecimiento cristalino, las cuales permiten la fabricación de estructuras o “*dispositivos*” artificiales, que exhiben nuevos e interesantes fenómenos físicos. Estos nuevos fenómenos físicos ocurren cuando el tamaño de la estructura es menor que algunas escalas de longitud características relevantes. Ejemplos de tales fenómenos y la escala de longitud característica asociada son: la interferencia cuántica y la longitud de coherencia de fase, el transporte balístico y el camino libre medio, y el confinamiento cuántico y la longitud de onda de Fermi.

La rama de la física dedicada al estudio de estos fenómenos a sido llamada *Física Mesoscópica* [1], dado que en estas escalas de longitud estos dispositivos adquieren propiedades inusuales, las cuales no se encuentran en los objetos microscópicos (átomos y moléculas) ni en los objetos macroscópicos. Desde un punto de vista científico, la física mesoscópica es un campo de investigación muy rico y el cual ha crecido rápidamente. Aunque tiene apenas un poco más

de una década, mucho se ha logrado en este campo, en base a una variedad de fenómenos que han sido descubiertos y entendidos [2, 3].

1.2. EL RÉGIMEN MESOSCÓPICO

La física clásica describe lo que conocemos como mundo *macroscópico*, por ejemplo: el movimiento de los planetas entorno al sol, la caída de un objeto provocado por la fuerza de gravedad, etc.. Sin embargo, la física clásica es incapaz de describir fenómenos que ocurren dentro del llamado mundo *microscópico* (por ejemplo, el efecto túnel), el mundo de los átomos y moléculas, el cual es descrito por la mecánica cuántica.

Tradicionalmente, los dispositivos semiconductores han sido pensados como objetos macroscópicos, que pueden ser descritos mediante conceptos semiclásicos, por ejemplo: describimos la dinámica de una partícula con ecuaciones del tipo ley de movimiento de Newton generalizadas para incluir el concepto de estructura de bandas. Sin embargo, actualmente es posible la fabricación de dispositivos y estructuras cuyos fenómenos físicos no pueden ser descritos mediante estos conceptos semiclásicos. Las dimensiones de tales dispositivos son aún mayores que las escalas atómicas o moleculares, pero son más pequeñas que algunas longitudes críticas para las cuales son aplicadas las teorías tradicionales de transporte. La escala de tamaño entre los regímenes microscópico y macroscópico es conocida como *régimen mesoscópico*.

Literalmente la física mesoscópica se encarga de los sistemas que se encuentran entre los objetos macroscópicos con los que somos familiares, y los sistemas que se encuentran en el mundo microscópico de los átomos y moléculas. Aunque esta definición es vaga y refleja lo difuso de las fronteras de esta disciplina; sus ramificaciones se traslapan con otras áreas de la física bien establecidas. En realidad, el concepto de *sistema mesoscópico* debe ser definido en relación directa con las propiedades físicas específicas (ópticas, mecánicas, magnéticas, etc.) que son examinadas. Por ejemplo, si nos enfocamos en la con-

ductividad eléctrica de un sistema, el régimen mesoscópico se alcanza cuando la descripción macroscópica de su conductividad ya no es válida. Más precisamente, las leyes macroscópicas que explican la conductividad se vienen abajo cuando el tamaño del sistema es comparable a dos escalas de longitud características: el camino libre medio l y la longitud de coherencia de fase L_ϕ . Por esto, para estudiar los nuevos fenómenos encontrados en los sistemas mesoscópicos se han desarrollado nuevas teorías [4, 5], las cuales han ayudado en el entendimiento y explicación del funcionamiento de estos sistemas.

Como un ejemplo de una de las leyes que ya no es válida en el régimen mesoscópico, podemos mencionar la ley de Ohm, la cual nos dice que si tenemos un conductor bidimensional rectangular, su conductancia estará relacionada con su longitud L y su ancho W por la expresión

$$G = \sigma W/L, \quad (1.1)$$

donde σ es la conductividad, la cual es característica del material e independiente de las dimensiones del sistema. Si las dimensiones del conductor son mucho más grandes que cualquiera de las longitudes características como el camino libre medio, la longitud de coherencia de fase o la longitud de onda de Fermi, entonces el conductor mostrará un comportamiento óhmico, pero si las dimensiones del conductor son más pequeñas que estas longitudes características, la ley de Ohm ya no es válida.

1.3. TRANSPORTE ELECTRÓNICO EN EL RÉGIMEN MESOSCÓPICO

El transporte electrónico ha sido uno de los fenómenos más estudiados dentro del régimen mesoscópico, esto debido a que fenómenos como el tunelamiento, la interferencia electrónica y la conductancia cuantizada entre otros, han dado lugar a modificaciones significativas en el transporte.

El fenómeno de transporte en el régimen mesoscópico puede ser observado

en conductores con un amplio rango de dimensiones, algunos de ellos con un tamaño de unos pocos nanómetros, y otros con longitudes de varios micrómetros. Esto ocurre porque las tres longitudes características que ya hemos mencionado pueden variar ampliamente de un material a otro, y también pueden verse afectadas considerablemente por factores como la temperatura, así como por campos externos. Por ejemplo, si hablamos del camino libre medio l a temperatura ambiente, en el silicio puro (Si) $l \approx 700 \text{ \AA}$, mientras que para el arsenuro de galio (GaAs) $l \approx 200 \text{ \AA}$, y a $T = 77 \text{ K}$ se incrementa a $l \approx 1 \text{ \mu m}$. Por otro lado, si consideramos la longitud de coherencia de fase, en los llamados *billares electrónicos* (cavidades balísticas bidimensionales) esta longitud puede exceder decenas de micrómetros a temperaturas de sub-Kelvin, pero decrece rápidamente con la temperatura, llegando a ser menor a un micrómetro cuando la temperatura es alrededor de 5 K.

1.4. HETEROESTRUCTURAS DE ALGAAAS-GAAS

La mayor parte del trabajo reciente en el estudio del transporte electrónico en el régimen mesoscópico, ha sido llevado a cabo haciendo uso de sistemas semiconductores, particularmente sistemas basados en hetero-uniones de arsenuro de galio (GaAs) y arsenuro de galio y aluminio (AlGaAs). Estos materiales pueden ser estructurados de tal forma que contengan una delgada capa de electrones con una alta movilidad. El movimiento perpendicular a la capa electrónica está cuantizado, por lo tanto los electrones están restringidos a moverse en el plano. Como un sistema modelo, este *gas de electrones bidimensional* (2DEG) combina un número de propiedades útiles, que no se encuentran en capas metálicas delgadas. El gas de electrones bidimensional tiene densidades electrónicas bajas, por lo tanto la longitud de onda de Fermi característica es grande y puede ser entonces comparable con algunas dimensiones del sistema. Por otra parte, los caminos libres medios son muy grandes, lo que permite la fabricación de dispositivos que funcionen en el *régimen balístico*, i.e. la dispersión por impurezas

puede ser despreciada.

Una interesante definición de heteroestructura fue dada por Herbert Kroemer, en su lectura dada con motivo de la entrega del premio Nobel de física en el año 2000 [6], donde las define como: “*estructuras semiconductoras heterogéneas construidas de dos o mas semiconductores diferentes, de tal forma que la región de transición o interfase entre los diferentes materiales juega un rol importante en la acción del dispositivo. Frecuentemente, se puede decir que la interfase es el dispositivo*”. Métodos modernos de crecimiento epitaxial (*molecular beam epitaxy*) [7], han proveído la capacidad de fabricar una amplia variedad de heteroestructuras de diferentes compuestos semiconductores, con interfaces de precisión atómica.

1.4.1. EL DIODO DE TUNELAMIENTO RESONANTE

Un ejemplo muy interesante de un dispositivo basado en heteroestructuras semiconductoras y uno de los primeros en haber sido estudiado y fabricado, es el *diodo de tunelamiento resonante* (*RTD* por sus siglas en inglés). Aunque puede ser construido usando otros semiconductores, aquí hablaremos solo del *RTD* basado en estructuras de AlGaAs-GaAs. Este sistema está formado por dos capas de AlGaAs dopado colocadas entre tres capas de GaAs (como muestra la Fig. 1.1).

Al viajar en la dirección z los electrones experimentan un potencial con forma de una doble barrera, el cual es generado por las capas de AlGaAs. Esta estructura funciona como un filtro, es decir, es opaca para los electrones que inciden con una energía diferente a la de un estado resonante. Este fenómeno es conocido como *efecto túnel resonante*. En el tunelamiento resonante, el coeficiente de transmisión electrónico $t(E)$ muestra picos pronunciados para ciertas energías (resonancias) como lo muestra la parte (a) de la Fig. 1.2.

Este dispositivo es construido de tal forma que exista un solo *estado resonante* y que esté justo por encima del nivel de Fermi, de tal forma que cuando se aplica una diferencia de potencial entre los extremos del dispositivo, cambia la posición relativa del nivel resonante con respecto del nivel de Fermi E_F , y por lo tanto

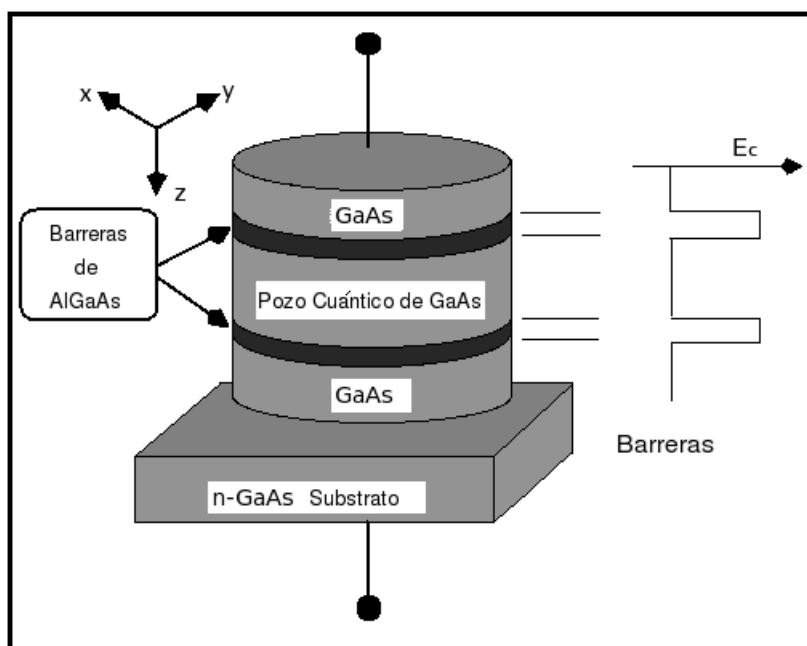


Figura 1.1: *Diodo de tunelamiento resonante* creado mediante heteroestructuras de AlGaAs-GaAs. Las capas de AlGaAs generan barreras de potencial rectangulares en la dirección z . El ancho de la capa central de GaAs, puede construirse de tal forma que exista solo un estado resonante en el sistema. Figura tomada y modificada de [8].

para cierto voltaje el nivel resonante se alinea con los estados ocupados de la izquierda (ver parte (b) de la Fig. 1.2) y surge una corriente a través del dispositivo. En estos dispositivos también puede observarse el fenómeno conocido como *resistencia diferencial negativa*, esto es; existe un rango de voltajes para el cual al aumentar V la corriente I disminuye. La predicción de este efecto fue hecha por Tsu [9]. Esaki y su grupo en IBM [10] reportaron la primera observación experimental del efecto túnel resonante. En 1973 Esaki recibió el premio Nobel de física.

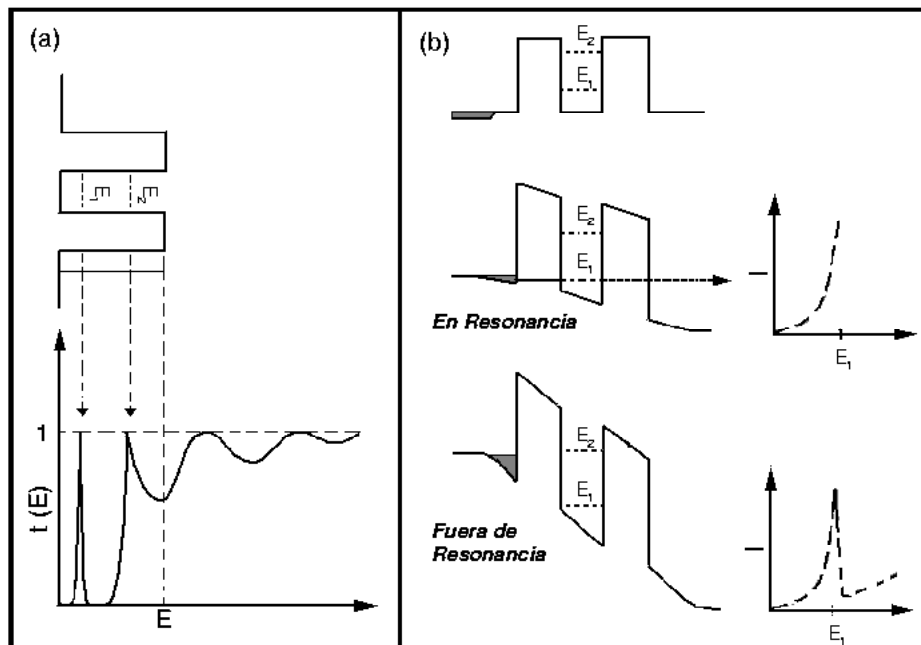


Figura 1.2: (a) Doble barrera de potencial y coeficiente de transmisión característico en este tipo de potencial. El coeficiente de transmisión muestra picos pronunciados en E_1 y E_2 (resonancias). (b) Simplificación de la aplicación de un voltaje entre los extremos de las barreras. Para ciertos voltajes las resonancias se alinean con los estados ocupados de la izquierda y se produce un pico en la corriente. El fenómeno de *resistencia diferencial negativa* puede notarse cuando el pico de la corriente empieza a disminuir.

1.5. RATCHETS

Otro ejemplo de dispositivos basados en heteroestructuras de GaAs-AlGaAs y sobre los cuales trata el estudio principal de esta tesis son los *ratchets cuánticos* (*quantum ratchets*).

Como una definición general, un *ratchet* es un sistema en el cual la asimetría y la ausencia de equilibrio se combinan para generar un flujo directo de partículas en ausencia de fuerzas netas (promediadas en el tiempo) o gradientes.

1.5.1. EL RATCHET DE SMOLUCHOWSKY-FEYNMAN

La presencia del no equilibrio es la que permite distinguir entre un *ratchet* y un *móvil perpetuo* de segundo tipo, es decir; de una máquina de movimiento perpetuo en la cual se conserva la energía pero no se obedece la segunda ley de la termodinámica.

El ratchet de Smoluchowsky-Feynman es un experimento pensado, el cual fue originalmente propuesto por Smoluchowsky [11], y ampliado más adelante por Feynman [12]. Este experimento explica la imposibilidad de rectificar las fluctuaciones térmicas con un sistema en equilibrio, aún teniendo asimetría. El componente principal del experimento es una barra microscópica la cual tiene unida una paleta en un extremo y en el otro un ratchet (una rueda dentada, donde los dientes son asimétricos del tipo diente de sierra) cuyo movimiento es controlado mediante un gatillo como se muestra en la Fig. 1.3. Todo el sistema se encuentra rodeado por un gas en equilibrio a cierta temperatura T . Debido a que la paleta está expuesta a las colisiones de las partículas del gas, esta realizará un movimiento rotatorio browniano. Entonces, la idea es rectificar el movimiento rotatorio aleatorio de la paleta valiéndose del gatillo y la asimetría de los dientes del ratchet. Así pues, puede pensarse que el gatillo solo permite que la rueda dentada gire en una dirección y prácticamente restringe el movimiento en la otra. Parece entonces convincente que todo el dispositivo realizará una rotación sistemática en una dirección (llamémosle adelante), pudiendo realizar un trabajo útil como

levantar un pequeño objeto (ver Fig. 1.3). Pero si el dispositivo pudiera realizar este objetivo, se violaría la segunda ley de la termodinámica, debido a que se estaría obteniendo trabajo útil de un sistema en equilibrio. El punto importante que Smoluchowsky hizo notar, es que no solo la paleta está expuesta a las colisiones de las partículas que rodean al sistema, sino también la rueda dentada y el gatillo, es decir, las colisiones hacen que el gatillo ocasionalmente se levante permitiendo la rotación hacia atrás del sistema. Un análisis detallado [12] muestra que las probabilidades de movimiento en cualquiera de las direcciones de rotación son iguales, por lo tanto, no puede obtenerse trabajo útil del sistema. Feynman mostró que si se considera que la paleta se mantiene a una temperatura diferente a la de la rueda dentada y el gatillo, el sistema puede operar como una máquina de calor que realice un trabajo útil. Una realización experimental a nivel molecular de un ratchet de Smoluchowsky-Feynman, fué lograda por Kelly *et. al* [13–16], confirmando la predicción de una ausencia de dirección preferencial en la rotación del sistema.

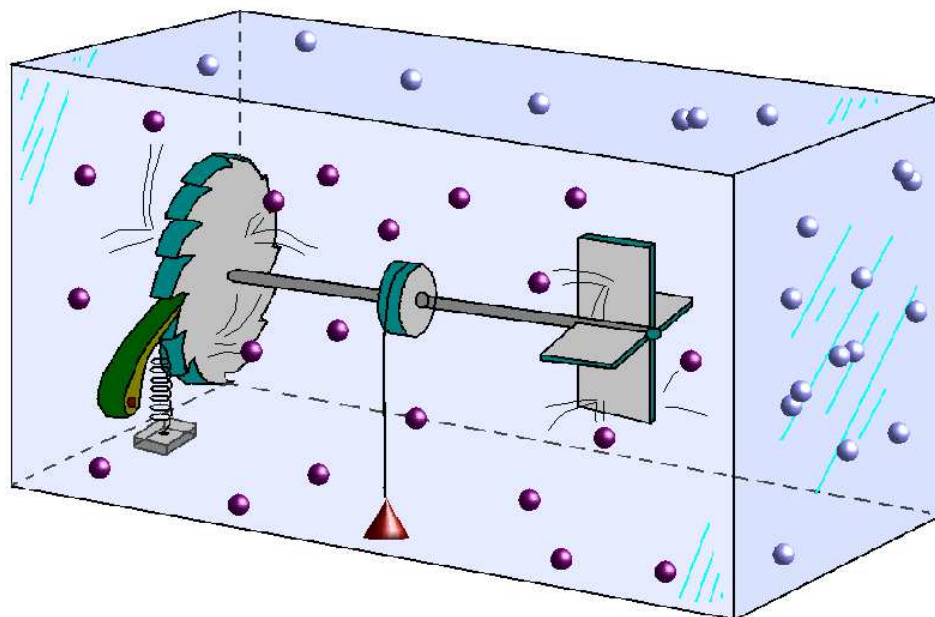


Figura 1.3: Ratchet de Smoluchowsky-Feynman, la barra central está conectada en un extremo a una paleta y en el otro a una rueda dentada (tipo diente de sierra) cuyo movimiento es controlado mediante un gatillo. El sistema se encuentra inmerso en un gas en equilibrio térmico. El objetivo del dispositivo es la rectificación del movimiento aleatorio experimentado por la paleta. El movimiento es provocado cuando las partículas del gas colisionan con la paleta. Si la suposición de Smoluchowsky acerca del funcionamiento del gatillo fuera cierta, el dispositivo violaría la segunda ley de la termodinámica y este sería una especie de demonio de Maxwell [17].

1.5.2. TIPOS DE RATCHETS

En la literatura [18] se distinguen dos tipos de ratchets: los *ratchets pulsados* (*pulsating ratchets*), en los cuales la forma del ratchet varía con el tiempo, y *ratchets inclinados* (*tilting ratchets*), en el cual el ratchet es sujeto a una fuerza externa que promediada en el tiempo es cero (si la fuerza aplicada es periódica se les conoce como *ratchets oscilados* [*rocked ratchets*]). Como un ejemplo simple de *ratchet pulsado* podemos mencionar a los *on-off ratchets*, donde el ratchet alterna en el tiempo entre dos formas distintas, ver parte (a) de la Fig. 1.4. En este ejemplo, las partículas sujetas a un ruido browniano son colocadas en un

potencial periódico asimétrico, el cual en cierto instante es apagado (puesto en *off*), por lo tanto, las partículas pueden difundirse libremente lejos del mínimo del potencial que las mantenía atrapadas. Cuando el potencial es encendido nuevamente (puesto en *on*), la asimetría del potencial hace que las partículas se muevan hacia los mínimos del potencial, preferentemente hacia la izquierda (ver Fig. 1.4 (a)) provocando un flujo de partículas hacia la izquierda. En este caso, la asimetría requerida está representada por la forma del potencial, mientras que el encendido y apagado continuo del potencial provee la fuente necesaria de energía de desequilibrio.

En la parte (b) de la Fig. 1.4, podemos ver un ejemplo de *ratchet oscilado clásico*, este potencial es inclinado hacia arriba y hacia abajo simétricamente. Se muestra para tres tiempos t_1 , t_2 y t_3 que corresponden a $0,25\tau$, $0,5\tau$ y $0,75\tau$ respectivamente, donde τ es el período de operación del ratchet. Cuando el potencial es inclinado hacia arriba y abajo, el cambio en la altura del potencial permite que una mayor cantidad de partículas brownianas sean capaces energéticamente de “saltar” las barreras hacia la derecha en el tiempo t_1 , que hacia la izquierda en el tiempo t_3 , produciéndose así un flujo de partículas hacia la derecha.

La operación de los ratchets ha sido propuesta como el principio físico que rige a los motores moleculares en los sistemas biológicos [19–21, 26, 27], tales como el sistema *miosina-actina* que afectan la contracción muscular [25, 28]. La corriente de partículas inducida por fluctuaciones ha sido también observada en ratchets artificiales [22–24, 29–32].

1.5.3. RATCHETS CUÁNTICOS

La diferencia entre un ratchet cuántico y un ratchet clásico es el cambio de las partículas clásicas por partículas cuánticas en un *ratchet oscilado*, por lo tanto las partículas no solo son capaces de saltar las barreras de potencial sino que ahora existe la posibilidad de tunelar (barreras delgadas) o ser reflejadas por barreras abruptas. Así pues, en el régimen cuántico, la magnitud y dirección de la corriente de las partículas ya no solo depende de la altura del potencial (ratchet),

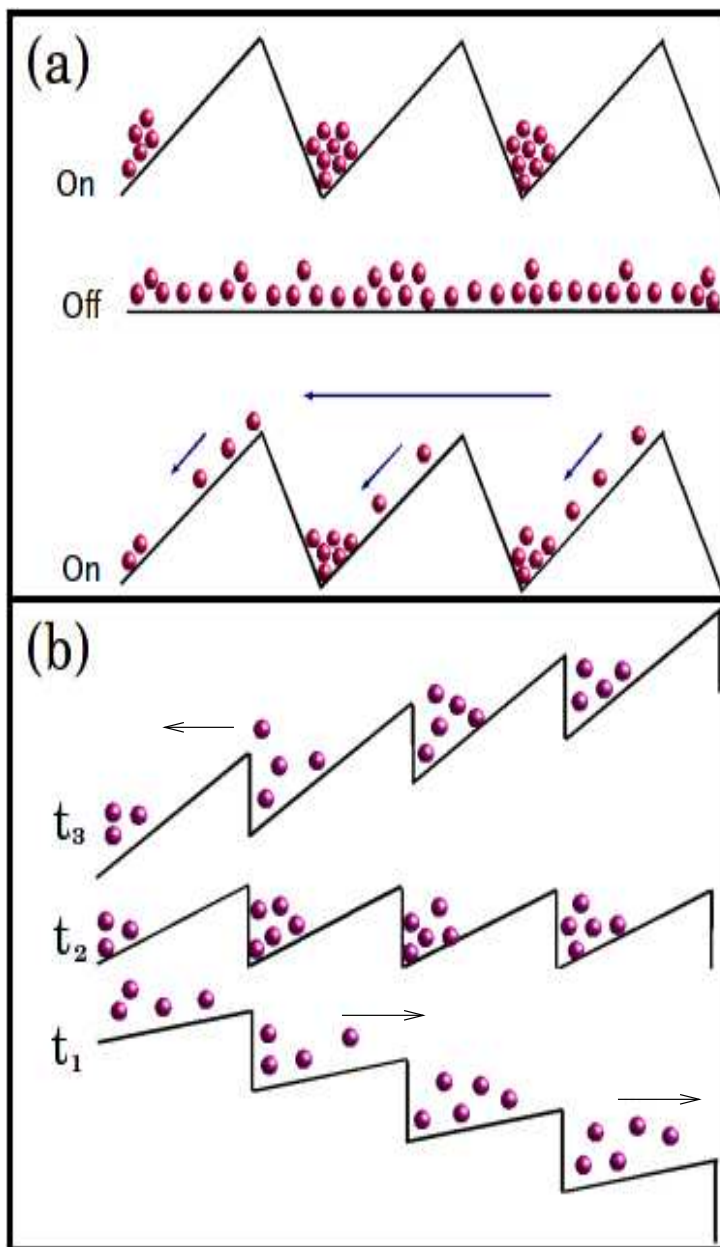


Figura 1.4: (a) Ejemplo de un *On-off ratchet*, donde el potencial se alterna en el tiempo entre dos formas. El encendido y apagado consecutivo del potencial provoca un flujo de partículas en una dirección. (b) Esquema de un *Ratchet oscilado*. Debido al cambio en las alturas del potencial, la probabilidad de que las partículas salten las barreras hacia la derecha en el tiempo t_1 es más alta que la probabilidad de que salten hacia la izquierda en el tiempo t_2 .

sino también de la forma que este adquiere cuando es oscilado.

En 1997, Riemann, Griffoni y Hänggi fueron los primeros en concebir el concepto de *ratchet cuántico* [33], ellos se dedicaron al estudio del análogo cuántico de un ratchet oscilado, donde las oscilaciones son realizadas de forma adiabática (*adiabatic rocking ratchet*). Como resultado, predijeron una dependencia de la dirección de la corriente como función de la temperatura. Los *ratchets cuánticos* han sido desarrollados recientemente de forma experimental [34], confirmando los cambios de dirección de la corriente en función de la temperatura como había sido predicho.

La Fig. 1.5 muestra un ratchet cuántico experimental, la parte oscura son canales grabados en la capa superior de la heteroestructura de AlGaAs-GaAs, los cuales confinan lateralmente al 2DEG que se encuentra paralelo a la superficie de la estructura. El dispositivo genera barreras de potencial asimétricas para los electrones que se mueven en el gas electrónico. Cuando un voltaje V es aplicado, la corriente I está determinada por los coeficientes de reflexión y transmisión correspondientes a la barrera de potencial y estos son altamente dependientes de la forma de la barrera.

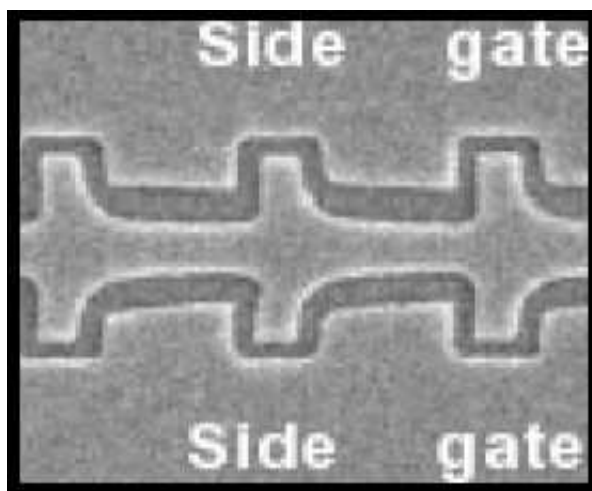


Figura 1.5: Realización experimental de un ratchet cuántico. El dispositivo ha sido fabricado haciendo uso de heteroestructuras de AlGaAs-GaAs. Las partes oscuras son canales que se han formado al retirar parte de la capa superior de la heteroestructura. De esta forma, el gas electrónico que se forma en la interfase del AlGaAs y el GaAs es confinado a la parte central del dispositivo, donde los electrones al moverse experimentan un potencial asimétrico (ratchet). Las partes laterales del dispositivo se utilizan para generar un potencial que ayuda a aumentar el confinamiento de los electrones dentro del ratchet. Figura tomada de [34].

1.6. OBJETIVOS

En este trabajo de tesis estamos interesados en el estudio del transporte electrónico de los *ratchets cuánticos*, teniendo como objetivo la caracterización de las curvas de corriente contra voltaje $I-V$ para diferentes potenciales asimétricos en función de distintos parámetros como son: la energía de Fermi, la temperatura, la altura y el ancho de las barreras y el número de barreras.

En el capítulo 2 introduciremos algunos conceptos importantes como son el de *masa efectiva*, la formación del gas de electrones bidimensional (2DEG), y el transporte balístico. Introduciremos además la teoría necesaria para el estudio que deseamos realizar. En el capítulo 3 trataremos el modelo y método que utilizaremos, en particular mostraremos como calcular el coeficiente de transmisión, el cual está relacionado directamente con la corriente a través del siste-

ma, se mostrará además como este método sirve para calcular el coeficiente de transmisión de un potencial que tenga cualquier forma, comparándolo con varios ejemplos de barreras de potencial conocidos y que pueden ser resueltos analíticamente. En el capítulo 4 se mostrará el análisis detallado de los resultados más relevantes obtenidos en este trabajo.

Finalmente en el capítulo 5 de esta tesis mencionaremos las conclusiones de nuestro trabajo así como las perspectivas que de este han resultado.

CAPÍTULO 2

TEORÍA Y CONCEPTOS BÁSICOS

Las heteroestructuras son los bloques de construcción de muchos de los dispositivos semiconductores más avanzados que están siendo desarrollados y producidos. Son los elementos esenciales de los detectores y fuentes ópticas de más alto rendimiento, y están comenzando a ser empleadas de manera creciente en dispositivos digitales y analógicos de alta velocidad y de alta frecuencia. La utilidad de las heteroestructuras se debe a que ofrecen un control preciso sobre los estados y el movimiento de los portadores de carga en los semiconductores. Como punto de partida para el estudio de estos sistemas, es necesario conocer algunos aspectos básicos de la teoría de semiconductores.

2.1. TEORÍA BÁSICA DE SEMICONDUCTORES

Las heteroestructuras son capaces de mejorar el rendimiento de dispositivos semiconductores debido a que permiten, de acuerdo al dispositivo, modificar localmente la estructura de las bandas de energía del semiconductor y por lo tanto controlar el movimiento de los portadores de carga. Para entender como tales modificaciones locales afectan este movimiento, necesitamos entender las bandas de energía de los semiconductores en el volumen así como algunos conceptos básicos de estos.

La estructura cristalina más común en los semiconductores más utilizados es

la estructura del diamante (mostrada en la Fig. 2.1(a)), donde cada átomo está unido por un enlace covalente a los cuatro átomos adyacentes formando un tetraedro. Los semiconductores compuestos como el GaAs poseen una estructura cristalina similar a la del diamante. Sin embargo, la estructura contiene dos tipos de átomos. Cada átomo tiene aún cuatro enlaces covalentes, pero estos lo unen con átomos de otro tipo. A esta estructura se le conoce como *zinc-blenda*. La Fig. 2.1(b) muestra la estructura del GaAs.

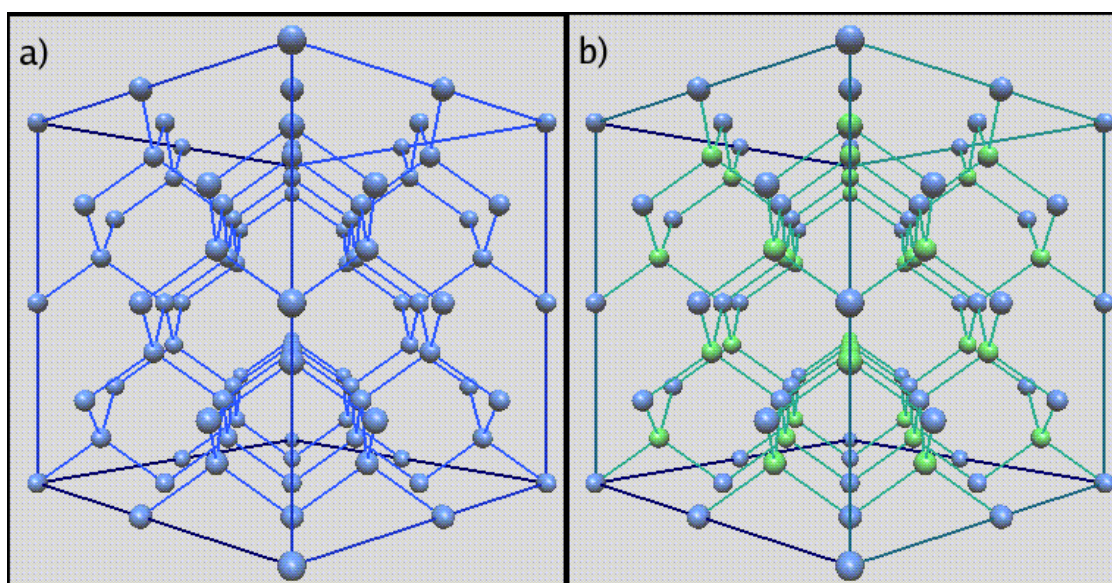


Figura 2.1: (a) Estructura cristalina del diamante. Cada átomo está unido a sus cuatro primeros vecinos mediante un enlace covalente formando un tetraedro. Semiconductores como el silicio (Si) y el germanio (Ge) poseen esta estructura. (b) Estructura cristalina del arsenuro de galio (GaAs), cada átomo de arsénico en la red (en color verde) se encuentra unido covalentemente a cuatro átomos de galio (en color azul) formando un tetraedro. A esta estructura se le conoce como *zinc-blenda*. Figura tomada de [49].

Si por ejemplo, un número de átomos de silicio (un semiconductor) se unen para formar un cristal, los niveles discretos de energía de los átomos libres pasan a formar bandas de energía en el cristal. La razón de esto es que los electrones son libres de moverse de un átomo a otro, y además pueden tener diferentes energías cinéticas, dependiendo de su movimiento. Cada uno de los estados cuánticos de los átomos libres da lugar a una banda de energía. Las combi-

naciones de enlace (bonding) de los estados ocupados por los electrones de valencia en el átomo, se convierten en las bandas de valencia del cristal. Las combinaciones de antienlace (antibonding) de estos estados forman las bandas de conducción. A la separación entre la banda llena más alta (banda de valencia) y la banda desocupada más baja (banda de conducción) se le conoce como el *gap* del semiconductor. La evolución de las bandas y gaps en semiconductores es mostrada en la Fig. 2.2.

El problema de eigenvalores de un cristal semiconductor, proporciona soluciones que forman lo que es conocido como estructura de bandas del semiconductor. La mayoría de los fenómenos físicos (electrónicos, ópticos, magnéticos, etc.) en los semiconductores pueden ser entendidos poniendo atención en una pequeña porción de la estructura de bandas. Estos puntos son los más bajos de la banda de conducción y los puntos más altos de la banda de valencia. El punto más alto de la banda de valencia es conocido como punto Γ , y corresponde al punto ($k_x=k_y=k_z=0$) en el espacio k . En muchos de los semiconductores compuestos como el GaAs, el máximo de la banda de valencia y el mínimo de la banda de conducción ocurren en el mismo punto del espacio k (punto Γ). Tales semiconductores son llamados *semiconductores de gap directo* y son la base de muchos dispositivos ópticos. Si el mínimo de la banda de conducción se encuentra en un punto diferente del espacio k , el semiconductor es un *semiconductor de gap indirecto*. El silicio y el germanio son semiconductores de este tipo.

La forma de las funciones de onda $\phi_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ de los electrones en las bandas está determinada por el teorema de Bloch, el cual establece que:

$$\phi_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = u_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (2.1)$$

donde n etiqueta la banda de energía, \mathbf{k} es el vector de onda del estado, y $u_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ es una función periódica en la red cristalina. Cada estado tiene una energía $E_n(\mathbf{k})$, y una representación gráfica de esta energía en función de \mathbf{k} nos muestra la estructura de bandas. Para muchos propósitos los valores de \mathbf{k} pueden ser confinados dentro de una figura sólida llamada zona de Brillouin. Es importante

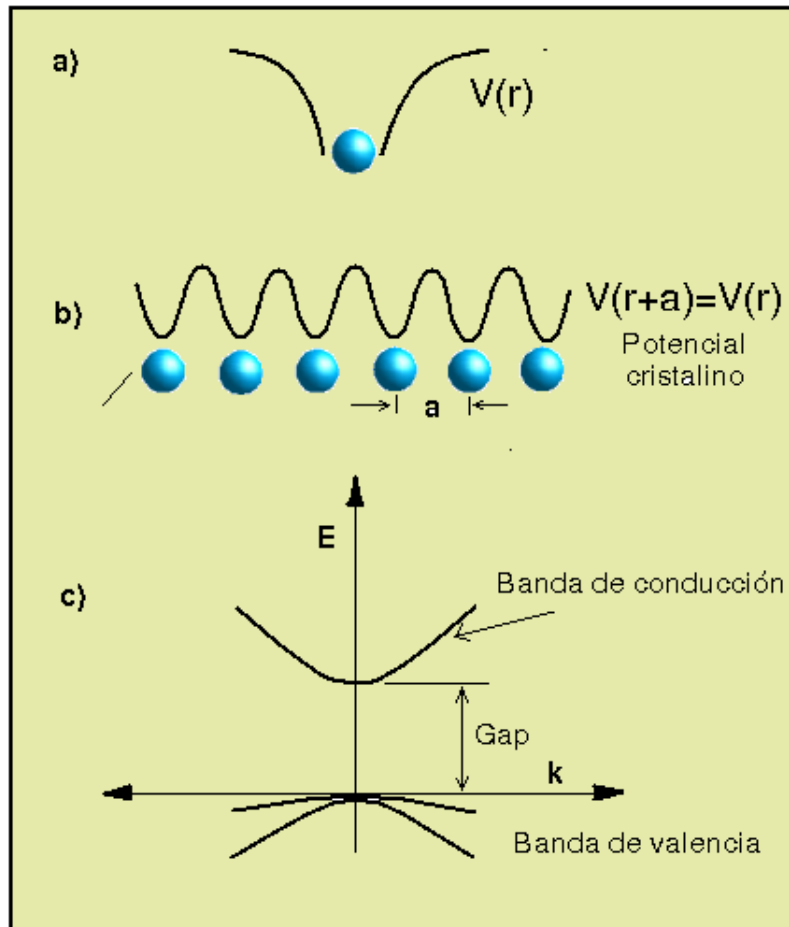


Figura 2.2: Formación de la estructura de bandas. Los potenciales de los átomos individuales (a) se unen para formar un potencial cristalino periódico (b). Las bandas son creadas mediante combinaciones de los estados de los átomos individuales. Al espaciamento entre la banda de valencia y la banda de conducción se le conoce como el *gap* del semiconductor (c).

notar que la estructura de bandas no es otra cosa que los eigenvalores permitidos del problema cuántico para un semiconductor perfecto. Los valores de k están cuantizados, pero la cuantización es tan fina que para propósitos prácticos se asume continua. Gráficas de perspectiva de la estructura de bandas del arsenuro de galio y del silicio pueden ser observadas en la Fig. 2.3.

Para desarrollar dispositivos electrónicos útiles, los semiconductores deben ser dopados con el fin de obtener suficientes portadores de carga. Típicamente, estos dopantes son átomos sustitucionales que tienen niveles de energía muy cercanos al borde de la banda de conducción (donadores) o al borde de la banda de valencia (aceptores). Los electrones (en el caso de los donadores) y los huecos (aceptores) contribuidos por los dopantes se encuentran ligados a sus respectivos átomos a muy bajas temperaturas. Sin embargo, cuando la temperatura aumenta, los electrones/huecos adquieren suficiente energía para escapar de los átomos a los cuales están ligados y son capaces de vagar libres por el cristal. Que tan rápido se mueven estas cargas, es una de las cuestiones que la teoría de transporte trata de resolver, ya que esto determina entre otras cosas que tan rápido podrá actuar un transistor o que tanto emitirá un láser.

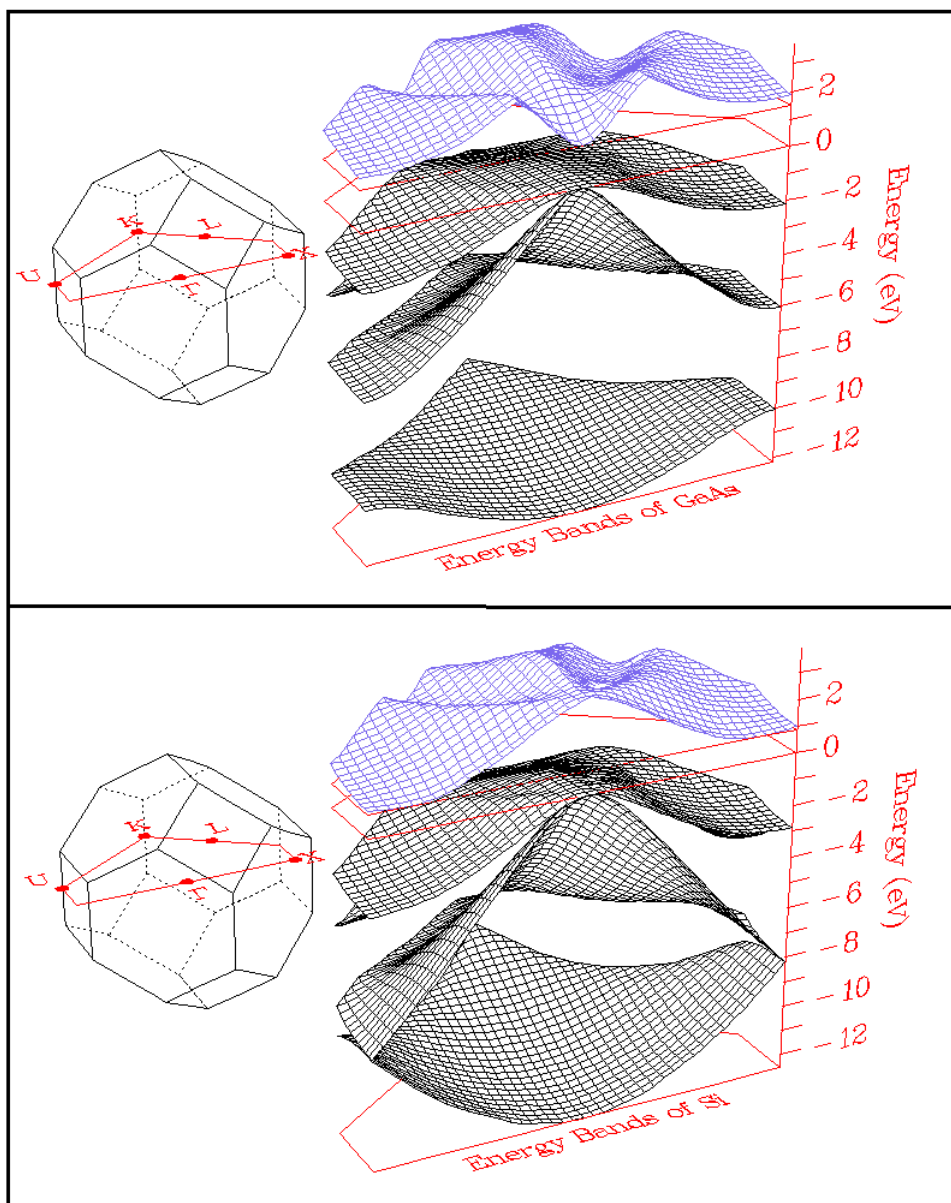


Figura 2.3: Gráficas de perspectiva de la estructura de bandas de el arsenuro de galio y del silicio. La figura de la izquierda muestra la zona de Brillouin, y la sección bidimensional sobre la cual son desplegadas las bandas de energía, Las bandas de energía son mostradas a la derecha. Las cuatro superficies que se encuentran debajo de 0 eV son las bandas de valencia, y las superficies superiores son las bandas de conducción. Para el arsenuro de galio el máximo de la banda de valencia se encuentra en $k = 0$, al igual que el mínimo de la banda de conducción, por lo que el GaAs es un semiconductor de gap directo, al contrario del silicio que es un semiconductor de gap indirecto. Fig. tomada y modificada de [50].

2.2. APROXIMACIÓN DE MASA EFECTIVA

Ahora, presentaremos el desarrollo de un poderoso formalismo que simplifica enormemente el tratamiento de las propiedades de transporte.

Siempre y cuando las perturbaciones del potencial cristalino no sean drásticas, podemos modificar la ecuación de Schrödinger de una forma que es muy útil para el estudio del transporte. De esta forma nos enfrentamos al problema fundamental de tratar con la posición de una partícula en el espacio real y con su momento al mismo tiempo. Para esto, es necesario introducir el concepto de paquete de onda. Los paquetes de onda, a diferencia de los eigenestados de Bloch, tienen una extensión finita tanto en el espacio real como en el de momentos. Un paquete de onda no es sino una combinación lineal de eigenestados de Bloch para valores pequeños de k , alrededor de una región de interés dentro de la zona de Brillouin. Para muchos de los casos, es suficiente investigar las propiedades de los electrones y huecos localizados muy cerca de los extremos de las bandas en el espacio k , por lo tanto, tomamos eigenestados de Bloch alrededor de tales puntos, y creamos un paquete de onda mediante combinaciones lineales de estos estados.

Para ilustrar esto, consideremos el caso unidimensional. Construimos un paquete de onda $\Phi(x)$, tomando una combinación lineal de los eigenestados de Bloch $\phi_{n,k}(x)$ de la n -ésima banda con vector de onda k . La suma se lleva a cabo sobre toda la zona de Brillouin.

$$\Phi(x) = \sum_n \sum_k \psi(k) \phi_{nk}(x) = \sum_n \int \frac{dk}{2\pi} \psi(k) \phi_{nk}(x) \quad (2.2)$$

Ahora hacemos dos aproximaciones cruciales:

- Asumimos que solo una banda juega un papel importante en el paquete de onda, y entonces se omite la suma sobre todas las bandas.
- Asumimos que en la banda en la que estamos interesados, solo los vectores de onda de una pequeña región (digamos $k = 0$) son importantes, (ver

Fig. 2.4).

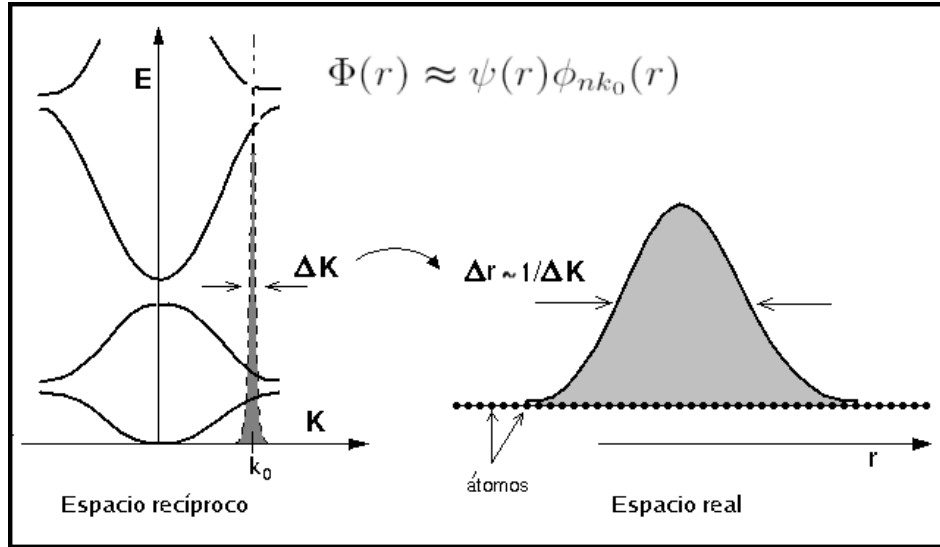


Figura 2.4: Un paquete de onda es construido tomando funciones de Bloch de una pequeña región del espacio recíproco, y sumándolas con ciertos pesos. Los pesos $\psi(k)$ tienen una pequeña extensión Δk en el espacio recíproco; cuando es llevada al espacio real, la extensión es grande, dado que $\Delta r \approx 1/\Delta k$; entonces el paquete de onda tiene una extensión finita, y representa la función de onda de una partícula. Por ejemplo, si restringimos la suma en el espacio recíproco al 1% de la zona de Brillouin, el paquete de onda se extiende sobre $1/0.01=100$ átomos en el espacio real. La función de onda en el espacio real está dada por la función de Bloch en el punto k_0 , modulada por una función envolvente $\psi(r)$, la cual es la transformada de Fourier de los pesos $\psi(k)$. Fig. tomada de [50].

Entonces, podemos escribir las funciones de Bloch como

$$\phi_{n,k}(x) = u_{nk}(x)e^{ikx} \approx u_{n0}(x)e^{ikx} = \phi_{n0}(x)e^{ikx}. \quad (2.3)$$

Entonces el paquete de onda toma la forma

$$\Phi(x) \approx \phi_{n0}(x) \int \frac{dk}{2\pi} \psi(k)e^{ikx} = \phi_{n0}(x) \cdot \psi(x), \quad (2.4)$$

donde el término integral es identificado como la transformada de Fourier de los pesos $\psi(k) \longleftrightarrow \psi(x)$.

La función $\psi(x)$, la cual es la transformada de Fourier de los pesos del paquete de onda es llamada función envolvente. $\psi(x)$ es típicamente una función suave extendida sobre varias constantes de red. Esto se ilustra en la Fig. 2.5.

Ahora veamos como se comporta este paquete de onda cuando le aplicamos el hamiltoniano H_0 del cristal periódico.

Dado que las funciones $\phi_{nk}(x)$ son eigenfunciones de Bloch del hamiltoniano H_0 , es decir,

$$H_0\phi_{nk}(x) = E_n(k)\phi_{nk}(x), \quad (2.5)$$

obtenemos que

$$H_0\Phi(x) = \int \frac{dk}{2\pi} \psi(k) E_n(k) \phi_{nk}(x) \approx \phi_{n0}(x) \int \frac{dk}{2\pi} \psi(k) E_n(k) e^{ikx}. \quad (2.6)$$

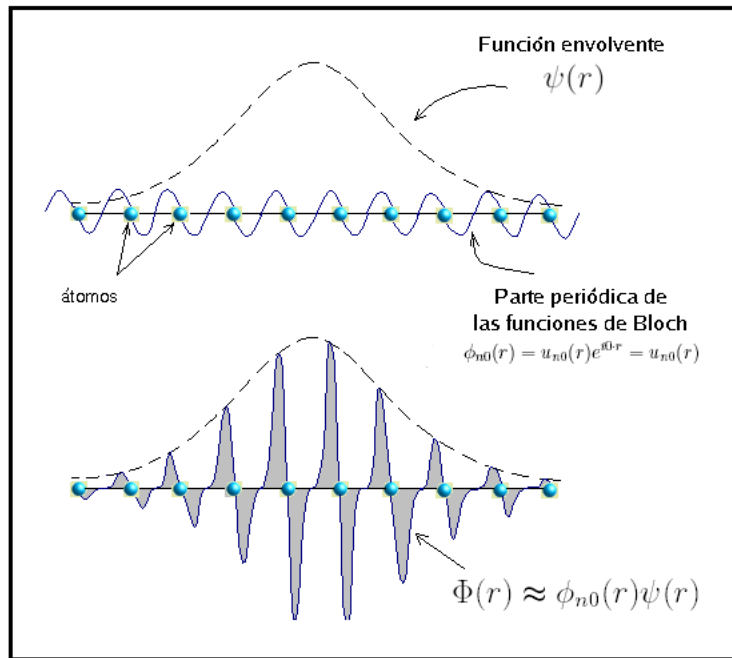


Figura 2.5: La función envolvente $\psi(r)$ modula a la función de Bloch $\phi_{n0}(x)$ para producir la función de onda $\Phi(x)$. Fig. tomada y modificada de [50].

Escribiendo los eigenvalores como una serie de Taylor de pequeños vectores

alrededor de $k = k_0 = 0$,

$$E_n(k) = \sum_m a_m k^m, \quad (2.7)$$

la ecuación de Schrödinger se convierte en

$$H_0\Phi(x) \approx \phi_{n0}(x) \sum_m a_m \int \frac{dk}{2\pi} \psi(k) k^m e^{ikx}. \quad (2.8)$$

Ahora usaremos una propiedad de la transformada de Fourier.

Si $f(k)$ es la transformada de Fourier de $f(x)$, entonces $kf(k)$ es la transformada de Fourier de $(-id/dx)f(x)$ y en general $k^m f(k)$ es la transformada de Fourier de $(-id/dx)^m f(x)$. Entonces

$$\int \frac{dk}{2\pi} k^m \psi(k) e^{ikx} \longleftrightarrow \left(-i \frac{d}{dx}\right)^m \psi(x), \quad (2.9)$$

y la ecuación de Schrödinger se modifica como

$$H_0\Phi(x) \approx \phi_{n0}(x) E_n(-i\nabla)\psi(x), \quad (2.10)$$

la cual puede ser generalizada a tres dimensiones. Así pues, en el término de la energía hacemos la sustitución $k \longleftrightarrow i\partial/\partial r$, haciéndolo un operador que actúa solo sobre la función envolvente $\psi(x)$. Este paso es crucial, dado que la parte de la función de Bloch ha sido puesta a un lado como coeficiente, de tal forma que no hay operadores actuando sobre ella.

Ahora, en lugar del hamiltoniano de potencial periódico, si tenemos otro potencial (por ejemplo, una perturbación) $V(r)$ presente, la ecuación de Schrödinger es

$$H_0\phi_{n0}(r)\psi(r) + V(r)\phi_{n0}(r)\psi(r) = E\phi_{n0}(r)\psi(r), \quad (2.11)$$

y usando la Ec. 2.10, obtenemos que

$$[E_n(-i\nabla) + V(r)]\psi(r) = E\psi(r), \quad (2.12)$$

donde las funciones de Bloch ya no aparecen en la ecuación. Además, si conocemos la estructura de bandas del semiconductor, entonces podemos escribir la energía alrededor del punto de interés $k_0 = 0$ en términos de la masa efectiva m^* , y el operador $E_n(-i\nabla)$ se convierte en

$$E_n(k) \approx E_c(r) + \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} \rightarrow E_n(-i\nabla) \approx E_c(r) - \frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2 \quad (2.13)$$

y la ecuación de Schrödinger toma la forma simplificada

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2 + V(r) \right] \psi(r) = [E - E_c(r)] \psi(r), \quad (2.14)$$

la cual es conocida como **aproximación de masa efectiva**.

Veamos lo que se ha logrado con este tratamiento. La Ecuación de Schrödinger ha sido convertida a la de un problema mucho más simple, que es el de una partícula de masa efectiva m^* moviéndose en un potencial $E_c(r) + V(r)$. Toda la información acerca de la estructura de banda y el potencial cristalino ha sido incluida en la masa efectiva m^* . Las funciones de onda son las funciones envolventes $\psi(r)$, de las cuales uno recobra la función real del paquete de onda multiplicándolas por las funciones de Bloch, esto es

$$\Phi(r) = \phi_{n0}(r)\psi(r) = u_{n0}(r)\psi(r). \quad (2.15)$$

Las funciones $\psi(r)$ pueden ser determinadas para cualquier potencial, solo hay que resolver la ecuación de Schrödinger para una partícula en el potencial $E_c(r) + V(r)$. Nótese que la función $\psi(r)$ en ausencia de un potencial $V(r)$ está dada por

$$\psi(r) = C e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (2.16)$$

y los correspondientes eigenvalores de la ecuación de Schrödinger son

$$E = E_c(r) + \frac{\hbar^2 |\mathbf{k}|^2}{2m^*}. \quad (2.17)$$

Si consideramos a los electrones en el fondo de la banda de conducción, $E_c(r)$ es la variación espacial del borde de la banda de conducción. En los semiconductores en el volumen, la variación del borde de la banda puede ser modificada mediante la aplicación de campos eléctricos. En las heteroestructuras semiconductoras, se puede manipular la variación del borde de la banda $E_c(r)$ mediante campos cuasi-eléctricos. El borde de la banda puede comportarse como pozos cuánticos (*quantum wells*), alambres cuánticos (*quantum wires*), o puntos cuánticos (*quantum dots*), dependiendo de la composición del semiconductor. La aproximación de masa efectiva es un punto de partida natural en el estudio de tales estructuras. Es importante mencionar que la aproximación de masa efectiva es válida siempre y cuando la curvatura de las bandas no sea muy grande y donde la integral 2.8 sea válida. La masa efectiva de un material semiconductor puede ser calculada mediante un ajuste de la banda de conducción (masa efectiva de los electrones) o de la banda de valencia (masa efectiva de los huecos).

2.3. GAS DE ELECTRONES BIDIMENSIONAL (2DEG)

Muchos de los dispositivos mesoscópicos investigados experimentalmente, están basados en estructuras semiconductoras cuyo propósito es el confinamiento del movimiento electrónico a un plano. Esto significa que al menos para algunas fases de operación del dispositivo, los portadores están confinados en un potencial de tal forma que su movimiento en una dirección está restringido y entonces cuantizado, pero son libres de moverse en el plano perpendicular al potencial de confinamiento. El resultante gas de electrones bidimensional (2DEG) presenta entre otras, la ventaja de ser extremadamente limpio (la interface no contiene impurezas que puedan provocar dispersión), teniendo entonces una alta movilidad y un camino libre medio muy grande.

2.3.1. EL MOSFET

La creación de un sistema bidimensional requiere de una superficie o una interfase entre dos materiales, y de una fuerza para mantener los objetos que deseamos en esta superficie o interfase. La forma más exitosa de lograr un sistema de electrones bidimensional es confinando a estos electrones en la interfase entre un aislante y un semiconductor o entre dos semiconductores con distintas propiedades. La primera construcción es un transistor por efecto de campo que se conoce como MOSFET (*Metal-Oxide-Semiconductor Field Effect Transistor*). De forma simple, esta estructura está constituida por tres capas, una capa de un óxido-semiconductor colocada entre una capa metálica y una semiconductor. El óxido semiconductor, generalmente SiO_2 , se encuentra aislando por lo que los electrones de conducción no pueden entrar en él. Un campo eléctrico es aplicado entre la capa metálica y la semiconductor, este dobla la banda de conducción dentro de la capa semiconductor de tal manera que se forma un pozo de potencial en la dirección z (i.e., perpendicular a la interfase) para los electrones de conducción que se encuentran cerca de la interfase con el óxido (ver Fig. 2.6). Al resolver la ecuación de Schrödinger para los electrones en este pozo

de potencial, se obtiene un conjunto discreto de niveles, cada uno de los cuales corresponde a un buen número cuántico (a bajas temperaturas) que representa la energía cinética de los electrones en la dirección z .

Cuando el campo eléctrico es suficientemente fuerte, una *capa de inversión* se crea en la vecindad inmediata a la interfase entre el óxido y el semiconductor, donde los electrones tienen una energía por debajo de la energía de Fermi. Los estados de conducción pueden ser entonces poblados, aún a temperaturas muy bajas. Entonces es finalmente posible idear el doblamiento del pozo de potencial de tal forma que solo el nivel más bajo se encuentre debajo del nivel de Fermi, y de este modo el movimiento electrónico en la dirección z es cuánticamente restringido, por lo tanto los electrones son efectivamente bidimensionales.

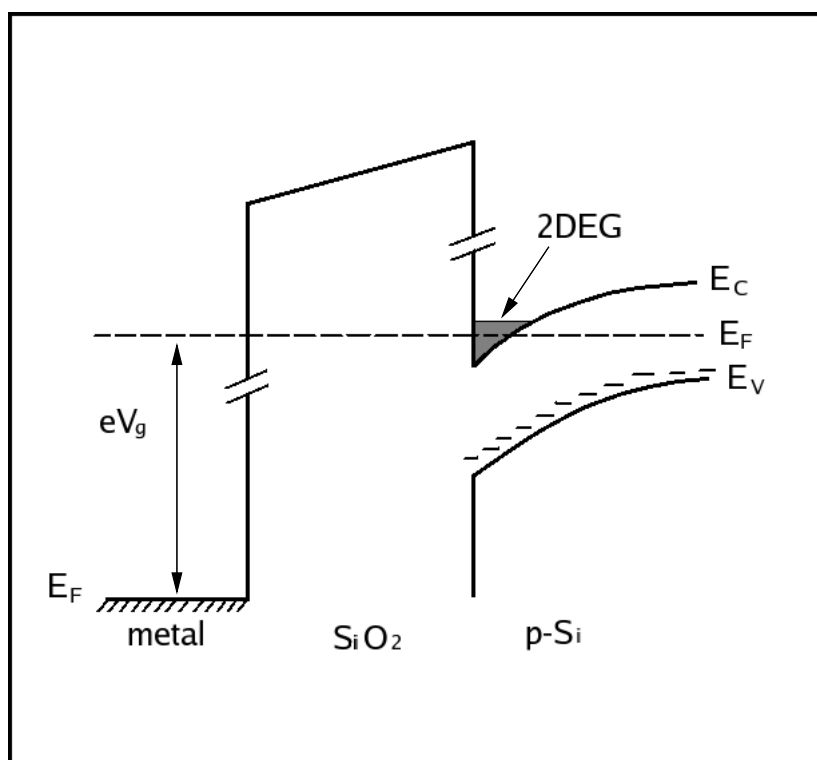


Figura 2.6: Esquema de un MOSFET. Se muestra el comportamiento de la banda de valencia E_v , la banda de conducción E_c y de las energías de Fermi en la interfase entre el semiconductor (derecha) y un metal (izquierda). Un voltaje V_g es aplicado entre el semiconductor y el metal, el cual dobla la banda de conducción del semiconductor, creando una capa de inversión (sombreada) entre el óxido y el semiconductor. Fig. tomada y modificada de [48]

2.3.2. 2DEG EN HETEROESTRUCTURAS DE GAAS-ALGAAS

Una segunda forma de construir un gas de electrones bidimensional es utilizando heteroestructuras basadas usualmente en semiconductores III-V, entre las cuales quizás las más populares sean las heteroestructuras basadas en arsenuro de galio GaAs, por ejemplo, heteroestructuras de GaAs-AlGaAs. En este caso la formación del gas bidimensional 2DEG se consigue debido a las diferencias en las propiedades del GaAs y el AlGaAs. El AlGaAs es un material con una banda de conducción y energía de Fermi más altas que las que posee el GaAs, el AlGaAs tiene un gap más ancho que el GaAs. Cuando los dos materiales son puestos en contacto (Fig. 2.7(a)), la energías de Fermi de ambos materiales intentan encontrar un equilibrio, y un exceso de electrones son transferidos del AlGaAs hacia el GaAs. Esto tiene dos consecuencias. En el lado del AlGaAs se crea un exceso de iones positivamente cargados, y esta densidad de carga da lugar a un potencial electrostático el cual causa que las bandas (de valencia y de conducción) se doblen hacia arriba. En el lado del GaAs ocurre lo contrario debido a la presencia de un exceso de iones cargados negativamente. Consecuentemente, las bandas de este lado se doblan hacia abajo. En el equilibrio, la energía de Fermi es constante en toda la estructura. La densidad electrónica es muy pronunciada cerca de la interfase entre el GaAs y el AlGaAs (donde la energía de Fermi se encuentra dentro de la banda de conducción) formando una delgada capa conductora a la que nos referimos como gas de electrones bidimensional (2DEG), ver Fig. 2.7(b).

Una importante ventaja sobre un MOSFET es que la interfase de una heteroestructura de GaAs-AlGaAs no interrumpe la periodicidad cristalina. Esto es posible debido a que el espaciamiento de la red del GaAs y el AlGaAs es casi el mismo. Gracias a la ausencia de dispersión en la interfase, la movilidad electrónica puede ser más grande en varios ordenes de magnitud. La movilidad es también alta debido a la pequeña masa efectiva en el GaAs ($m^* = 0.067m_e$). Se han reportado movilidades récord de $\mu_e \gtrsim 10^7 \text{ cm}^2/V \cdot s$ a bajas temperaturas [35], que corresponden a un caminos libres medios que exceden $l = 0.1 \text{ mm}$. (La Ta-

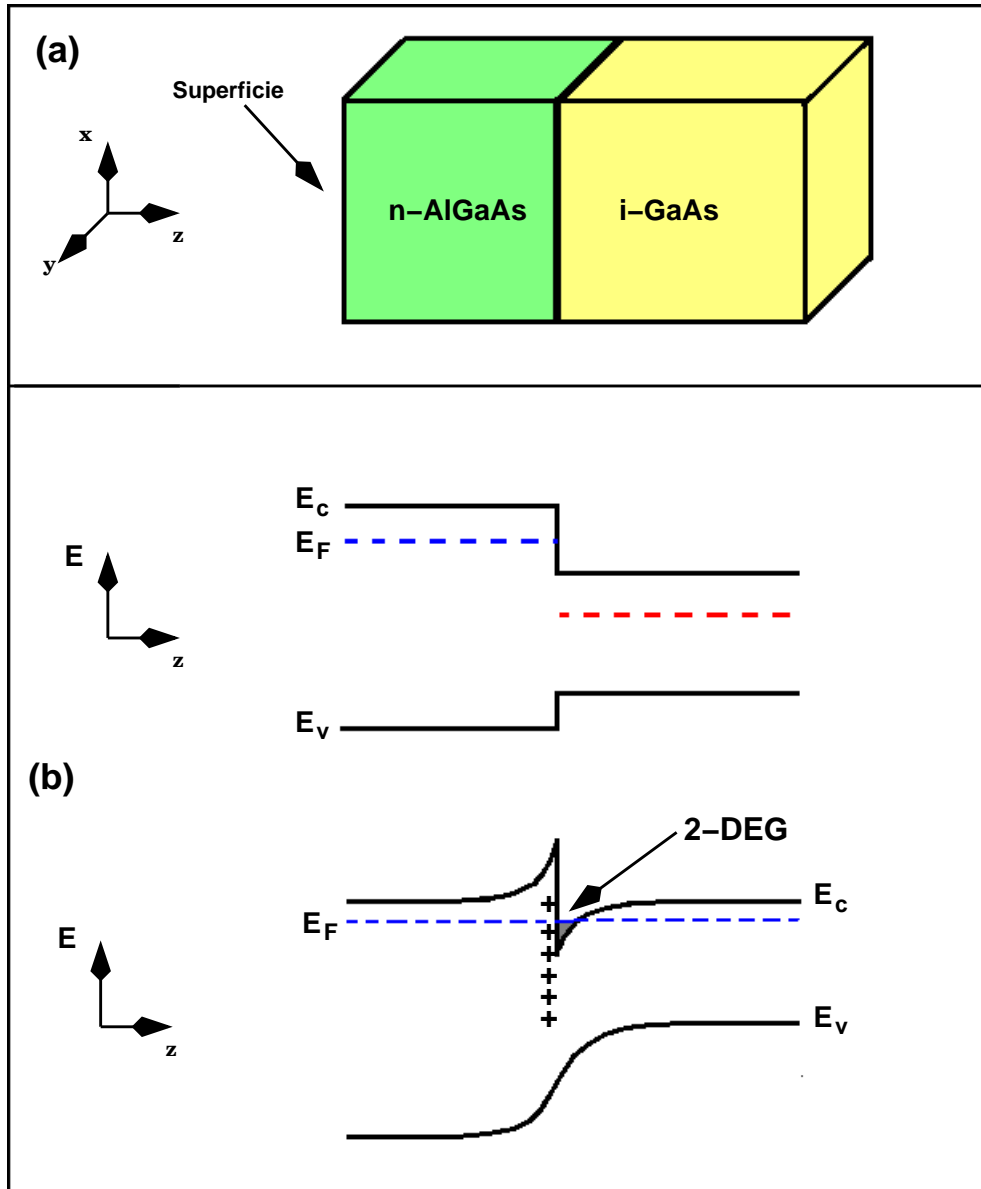


Figura 2.7: Esquema de la formación de un gas bidimensional en la interfase entre dos semiconductores. La transferencia de carga entre el AlGaAs (izquierda) y el GaAs (derecha) induce una distorsión en la banda de conducción en la interfase, la cual genera un pozo de potencial que confina a los electrones a una interfase bidimensional.

2.3. GAS DE ELECTRONES BIDIMENSIONAL (2DEG)

Cuadro 2.1: Resumen de algunas de las propiedades físicas del silicio y el arsenuro de galio. Tabla tomada y modificada de [48].

		GaAs(100)	Si(100)	Unidades
Masa Efectiva	m^*	0.067	0.19	$m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{Kg}$
Degeneración de Espín	g_s	2	2	
Degeneración de Valle	g_v	1	2	
Constante Dieléctrica	ϵ	13.1	11.9	$\epsilon_0 = 8.9 \times 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$
Densidad de Estados	$\rho(E) = g_s g_v (m^* / 2\pi \hbar^2)$	0.28	1.59	$10^{11} \text{ cm}^{-2} \text{ meV}^{-1}$
Densidad Electrónica	n_s	4	1-10	10^{11} cm^{-2}
Vector de Onda de Fermi	$k_F = (4\pi n_s / g_s g_v)^{\frac{1}{2}}$	1.58	0.56 - 1.77	10^6 cm^{-1}
Velocidad de Fermi	$v_F = \hbar k_F / m^*$	2.7	0.34 - 1.1	10^7 cm/s
Energía de Fermi	$E_F = (\hbar k_F)^2 / 2m^*$	14.0	0.63 - 6.3	meV
Movilidad Electrónica	μ_e	$10^4 - 10^6$	10^4	cm^2/Vs
Tiempo de Dispersión	$\tau = m^* \mu_e / e$	0.38 - 38.0	1.1	ps
Constante de Difusión	$D = v_F^2 \tau / 2$	140 - 14000	6.4 - 64	cm^2/s
Resistividad	$\rho = (n_s e \mu_e)^{-1}$	1.6 - 0.016	6.3 - 0.63	k Ω
Longitud de Onda de Fermi	$\lambda_F = 2\pi / k_F$	40	112 - 35	nm
Camino Libre Medio	$l = v_F \tau$	$10^2 - 10^4$	37 - 118	nm
Longitud de Coherencia de Fase	$l_\phi = (D\tau)^{\frac{1}{2}}$	200 - ...	40 - 400	$\text{nm}(\text{T/K})^{-\frac{1}{2}}$
Longitud Térmica	$l_T = (\hbar D / k_B T)^{\frac{1}{2}}$	330 - 3300	70 - 220	$\text{nm}(\text{T/K})^{-\frac{1}{2}}$
Radio de Ciclotrón	$l_{cycl} = \hbar k_F / eB$	100	37 - 116	$\text{nm}(\text{B/T})^{-1}$
Longitud Magnética	$l_m = (\hbar / eB)^{\frac{1}{2}}$	26	26	$\text{nm}(\text{B/T})^{-\frac{1}{2}}$
	$k_F l$	15.8 - 1580	2.1 - 21	
	$\omega_e \tau$	1 - 1000	1	(B/T)
	$E_F / \hbar \omega_e$	7.9	1 - 10	$(\text{B/T})^{-1}$

bla 2.1 muestra una comparación entre distintas propiedades del GaAs y el Si). Como en la *capa de inversión* del Si, solo la subbanda bidimensional más baja (asociada al nivel más bajo en el pozo) está usualmente poblada.

2.3.3. SPLIT GATES

Una característica única del 2DEG, es que le puede ser dada cualquier forma deseada usando técnicas litográficas. La forma es definida mediante el grabado de un patrón en la muestra (lo que resulta en una remoción permanente del gas) o mediante el agotamiento electrónico por un método electrostático, usando electrodos (gates) construidos sobre la muestra (lo cual es reversible). Un agotamiento local en el 2DEG debajo de los gates está asociado a un incremento local del potencial relativo a la zona no agotada. En la frontera del gate es inducido un paso de potencial en el 2DEG. Este paso de potencial es suave debido a una longitud de agotamiento lateral grande (del orden de 100 nm para una altura del paso de 10 meV). Esta longitud de agotamiento grande es la base de la técnica conocida como *split-gates* [36], usada para definir canales estrechos de anchura variable.

Uno de los dispositivos más sencillos que pueden ser fabricados mediante esta técnica son los contactos cuánticos puntuales (*quantum point contacts*) [37], los cuales son básicamente constricciones muy cortas y estrechas en el 2DEG (ver Fig. 2.8). A muy bajas temperaturas la conductancia de este dispositivo está cuantizada en unidades de $2e^2/h$ [38, 39]. Debido al confinamiento lateral, una serie de subbandas unidimensionales se forma en la constricción, contribuyendo cada una con $2e^2/h$ a la conductancia. Esto requiere de una probabilidad de transmisión unitaria para cada una de las bandas unidimensionales ocupadas en la constricción, entonces este efecto solo puede ser observado en el régimen de transporte balístico, donde la longitud de la constricción es mucho más pequeña que el camino libre medio.

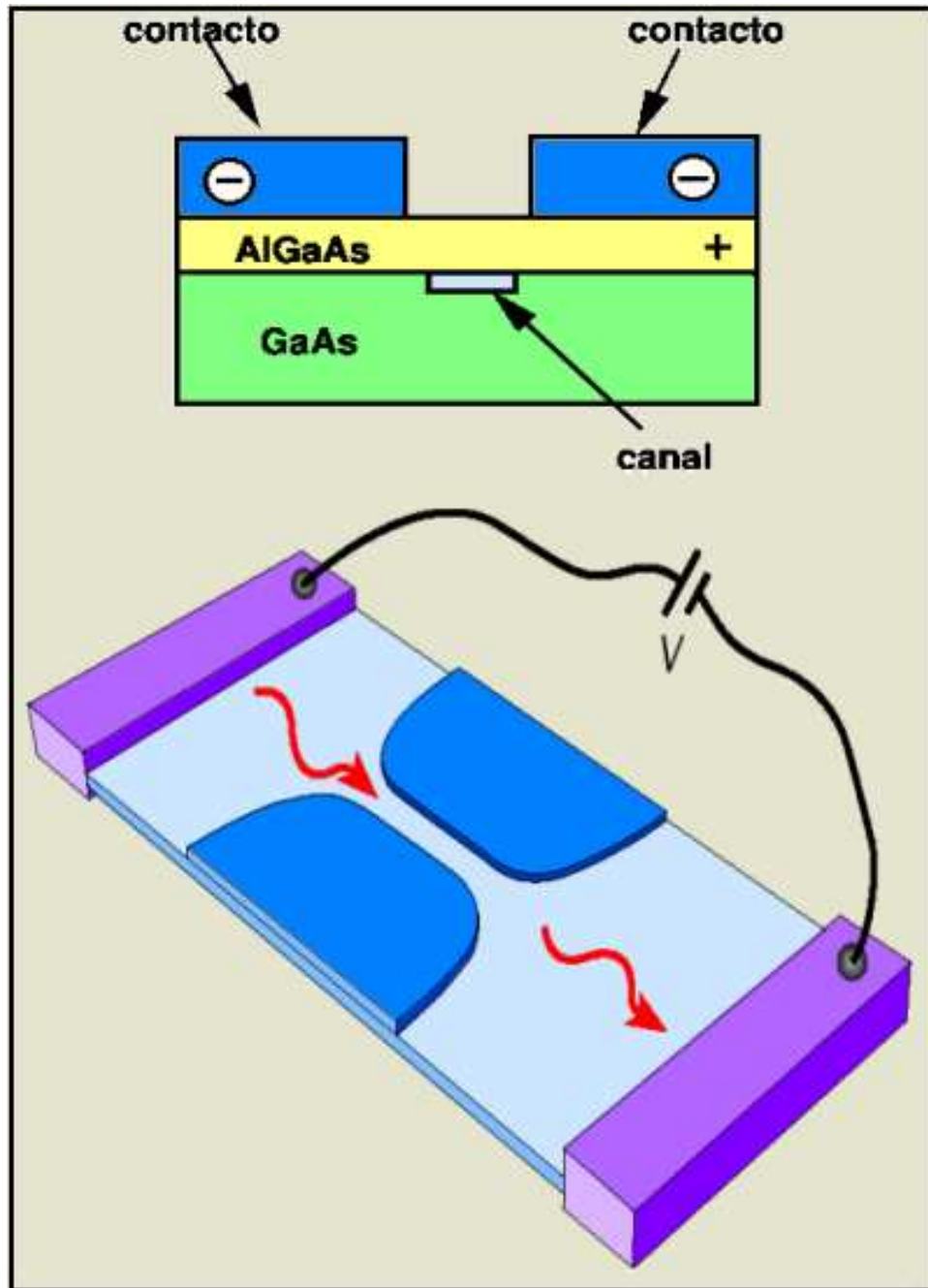


Figura 2.8: El gas bidimensional creado en la interfase de dos semiconductores puede ser manipulado para formar canales estrechos. La figura presenta la técnica de confinamiento más utilizada. Mediante la aplicación de un potencial, los electrones son obligados a moverse por constricciones estrechas, el movimiento en tales constricciones resulta cuantizado, y ocurre el fenómeno conocido como conductancia cuantizada.

2.4. TRANSPORTE BALÍSTICO EN SISTEMAS MESOSCÓPICOS

Dependiendo de ciertas longitudes características, el transporte en el régimen mesoscópico puede dividirse en balístico o difusivo. Por lo tanto, es necesario analizar estos dos regímenes en función de estas longitudes para determinar que tipo de problema estamos tratando.

2.4.1. REGÍMENES DE TRANSPORTE BALÍSTICO Y DIFUSIVO

En el caso más simple de *transporte balístico* en sistemas mesoscópicos, se asume que las partículas se mueven de un reservorio (contacto fuente) a otro (contacto drenador), a través de una *región activa* sin dispersión, excepto por posibles reflexiones por barreras dentro de esta región, o por las fronteras.

En el caso contrario, el transporte es *difusivo* y corresponde a partículas moviéndose a través de un sistema desordenado, donde las impurezas actúan como dispersores elásticos [40].

Ahora introduciremos algunas longitudes que caracterizan a los sistemas mesoscópicos, las cuales nos proporcionan los elementos necesarios para distinguir entre los dos regímenes de transporte que pueden ocurrir en estos sistemas.

Consideremos primero como *región activa* entre los contactos una caja de volumen $d_x \times d_y \times d_z$, la energía de una partícula dentro de esta caja está dada por

$$E(n_x, n_y, n_z) = \frac{\hbar^2}{2m^*} \left[\left(\frac{\pi n_x}{d_x} \right)^2 + \left(\frac{\pi n_y}{d_y} \right)^2 + \left(\frac{\pi n_z}{d_z} \right)^2 \right], \quad (2.18)$$

donde n_x , n_y y n_z son números enteros.

LONGITUD DE ONDA DE FERMI

La longitud de onda de Fermi $\lambda_F = 2\pi/k_F$, está directamente relacionada con el vector de onda de Fermi k_F , y por lo tanto con la densidad electrónica. A temperatura cero, los electrones ocupan estados especificados por el vector \mathbf{k} con $|\mathbf{k}| \leq k_F$ y la densidad electrónica n está dada por:

$$n = \begin{cases} \frac{2}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{3} k_F^3, & 3D \\ \frac{2}{(2\pi)^2} \pi k_F^2, & 2D, \\ \frac{2}{(2\pi)} 2k_F, & 1D \end{cases} \quad (2.19)$$

donde el factor 2 resulta de considerar el espín del electrón. El sistema de volumen $d_x \times d_y \times d_z$ que estamos tratando, puede categorizarse como un sistema en el bulto, o como un sistema mesoscópico, dependiendo de las magnitudes relativas de d_x , d_y , d_z , y λ_F :

1. Sistema macroscópico para $\lambda_F \ll d_x < d_y < d_z$.
2. Sistema mesoscópico para el cual el tamaño es grande comparado con la escala microscópica (atómica) pero pequeño comparado con la escala macroscópica [40].
 - Cuasi-2D (película delgada) para $\lambda_F \approx d_x \ll d_y < d_z$.
 - 2D (MOSFET, heteroestructura) para $d_x < \lambda_F \ll d_y < d_z$.
 - Cuasi-1D (alambre cuántico) para $d_x < d_y \approx \lambda_F \ll d_z$.
 - 1D para $d_x < d_y < \lambda_F \ll d_z$.
 - 0D para $d_x < d_y < d_z \ll \lambda_F$.

CAMINO LIBRE MEDIO

Uno de los métodos más utilizados para el estudio del transporte en sistemas macroscópicos es la ecuación de Boltzmann [47], la cual introduce una importante escala de longitud llamada camino libre medio l . El camino libre medio es

la longitud media que viaja un electrón antes de que su momento inicial sea destruido. A temperaturas suficientemente bajas, el transporte está determinado por los electrones con energías alrededor de la energía de Fermi E_F y, por lo tanto

$$l = v_F \tau, \quad (2.20)$$

donde v_F es la velocidad de Fermi y τ es el tiempo de relajación. La conductividad es usualmente escrita como

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m^*}, \quad (2.21)$$

donde n es la concentración electrónica y m^* es la masa efectiva.

Un electrón realiza un movimiento balístico sin sufrir dispersión en una escala más pequeña que el camino libre medio, y realiza un movimiento difusivo en una escala mayor que l . El movimiento difusivo es caracterizado por el coeficiente de difusión D , dado en el límite de las temperaturas bajas por

$$D = v_F^2 \tau = \frac{l^2}{\tau} = lv_F. \quad (2.22)$$

El transporte en sistemas mesoscópicos es dividido en difusivo y balístico, dependiendo de la magnitud relativa del camino libre medio l y el tamaño del sistema d . En el régimen difusivo ($l \ll d$), el transporte puede ser entendido como un proceso difusivo y es esencialmente independiente de la forma del sistema. En el régimen balístico ($l \gg d$), el electrón realiza un movimiento balístico dentro del sistema y las fronteras del sistema en vez de impurezas juegan el papel de dispersores.

Los alambres o puntos metálicos usualmente tienen un $l \approx 100 \text{ \AA}$, y el tamaño del sistema es grande. Debido a que la longitud de onda de Fermi ($\lambda_F \approx 1 - 2 \text{ \AA}$) es mucho más pequeña que el tamaño del sistema, la cuantización de los niveles de energía no es importante, excepto para muy bajas temperaturas, cuando la separación entre los niveles de energía de los primeros vecinos llega a ser com-

parable con $k_B T$ (donde T es la temperatura y k_B es la constante de Boltzmann). En los puntos metálicos, por lo tanto, la escala de energía más importante es la energía de carga de la interacción coulombiana.

En las heteroestructuras semiconductoras que tienen una alta calidad, el camino libre medio puede ser tan grande como $50 \mu\text{m}$, y por lo tanto ocurre el transporte balístico. Además la longitud de onda de Fermi es grande ($\lambda_F \approx 300 - 500 \text{ \AA}$) y puede ser comparable con el tamaño del sistema. La cuantización debida al confinamiento del sistema juega un papel importante.

LONGITUD DE COHERENCIA DE FASE

Nosotros hemos considerado un sistema de electrones cuyo movimiento es des-crito por la ecuación de Schrödinger. Sin embargo, en los semiconductores reales un electrón interactúa con muchos otros grados de libertad (por ejemplo otros electrones o vibraciones de la red) y cambia su energía. La fase de un electrón es destruída por tales interacciones dinámicas y la distancia sobre la cual un electrón mantiene su memoria de fase es llamada longitud de coherencia de fase. La longitud de coherencia de fase está dada por

$$l_\phi = \sqrt{D\tau_\phi} = l\sqrt{\frac{\tau_\phi}{\tau}}, \quad (2.23)$$

en el régimen difusivo y por $L_\phi = v_F\tau_\phi$ en el régimen balístico.

En los sistemas mesoscópicos los tamaños son comparables o más pequeños que la longitud de coherencia de fase. Usualmente, las cantidades observables en los sistemas macroscópicos son los promedios sobre ensambles de varios sistemas, dado que cada sistema consiste de muchos subsistemas descritos por ecuaciones de Schrödinger independientes. Cuando la longitud de coherencia de fase llega ser comparable a la del sistema, todo este es gobernado por una sola ecuación de Schrödinger y las cantidades observables ya no son promediadas.

2.5. LA ECUACIÓN DE LANDAUER

La ecuación de Landauer [4, 42–44] relaciona la corriente a través de un conductor balístico con la probabilidad de que un electrón pueda ser transmitido a través de él. Es válida cuando los contactos en ambos lados del conductor son libres de reflexiones; esto es, cuando los electrones pueden entrar en ellos desde el conductor sin sufrir reflexiones. La idea central de este formalismo es que la corriente total a través del conductor está dada por la diferencia entre las corrientes de la izquierda y la derecha. Cada una de estas corrientes es determinada como una función de la energía electrónica, mediante el producto de las densidades de estados electrónicos por la función de ocupación de Fermi, la velocidad y la probabilidad de transmisión de los electrones a través del conductor.

La corriente debida a los electrones de la izquierda está dada por

$$I_L = 2e \int_0^\infty f[E(k), \mu_L, T] v(k) t(k, V) dE \frac{dk}{2\pi}. \quad (2.24)$$

donde $e = -1.6 \times 10^{-19} C$. El factor 2 en el frente de la integral es debido al espín y $dk/2\pi$ es la densidad de estados k en una dimensión.

$f[E(k), \mu_L, T]$ es la función de ocupación de Fermi en el contacto de la izquierda, la cual da la probabilidad de que un estado esté ocupado, y es una función de la energía E del estado, del potencial químico μ , y de la temperatura T del contacto. v_k es la velocidad de los electrones, $t(k, V)$ es la probabilidad de que un electrón con vector de onda k sea transmitido a través del conductor y V es el voltaje aplicado. Generalmente es más conveniente integrar sobre las energías, entonces se hace la siguiente sustitución en la Ec. 2.24

$$dk = \frac{dk}{dE} dE = \frac{1}{\hbar v} dE, \quad (2.25)$$

con lo cual se obtiene

$$I_L = \frac{2e}{h} \int_{U_L}^\infty f[E, \mu_L, T] t(E, V) dE. \quad (2.26)$$

Aquí, el fondo de la banda de conducción en el contacto de la izquierda es denotado por U_L y la distribución de Fermi en la izquierda está dada por:

$$f[E, \mu_L, T] = \frac{1}{1 + e^{\frac{E - \mu_L}{k_B T}}}. \quad (2.27)$$

La ecuación para la corriente debida a los electrones de la derecha puede ser obtenida de forma similar

$$I_R = -\frac{2e}{h} \int_{U_R}^{\infty} f[E, \mu_R, T] t(E, V) dE, \quad (2.28)$$

donde el signo negativo se debe a que I_L e I_R fluyen en direcciones diferentes.

Se puede utilizar un límite de integración común para las corrientes de la izquierda y la derecha, si el transporte solo ocurre a energías más altas que el fondo de las bandas de la izquierda y la derecha, o si el más grande de U_L y U_R es utilizado. Entonces la corriente total es

$$I(V) = I_L + I_R = \frac{2e}{h} \int_{U_0}^{\infty} t(E, V) \{f[E, \mu_L, T] - f[E, \mu_R, T]\} dE. \quad (2.29)$$

Esta es la ecuación de Landauer, la cual utilizaremos para modelar el transporte a través de los ratchets cuánticos. En la literatura puede verse que hay una gran concordancia entre los resultados obtenidos con el formalismo de Landauer y la parte experimental [45, 46].

CAPÍTULO 3

MODELO Y MÉTODO

3.1. MODELO

Como se explicó en el primer capítulo, el objetivo de este trabajo de tesis es la caracterización de las curvas de corriente total contra voltaje en los ratchets cuánticos, a los cuales modelaremos mediante distintos potenciales asimétricos. Tomando en cuenta lo anterior, es necesario entonces considerar un modelo que nos permita calcular las curvas de corriente numéricamente.

El modelo que usaremos utiliza el formalismo de Landauer para el caso de transporte balístico unidimensional introducido en el capítulo anterior. El objetivo de este modelo es comprender el proceso físico que da como resultado la inversión en la dirección de la corriente total observada experimentalmente en los ratchets cuánticos oscilados. Este modelo es similar al utilizado por Linke *et al.* [34].

En el primer capítulo se explicó también que un ratchet oscilado es un potencial asimétrico que es inclinado periódica y simétricamente. Se explicó también que se produce una corriente neta, dependiendo de como la altura de la barrera de potencial asimétrica difiere cuando es inclinada hacia arriba, de cuando la barrera es inclinada hacia abajo. La diferencia principal entre un ratchet oscilado clásico y un ratchet oscilado en el régimen cuántico, es que la probabilidad de transmisión a través de la barrera depende no solo de cómo cambia la altura de

la barrera de potencial, sino también de la forma que esta toma dependiendo del signo del voltaje aplicado (en el caso de los ratchets cuánticos). Esto puede explicarse de la siguiente forma: los electrones que posean energías más bajas que la altura de la barrera, pueden ser transmitidos por tunelamiento con una probabilidad que depende de forma sensible de la altura y el ancho de la barrera, y los electrones con una energía mayor que la altura de la barrera pueden ser reflejados con una probabilidad que depende mucho de que tan “aguda” y de que tan abrupta es la barrera. Así pues, tomando en cuenta lo anterior, podemos deducir que existirá la posibilidad de que la corriente invierta su dirección dependiendo de como las probabilidades de tunelamiento o reflexión cambien en función de algunas variables como son: la altura de la barrera de potencial, la magnitud de la oscilación, y la temperatura.

La mejor forma de entender que pasará para un potencial asimétrico en particular, es tomar la diferencia entre las probabilidades de transmisión t para ambos signos del voltaje aplicado. Esta diferencia de probabilidades de transmisión la denotaremos por

$$\Delta t(E) = [t(E, V) - t(E, -V)]. \quad (3.1)$$

En la Fig. 3.1 se muestran las probabilidades de transmisión en función de la energía para las dos direcciones de inclinación de un potencial asimétrico dado, se muestran también la diferencia de estas probabilidades calculada mediante la ecuación anterior y la que en adelante llamaremos *ventana de Fermi* (Δf ver Ecs. 3.3 y 3.4). Puede verse como $\Delta t(E)$ cambia de signo en función de la energía, lo cual nos dice que para algunas energías es más probable que los electrones sean transmitidos de izquierda a derecha, mientras que para otras energías es más probable que sean transmitidos en dirección contraria. Esto significa que la dirección de la corriente dependerá del número relativo de electrones que fluyan en cada dirección. Por lo tanto, la inversión en la dirección de la corriente ocurrirá dependiendo de como el número relativo de electrones que fluyen en cada dirección, sea alterado por el cambio en la altura de la barrera, la temperatura o

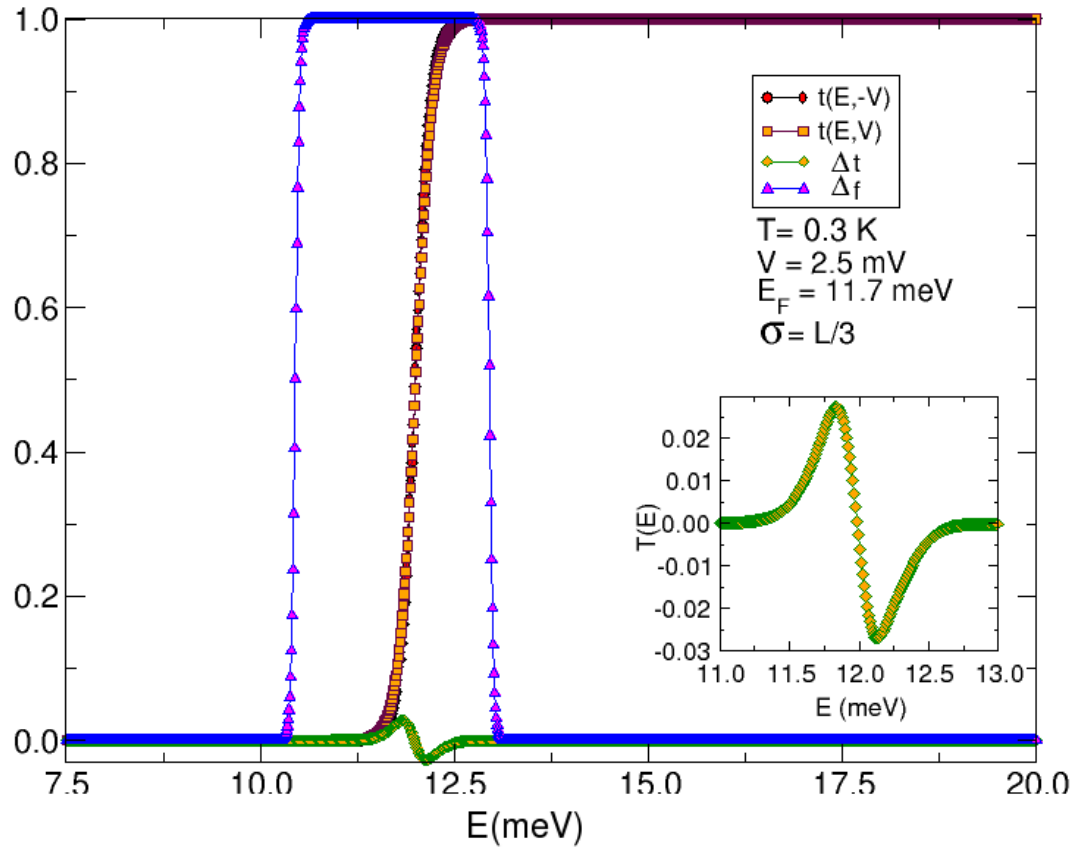


Figura 3.1: Coeficientes de transmisión para ambos signos de voltaje aplicado. Se muestra también la diferencia entre estos dos coeficientes, nótese como para ciertas energías la diferencia es positiva y para otras energías es negativa.

el voltaje aplicado.

La corriente neta en los ratchets cuánticos estará dada por el promedio de las corrientes para cada signo del voltaje aplicado; es decir,

$$I_t \equiv \frac{1}{2} [I(V) + I(-V)], \quad (3.2)$$

donde las corrientes correspondientes a cada signo de voltaje aplicado ($I(V)$ e $I(-V)$) están dadas por la ecuación de Landauer (Ec. 2.29), que se introdujo en el capítulo anterior.

Entonces la corriente neta está dada por

$$I_t = \frac{e}{h} \int_{U_0}^{\infty} \Delta t(E) \Delta f(E, |V|) dE, \quad (3.3)$$

donde

$$\Delta f(E, |V|) = \frac{1}{\left[1 + \exp\left(\frac{E - \mu_L}{k_B T}\right)\right]} - \frac{1}{\left[1 + \exp\left(\frac{E - \mu_R}{k_B T}\right)\right]}, \quad (3.4)$$

es lo que hemos llamado *ventana de Fermi*.

Puede verse que $\Delta f(E, |V|)$ nos proporciona la distribución de los estados que hacen una contribución neta a la corriente cuando un voltaje V es aplicado. Por cuestiones prácticas se ha elegido que la mitad del voltaje sea aplicado en la izquierda y la otra mitad a la derecha, de tal forma que la ventana de Fermi esté siempre centrada en la energía de Fermi E_F . Por lo tanto, al cambiar la energía de Fermi estaremos cambiando la posición de la ventana.

3.2. MÉTODO NUMÉRICO

Una vez que hemos planteado el modelo que utilizaremos para calcular la corriente en los ratchets cuánticos, podemos introducir el método numérico que seguiremos. La fórmula de Landauer nos permite calcular la corriente, pero para ello necesitamos calcular $\Delta t(E)$.

Para modelar los ratchets cuánticos y calcular $t(E)$ para cada signo del voltaje aplicado, se deben de considerar tres pasos:

- Construir el potencial asimétrico que servirá como modelo para representar al ratchet.
- Asumir en que forma el voltaje aplicado se distribuye a lo largo del potencial (caída del voltaje V_d), es decir, como el voltaje aplicado afectará la forma del potencial asimétrico.

- Calcular $t(E)$ para cada signo de voltaje aplicado, utilizando el potencial y V_d propuestos. Una vez completado este paso podemos calcular $\Delta t(E)$ y por lo tanto I_t en función de T , E_F y del voltaje aplicado.

3.3. MÉTODO PARA CALCULAR $t(E)$

En la sección anterior, hemos introducido el método que utilizaremos para calcular la corriente a través de los ratchets cuánticos. La corriente está directamente relacionada con el coeficiente de transmisión correspondiente a las barreras de potencial. Por lo tanto, es necesario elegir un método que nos permita calcular el coeficiente de transmisión para cualquier forma de barrera de potencial. El método que hemos elegido, se basa en aproximar las barreras de potencial mediante barreras con forma rectangular suficientemente delgadas, mediante las cuales podemos calcular $t(E)$ del potencial total. En la Fig. 3.2 puede observarse como una barrera asimétrica cualquiera, es aproximada mediante una secuencia de barreras rectangulares.

Mediante la aproximación por barreras rectangulares, el potencial y sus respectivas funciones de onda pueden escribirse como

$$V(x) = \begin{cases} V_1, \\ V_2, \\ V_3, \\ \dots, \\ V_N, \\ V_{N+1} \end{cases} \quad \psi(x) = \begin{cases} a_1 e^{ik_1 x} + b_1 e^{-ik_1 x}, & -\infty < x \leq x_1 \\ a_2 e^{ik_2 x} + b_2 e^{-ik_2 x}, & x_1 < x \leq x_2 \\ a_3 e^{ik_3 x} + b_3 e^{-ik_3 x}, & x_2 < x \leq x_3 \\ \dots & \dots \\ a_N e^{ik_N x} + b_N e^{-ik_N x}, & x_{N-1} < x \leq x_N \\ a_{N+1} e^{ik_{N+1} x} + b_{N+1} e^{-ik_{N+1} x}, & x_N < x \leq x_{N+1} \end{cases}, \quad (3.5)$$

donde $k_j = \sqrt{(2m^*/\hbar^2)(E - V_j)}$ y los coeficientes a_i y b_i representan la parte reflejada y transmitida respectivamente de la función de onda en cada barrera.

Ahora, consideremos primero el caso $E > V_1, V_{N+1}$ de tal forma que k_1 y k_{N+1} son vectores reales y $\psi(x)$ describe funciones de onda moviéndose fuera

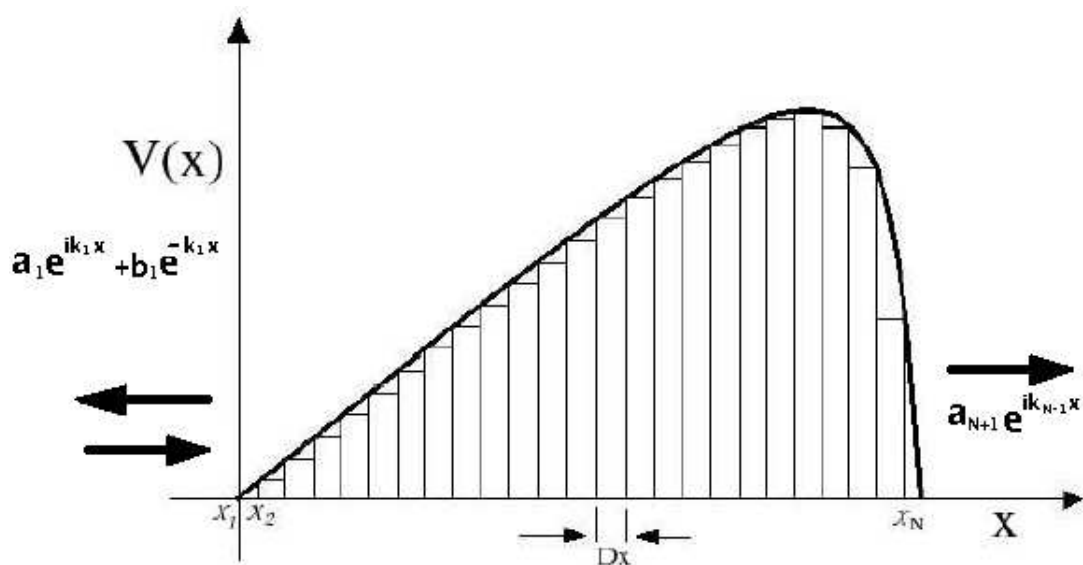


Figura 3.2: Esquema que muestra como se aproxima una barrera de potencial cualquiera mediante una secuencia de barreras rectangulares, el ancho de las barreras ha sido exagerado para mayor claridad.

del potencial. Lo que deseamos es determinar las soluciones de la ecuación de Schrödinger, es decir, funciones de onda $\psi(x)$ bajo la condición $b_{N+1} = 0$; (i.e., soluciones que solo tengan ondas $a_{N+1}e^{ik_{N+1}x}$ viajando hacia la derecha). En la izquierda tendremos la onda $a_1e^{ik_1x} + b_1e^{-ik_1x}$, es decir, una superposición de una onda incidente y una reflejada. Lo que nos interesa es calcular que tanto de la onda incidente es reflejada en el lado izquierdo (coeficiente b_1) y que tanto es transmitido hacia la derecha (coeficiente a_{N+1}).

La función de onda $\psi(x)$ y su derivada $\psi'(x)$ deben ser continuas en el punto $x = x_1$. Esto nos da dos ecuaciones

$$a_1e^{ik_1x_1} + b_1e^{-ik_1x_1} = a_2e^{ik_2x_1} + b_2e^{-ik_2x_1}, \quad (3.6)$$

$$a_1e^{ik_1x_1} - b_1e^{-ik_1x_1} = (k_2/k_1)(a_2e^{ik_2x_1} - b_2e^{-ik_2x_1}), \quad (3.7)$$

o equivalentemente

$$a_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{k_2}{k_1} \right) e^{i(k_2-k_1)x_1} a_2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{k_2}{k_1} \right) e^{-i(k_2+k_1)x_1} b_2, \quad (3.8)$$

$$b_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{k_2}{k_1} \right) e^{i(k_2+k_1)x_1} a_2 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{k_2}{k_1} \right) e^{-i(k_2-k_1)x_1} b_2, \quad (3.9)$$

lo cual puede ser escrito de forma matricial como

$$\mathbf{g}_1 = t^1 \mathbf{g}_2, \quad \mathbf{g}_i = (a_i b_i), \quad i = 1, 2, \quad (3.10)$$

donde

$$t^1 = \frac{1}{2k_1} \begin{pmatrix} (k_1 + k_2)e^{i(k_2-k_1)x_1} & (k_1 - k_2)e^{-i(k_2+k_1)x_1} \\ (k_1 - k_2)e^{i(k_2+k_1)x_1} & (k_1 + k_2)e^{-i(k_2-k_1)x_1} \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

De la misma forma, podemos obtener la matriz t^2 para $x = x_2$ y entonces podemos ver que

$$\mathbf{g}_2 = t^2 \mathbf{g}_3 \rightsquigarrow \mathbf{g}_1 = t^1 \mathbf{g}_2 = t^1 t^2 \mathbf{g}_3. \quad (3.12)$$

Haciendo esto para cada partición x_i , $i = 1, \dots, N$ de la barrera, obtenemos la matriz de transferencia total M que conecta la función de onda del lado izquierdo del potencial, con la función de onda del lado derecho; es decir

$$\mathbf{g}_1 = M \mathbf{g}_{N+1}, \quad M = t^1 t^2 \dots t^N. \quad (3.13)$$

Por último, definimos el coeficiente de transmisión t como la razón de la densidad de corriente incidente con la densidad de corriente fluyendo hacia la derecha, esto es

$$t := \frac{k_{N+1}}{k_1} \left| \frac{a_{N+1}}{a_1} \right|^2. \quad (3.14)$$

De la relación

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{N+1} \\ b_{N+1} \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

y bajo la condición $b_{N+1} = 0$, llegamos a que el coeficiente de transmisión está dado por la expresión

$$t := \frac{k_{N+1}}{k_1} \frac{1}{|M_{11}|^2}. \quad (3.16)$$

Así pues, para calcular el coeficiente de transmisión de una barrera con forma arbitraria aproximada mediante barreras rectangulares, solo es necesario conocer la matriz de transferencia total M . El hecho de que $M = t^1 t^2 \dots t^N$ es solo el producto de N matrices individuales de 2×2 , hace que esta aproximación sea una herramienta muy conveniente desde el punto de vista computacional.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS

En este capítulo discutiremos los resultados obtenidos durante este trabajo de tesis. Empezaremos por discutir el modelo más sencillo que podemos utilizar para representar un potencial asimétrico (ratchet) y discutiremos el caso de barreras individuales. Las conclusiones que cada modelo y parámetros utilizados proporcionen, serán tomadas en cuenta en la discusión del modelo que le siga, de tal manera que al final de este capítulo tengamos un conjunto de conclusiones que nos proporcionen un buen entendimiento del problema.

Como inicio, elegiremos V_d de tal forma que la altura del ratchet no cambie, es decir, que independientemente del signo o de la magnitud del voltaje aplicado, la altura del potencial debe mantenerse constante. La justificación de esta elección es la siguiente: Supongamos que tenemos un potencial asimétrico y que le aplicamos una diferencia de potencial en sus extremos ($\pm V$). Si la forma en que el voltaje se distribuye a lo largo del ratchet es tal que la altura de la barrera correspondiente a un signo de voltaje es diferente a la del otro signo, entonces la corriente será más grande para un signo del voltaje, lo que hará que el observar inversión en la corriente sea prácticamente imposible. La Fig. 4.1(a) muestra el efecto de un V_d lineal sobre una barrera asimétrica, nótese como la alturas de las barreras correspondientes a cada signo del voltaje se separan, esto provoca que $\Delta t(E)$ sea solamente positivo y por lo tanto la corriente total fluirá en una sola dirección. Para denotar al potencial asimétrico utilizaremos el símbolo V_x .

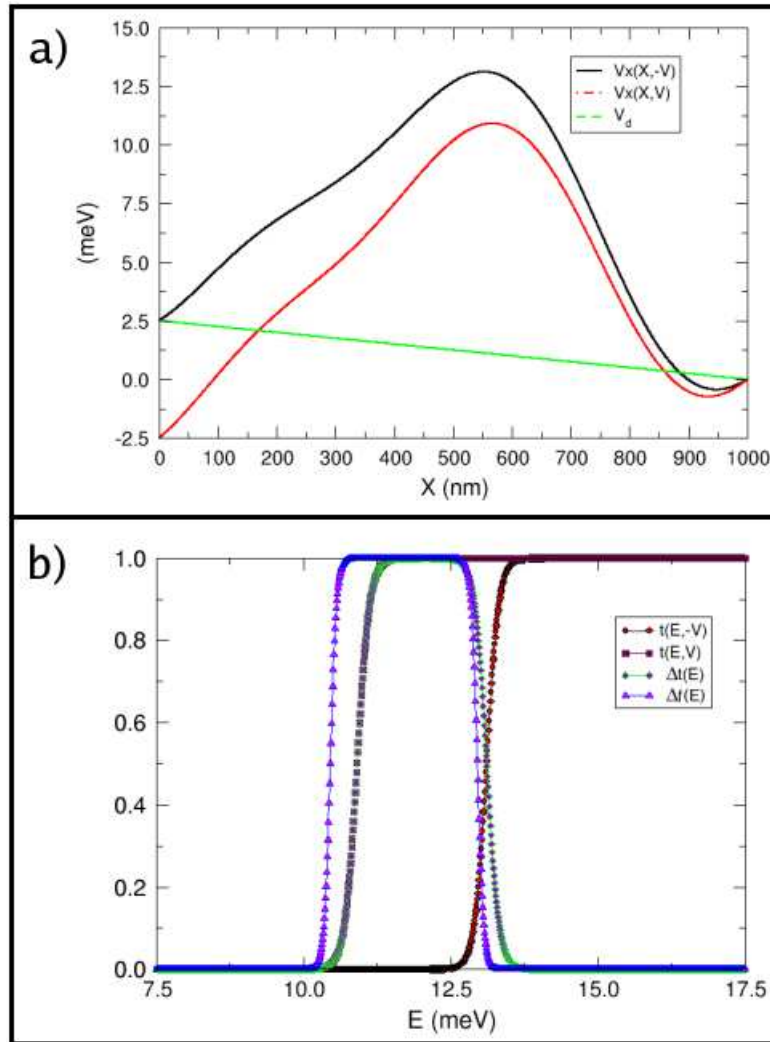


Figura 4.1: (a) Barrera de potencial (ratchet) para ambos signos del voltaje aplicado (V y $-V$). Las alturas de las barreras difieren debido a que se ha supuesto una forma lineal para V_d . Para mayor claridad se ha aplicado un voltaje grande y se ha mantenido uno de los extremos de la barrera de potencial en cero. (b) Coeficientes de transmisión $t(E)$ correspondientes a las barreras de la parte (a). Se muestra además $\Delta t(E)$ y la ventana de Fermi $\Delta f(E)$. Nótese que $\Delta t(E)$ es positivo en todo el intervalo de energías dentro de la ventana de Fermi, por lo tanto se deduce que la corriente fluye en una sola dirección. Se utilizaron una energía de Fermi $E_F = 11.7$ meV y una altura original del potencial de 12.0 meV.

Además de que la altura de la barrera se mantenga constante, supondremos que la forma en que se distribuye el voltaje aplicado a lo largo de la barrera será el mismo para ambos signos de V . Estas suposiciones fueron hechas inicialmente por Linke *et al.* [34]. Sin embargo, nosotros solo las utilizaremos como inicio.

4.1. BARRERA TRIANGULAR

El caso más sencillo de un potencial asimétrico, lo podemos representar mediante una barrera triangular (potencial diente de sierra). Por este motivo hemos elegido este potencial como nuestro primer modelo. Una de las simplificaciones que tiene este modelo de potencial es que su altura se mantiene constante cuando aplicamos un V_d lineal, es decir, que V_d solo afectará su forma pero no su altura. Este es un modelo ideal para comenzar. La Fig. 4.2(a) muestra el potencial triangular bajo la acción de ambos signos del voltaje aplicado y donde como comentamos se ha utilizado un V_d lineal a lo largo de la barrera. Utilizando este modelo de potencial, no se encontró inversión en $\Delta t(E)$ para ninguno de los voltajes analizados. En la Fig. 4.2(b) pueden observarse los coeficientes de transmisión, así como su diferencia y la ventana de Fermi para un valor específico del voltaje aplicado. $\Delta t(E)$ siempre es negativo y tiende a cero cuando los coeficientes de transmisión tienden ambos a uno.

La razón de que no haya inversión en $\Delta t(E)$ se debe a que el cambio en la forma de la barrera provocado por la aplicación del voltaje no es significativo. Como resultado, los coeficientes de transmisión correspondientes a cada signo del voltaje son prácticamente idénticos y solo están desfasados por un pequeño intervalo de energías. Esto puede observarse en la Fig. 4.2.

4.1.1. UNA CAÍDA DE VOLTAJE $V_d \propto x^2$

Ahora, modificaremos la forma en que el voltaje aplicado deforma al potencial, de tal manera que el cambio de la barrera sea más significativo. Hemos elegido utilizar una función cuadrática para representar a V_d ($V_d \propto x^2$). Con esta elección

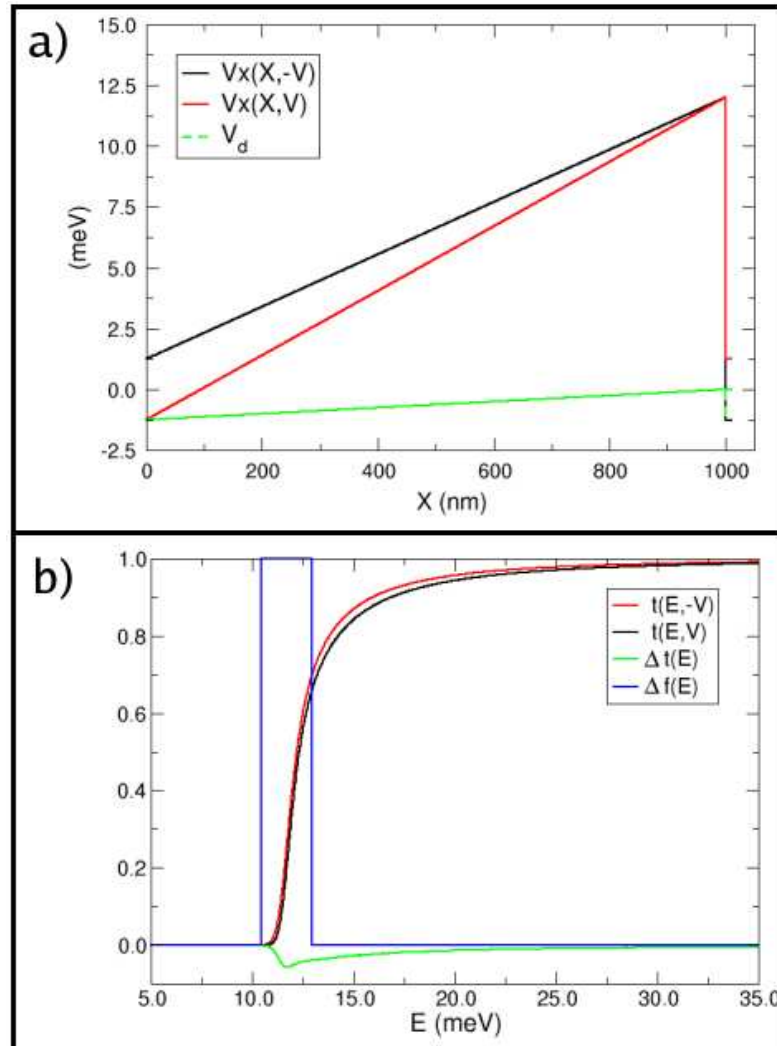


Figura 4.2: (a) Barrera triangular (potencial diente de sierra). Este es el modelo más sencillo para representar un ratchet cuántico. Se ha supuesto un drop lineal aprovechando que bajo esta condición el potencial mantiene su altura constante. La altura del potencial es 12.0 meV y el voltaje aplicado es 2.5 mV. (b) Coeficientes de transmisión correspondientes a cada signo del voltaje aplicado. Se muestran además $\Delta t(E)$ y la ventana de Fermi. $\Delta t(E)$ después de alcanzar un mínimo tiende a cero conforme la energía aumenta.

de V_d , se espera que la deformación de la barrera provocada por la aplicación del voltaje debe ser mayor. Sin embargo, encontramos que aún bajo esta condición $\Delta t(E)$ no cambia de signo para ningún voltaje aplicado. El efecto de aplicar esta forma de V_d a la barrera triangular es observado en la Fig. 4.3(a). En general, para provocar una mayor variación de las barreras se puede utilizar $V_d \propto x^n$. Así, entre mayor sea n , la diferencia entre las barreras para cada signo del voltaje aplicado será mayor. Sin embargo, como puede observarse en la Fig. 4.3(b), independientemente del valor que tome n , no es posible obtener inversión en $\Delta t(E)$ cuando un V_d con esta forma es aplicado a la barrera triangular. Este hecho nos proporciona una importante conclusión, pues nos dice que la sola asimetría del potencial no es suficiente para provocar que $\Delta t(E)$ y posiblemente la corriente inviertan su dirección.

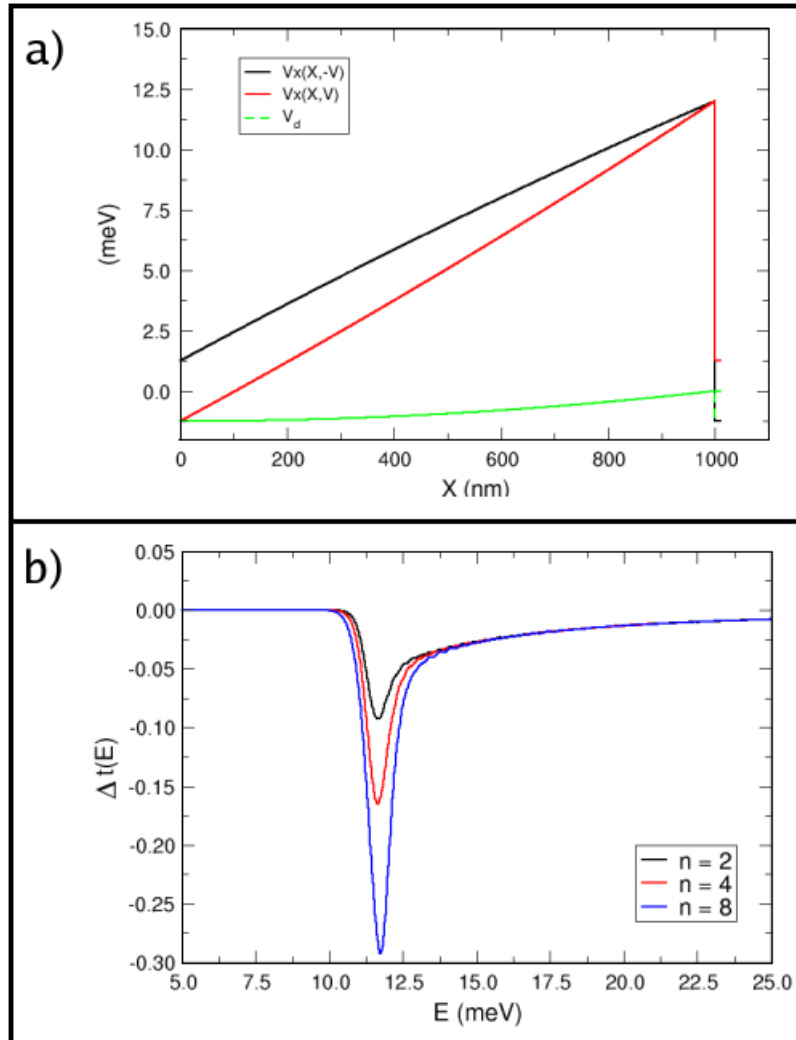


Figura 4.3: (a) Barrera triangular bajo la acción de los voltajes V y $-V$. La forma de V_d está dada por una función cuadrática, la cual provoca una deformación más significativa de la barrera que haciendo uso de una función lineal. (b) De la misma forma que una función cuadrática se puede suponer a V_d proporcional a una función del tipo $f(x) = x^n$, donde n es entero. Como resultado puede notarse que un cambio en el valor de n solo provoca un aumento en la magnitud de $\Delta t(E)$ pero no un cambio en su dirección.

4.2. UNA BARRERA DE POTENCIAL SUAVE

Ahora, presentaremos los resultados obtenidos con otro modelo de potencial asimétrico. La función con la que construimos este potencial está dada por una combinación lineal de una función seno y una función coseno. La ecuación que utilizamos es

$$f(x) = C \cdot [\cos(2\pi/L) + \frac{1}{4} \sin(4\pi/L)] , \quad (4.1)$$

donde L es el ancho de la barrera y C es una constante que nos permite darle al potencial la altura que deseemos. En la Fig. 4.4 se puede observar una representación gráfica de la Ec. 4.1 para el caso de tres periodos de la función.

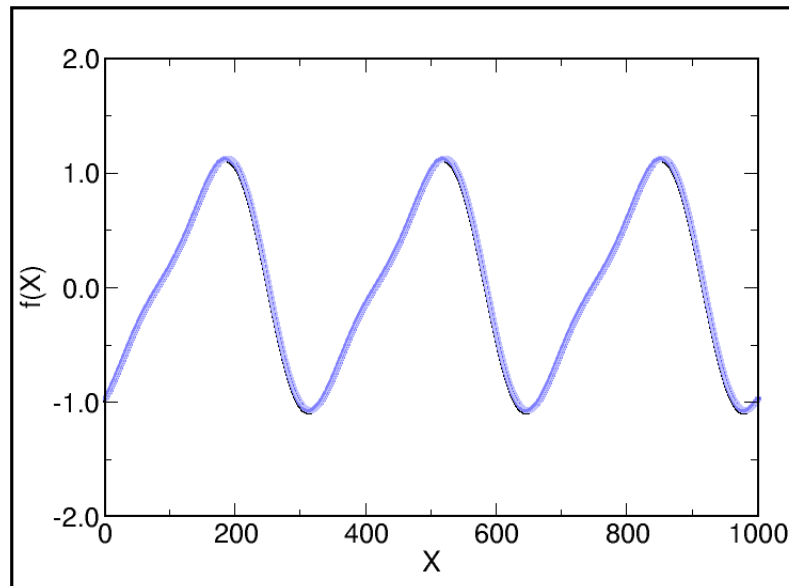


Figura 4.4: Representación gráfica de la Ec. 4.1.

La primer elección que hemos hecho para representar a V_d es tal que este es proporcional a la barrera de potencial que utilizaremos. Un caso análogo es el de la barrera triangular bajo la acción de un V_d lineal.

En la Fig. 4.5(a) podemos observar el resultado de aplicar un voltaje a la barrera dada por la Ec. 4.1, donde V_d está dado por la misma función que la barrera

de potencial. V_d a sido aplicado de tal forma que dependiendo del signo del voltaje, este es sumado o restado hasta el punto donde se encuentra el máximo de su función, mientras que de su máximo hacia adelante se realiza la operación contraria. Al aplicar V_d en esta forma logramos que en un extremo del ratchet se tome en cuenta la mitad del voltaje aplicado y en el otro extremo se tome en cuenta la otra mitad. Así la ventana de Fermi $\Delta f(E)$ estará centrada en E_F .

Utilizando esta forma del potencial es posible obtener una pequeña inversión de $\Delta t(E)$ con lo que podríamos esperar que la corriente cambiara de signo. Sin embargo, la magnitud de la inversión de $\Delta t(E)$ obtenida es tan pequeña (ver Fig. 4.5(b)) que no es suficiente para provocar que la corriente se invierta. En la Fig.4.6 se muestra una gráfica de superficie de la corriente contra voltaje como función de la energía de Fermi E_F , en esta gráfica puede notarse como la corriente solo fluye en una dirección o es nula antes y después de ciertos valores de E_F .

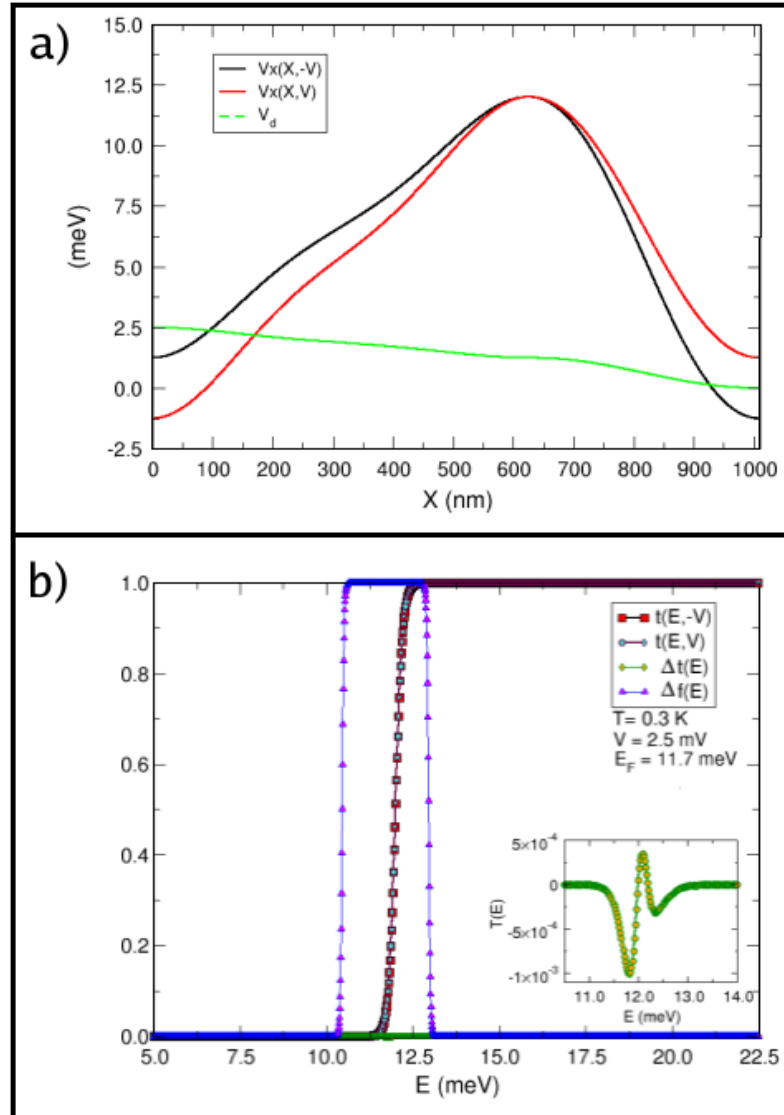


Figura 4.5: (a) Barrera de potencial construida mediante una combinación lineal de una función seno y una función coseno. Se muestra también la forma de V_d que se eligió. (b) Coeficientes de transmisión y $\Delta t(E)$ para el potencial de (a). $\Delta t(E)$ cambia de signo como función de la energía (inserción).

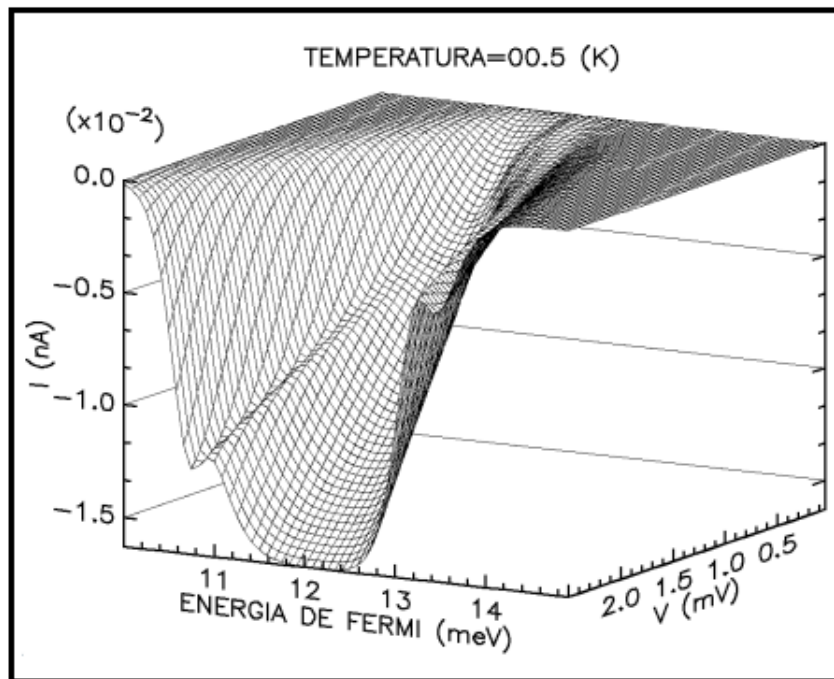


Figura 4.6: Corriente contra voltaje como función de la energía de Fermi E_F para la barrera de potencial de la Fig. 4.5. La magnitud de la inversión mostrada por $\Delta t(E)$ (Fig. 4.5(b)) no es suficiente para que ocurra una inversión en la corriente.

La magnitud de $\Delta t(E)$ es muy pequeña debido a que el potencial utilizado varía de forma muy suave, por lo que los coeficientes de transmisión correspondientes a cada signo del voltaje son muy parecidos. Sin embargo, podemos modificar el potencial dado por la Ec. 4.1 si multiplicamos esta ecuación por una función exponencial. El potencial que resulta mediante esta multiplicación es más abrupto (ver Fig. 4.7). En la Fig. 4.8 se muestra una gráfica de superficie de $I-V$ como función de E_F . La corriente invierte su dirección como función de E_F así como de V y T

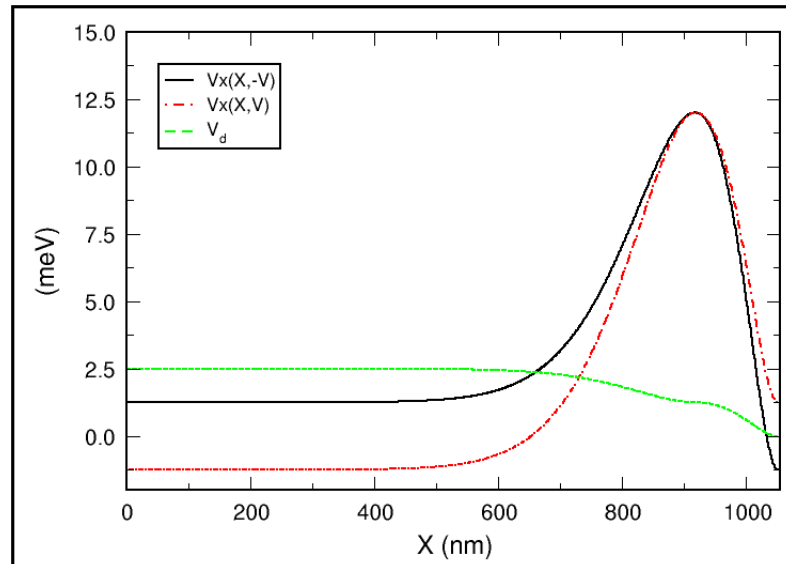


Figura 4.7: Barrera de potencial resultado de multiplicar la Ec. 4.1 por una función exponencial. Esta barrera es más abrupta que la construida a partir de la Ec. 4.1, por lo tanto, provoca que para energías cercanas a la altura de la barrera ocurran más reflexiones. El desfase que ocurre entre los dos coeficientes de transmisión y las oscilaciones de estos para energías cercanas a la altura de la barrera, provocan que $\Delta t(E)$ cambie de signo y que su magnitud sea suficiente para que ocurra inversión de corriente.

Lo que esto nos dice es que si la barrera es más abrupta la magnitud de la inversión de $\Delta t(E)$ aumenta, esto es porque los coeficientes de transmisión correspondientes a barreras abruptas tienen un comportamiento oscilatorio para energías superiores a la altura de la barrera, mientras que las barreras cuya variación espacial es más suave poseen un coeficiente de transmisión que crece de forma monótona. Esto puede observarse en la Fig.4.9 donde se muestran

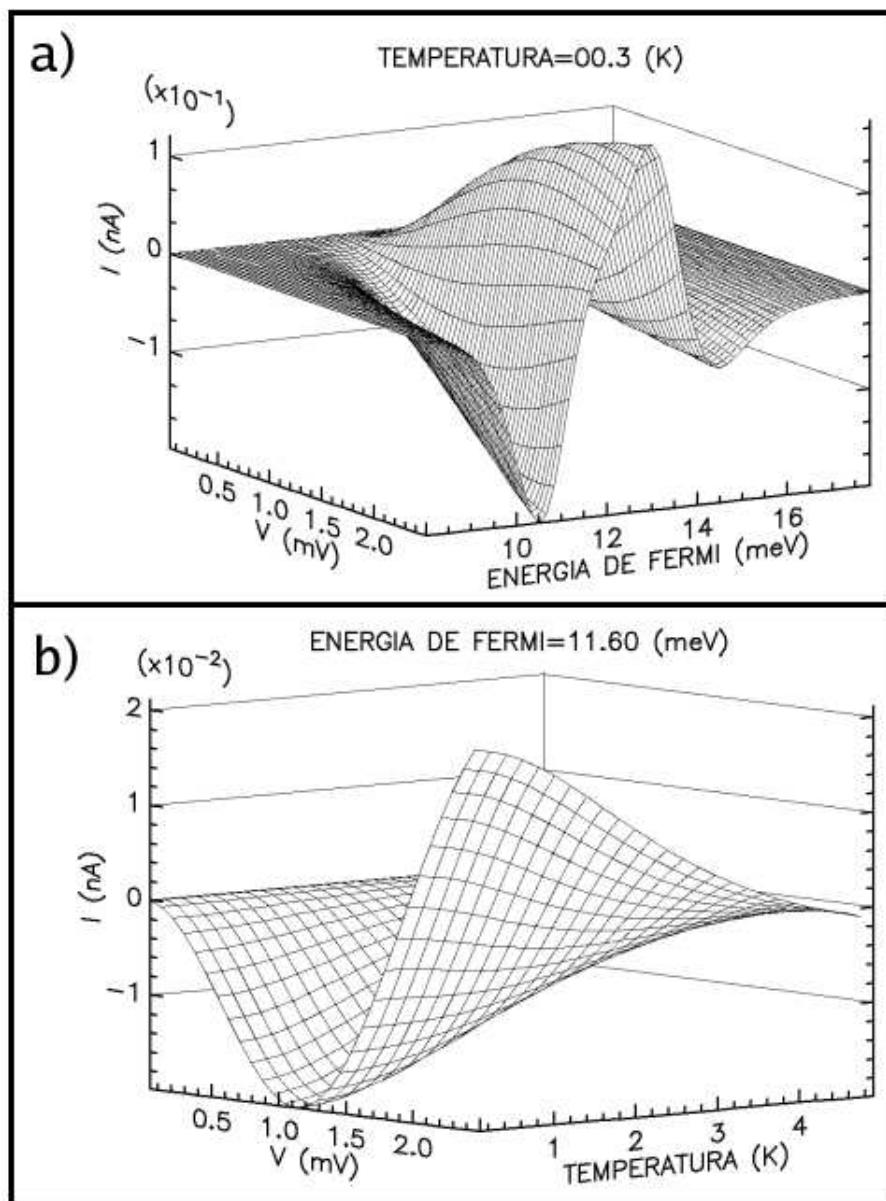


Figura 4.8: Gráficas de superficie I - V en función de la energía de Fermi para una temperatura fija (a) y en función de la temperatura para una energía de Fermi dada (b). En (a) la corriente invierte su dirección en más de una ocasión como función de E_F . En la parte (b) puede observarse como la corriente cambia de signo en función del voltaje aplicado. Además, por encima de $V = 2.0$ mV la corriente se invierte como función de la temperatura.

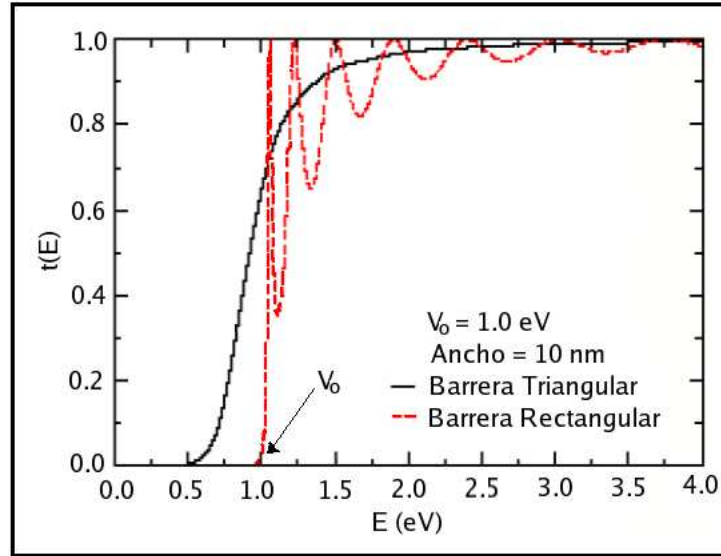


Figura 4.9: Coeficientes de transmisión característicos de barreras rectangulares (línea roja) y de barreras triangulares (línea negra). En el caso de las barreras rectangulares, $t(E)$ empieza a crecer para valores de energía cercanos a la altura de la barrera y muestra oscilaciones (resonancias) para energías superiores a esta. Las barreras triangulares producen menos reflexiones por lo que $t(E)$ no muestra oscilaciones.

los coeficientes de transmisión que corresponden a una barrera rectangular y a una barrera triangular. El coeficiente de transmisión correspondiente a la barrera rectangular deja de ser cero para energías cercanas a la altura de la barrera, y muestra oscilaciones para energías superiores a esta altura. Sin embargo, el coeficiente de transmisión correspondiente a la barrera triangular toma un valor diferente de cero para energías menores a la altura del potencial y crece de forma monótona hasta alcanzar su máximo.

Analizando la Fig. 4.9 podemos darnos cuenta de algo interesante. Supongamos que el voltaje aplicado deforma al potencial asimétrico de forma muy significativa, es decir, que para un signo del voltaje la deformación sea tal que la barrera es muy abrupta (como una barrera rectangular) y para el otro signo del voltaje la barrera toma una forma suave (como una barrera triangular). Entonces $\Delta t(E)$ estaría dado por la diferencia entre dos coeficientes de transmisión muy diferentes lo que resultaría en muchas inversiones de $\Delta t(E)$ y por lo tanto de

la corriente ya que estas inversiones serían de magnitud suficiente para que la corriente cambie de signo. Para que la barrera pudiera cambiar entre estas dos formas tendría que ocurrir que V_d fuera diferente para cada signo del voltaje al contrario de lo que hemos supuesto en un principio. Este caso lo trataremos más adelante.

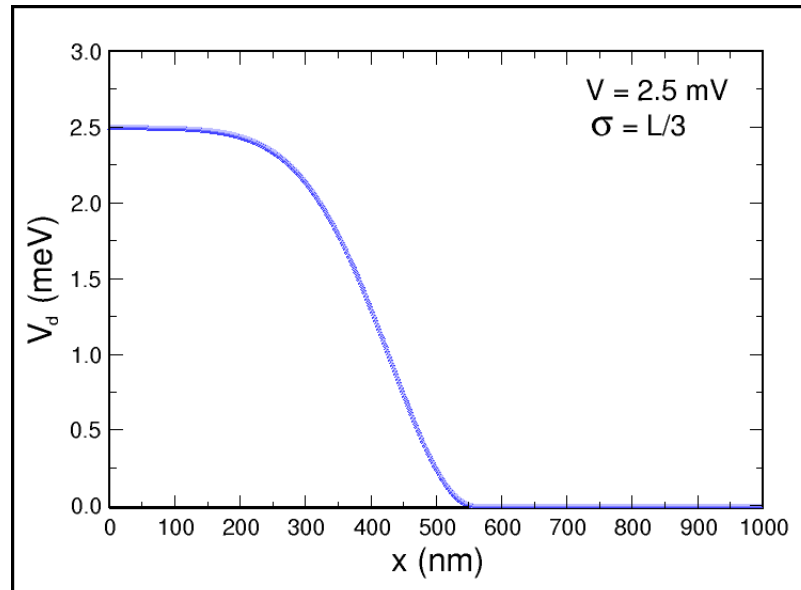


Figura 4.10: V_d construido a partir de una función gaussiana.

4.2.1. V_d TIPO GAUSIANA

Ahora para el mismo potencial dado por la Ec. 4.1 utilizaremos un V_d que construiremos utilizando una función gaussiana, la ecuación es

$$f(x) = -A \left[\frac{1}{\sqrt{\sigma}\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} \right], \quad (4.2)$$

donde A es una constante que nos permite que la altura de la gaussiana sea igual al potencial que aplicaremos, σ es el ancho de la gaussiana y x_0 es el punto sobre el que la gaussiana está centrada.

Construimos V_d utilizando la formula 4.2, x_0 lo elegimos de tal forma que el mínimo de la gaussiana coincida con el máximo de $V(x)$, σ puede ser elegido de diferente magnitud. El siguiente paso es restarle a la gaussiana su mínimo, de esta forma la base de la gaussiana queda a una altura V . Por último, a partir de su mínimo y hacia la derecha hacemos $f(x) = 0$.

Como podemos ver, la forma en que hemos construido a V_d seguirá manteniendo la altura de la barrera constante. La Fig. 4.10 muestra la forma que toma V_d . En la Fig. 4.11(a) además de V_d se puede observar el potencial resultante de

aplicar $\pm V$.

Con esta elección de V_d podemos observar en la Fig. 4.11(b) como los coeficientes de transmisión $t(E)$ para ambos signos del voltaje están muy cercanos y se cruzan dentro de la ventana de Fermi. Esto da lugar a que $\Delta t(E)$ invierta su signo, lo cual es un indicio de inversión de dirección en la corriente. En la Fig. 4.12 se muestran gráficas de superficie mostrando el cambio de signo de la corriente como función de varios parámetros.

Debido a que podemos variar el ancho de la gaussiana con que construimos a V_d podemos ver cual es el efecto de cambiar este parámetro. En la Fig. 4.13 hemos graficado V_d para varias σ diferentes. Conforme hacemos más delgada la gaussiana, esta tiene un efecto más fuerte sobre el potencial y la magnitud de $\Delta t(E)$ aumenta de forma significativa, lo mismo que ocurrirá con la corriente.

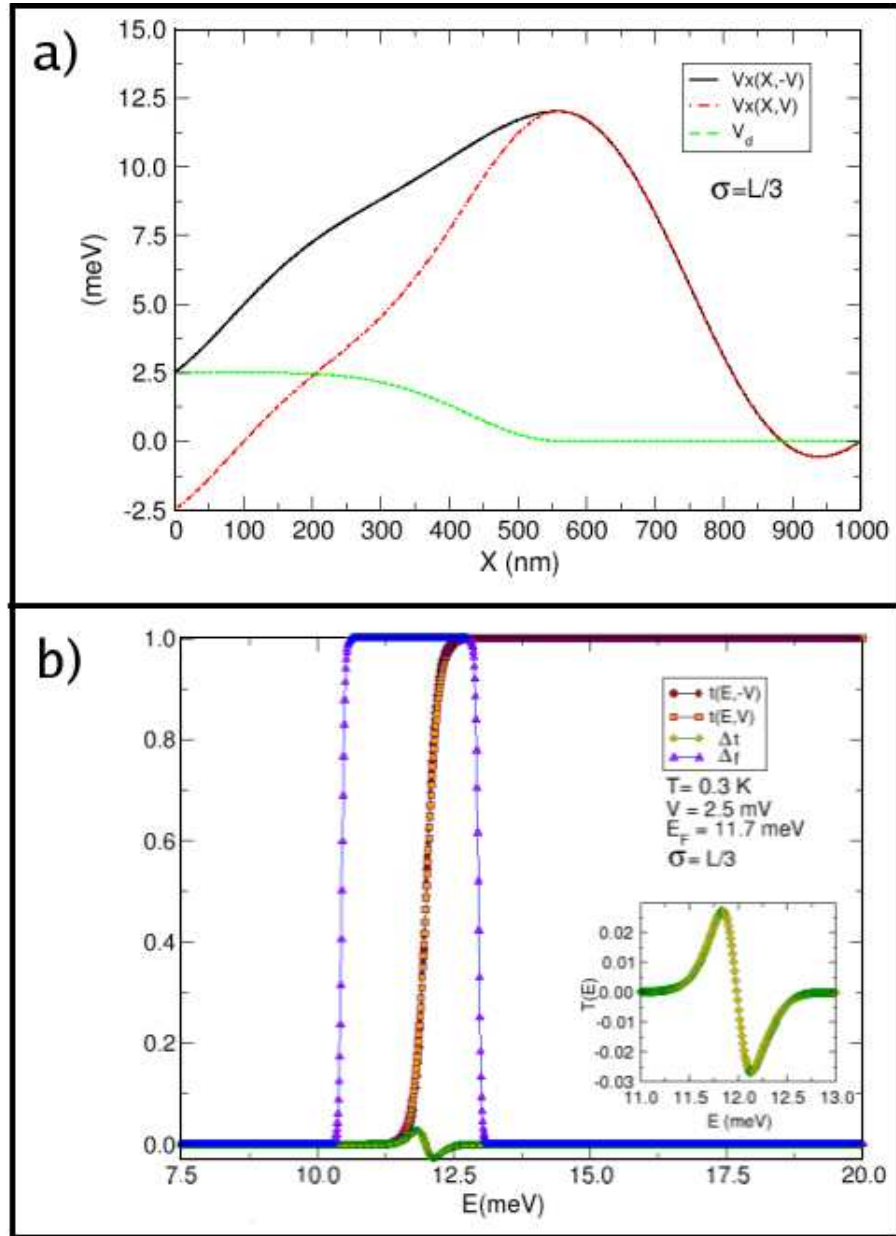


Figura 4.11: $V(x) \pm f(x)$, donde la altura del potencial permanece constante. Se muestran los coeficientes de transmisión para ambos casos V y $-V$, la diferencia entre los coeficientes $\Delta t(E)$ y la ventana de Fermi. $\Delta t(E)$ se invierte de signo (inserción) debido a que los coeficientes de transmisión están muy cercanos y se cruzan dentro de la ventana de Fermi.

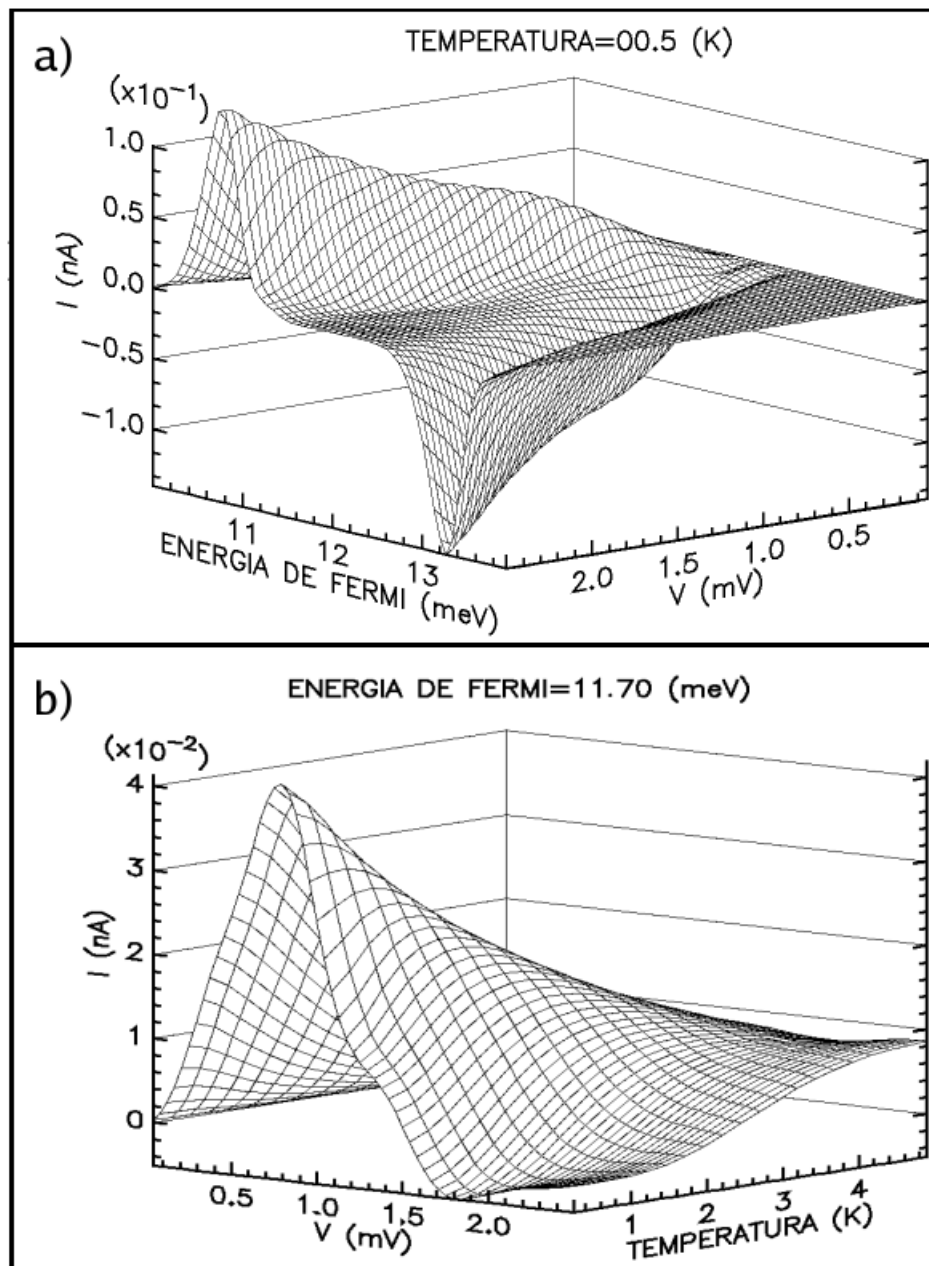


Figura 4.12: Curvas de corriente contra voltaje para el potencial mostrado en la Fig. 4.11. (a) I - V en función del nivel de Fermi. Se aprecia como la corriente cambia de signo al aumentar E_F . (b) I - V en función de la temperatura para $E_F = 11.7$ meV. Nótese como la corriente se hace negativa alrededor de $V=1.5$ mV y como a partir de este punto la curva muestra inversión en función de la temperatura. La altura del potencial es 12 meV.

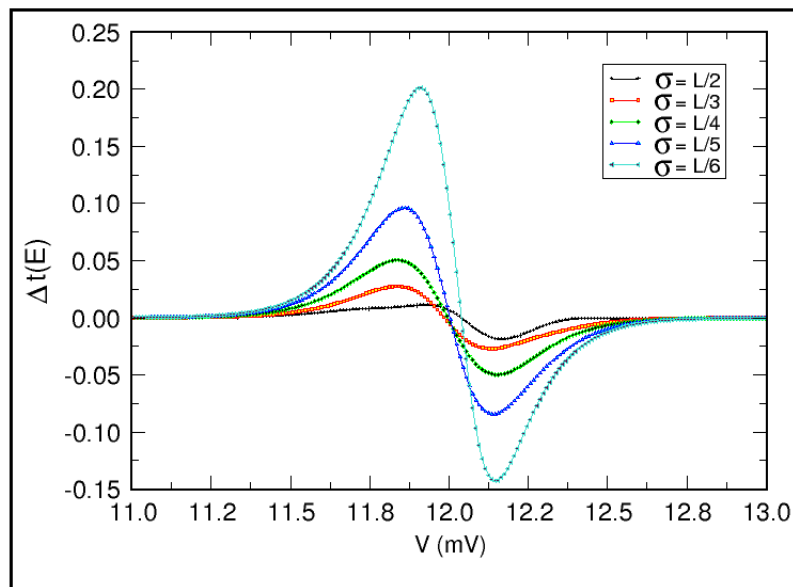


Figura 4.13: $\Delta t(E)$ para distintos valores del ancho de la gaussiana σ con la que construimos V_d . La magnitud de $\Delta t(E)$ aumenta de forma considerable cuando hacemos más delgada la gaussiana. variando el ancho de la gaussiana cambiamos el efecto de V_d sobre las barreras.

4.3. V_d ASIMÉTRICO

Hasta ahora hemos considerado que V_d es simétrico, es decir que es igual para ambos signos del voltaje. Sin embargo, haremos algunas observaciones. La forma exacta en que el voltaje deforma a la barrera puede ser obtenida de un cálculo autoconsistente, es decir, que es necesario resolver la ecuación de Schrödinger y la ecuación de Poisson de forma autoconsistente para el dispositivo (ratchet cuántico). Sin embargo, debido a que el tamaño de estos sistemas es muy grande, una solución de este tipo es muy costosa computacionalmente. Ahora, si resolviéramos la ecuación de Schrödinger para ambos signos del voltaje, podríamos ver que la distribución de carga que es obtenida de las funciones de onda, no es igual para ambos voltajes, sino que por la misma asimetría del sistema resultarían distribuciones distintas. Dado que es esta distribución la que genera el potencial dentro del dispositivo entonces se obtendría que V_d es diferente para cada signo del voltaje.

En base a esto ahora se mostraran algunos resultados obtenidos utilizando V_d diferentes para cada signo del voltaje. La Fig. 4.14(a) muestra el resultado de multiplicar a una barrera triangular por una función de la forma

$$f(x) = \exp(C \cdot x/L) , \quad (4.3)$$

donde L es el ancho del potencial y C permite que podamos multiplicar por funciones diferentes para cada signo del voltaje.

Entonces, la aplicación de un V_d diferente para cada signo del voltaje la logramos multiplicando a la barrera por la función descrita por la Ec. 4.3 con un C diferente para cada signo del voltaje y aplicando una caída lineal. La aplicación de este V_d al potencial triangular tiene como resultado la aparición de inversión en $\Delta t(E)$ como se muestra en la Fig. 4.14(b), donde puede notarse como para energías cercanas a 10 meV, $\Delta t(E)$ cambia de signo. El hecho de que $\Delta t(E)$ invierta su signo es el primer indicio de que ocurre una inversión de signo en la corriente total. Esto precisamente es lo que ocurre y el resultado puede observarse en la Fig. 4.15 donde se muestran gráficas de superficie de $I-V$ en función

de la energía de Fermi y la temperatura. La Fig. 4.16 muestra curvas de corriente contra voltaje para tres distintas temperaturas.

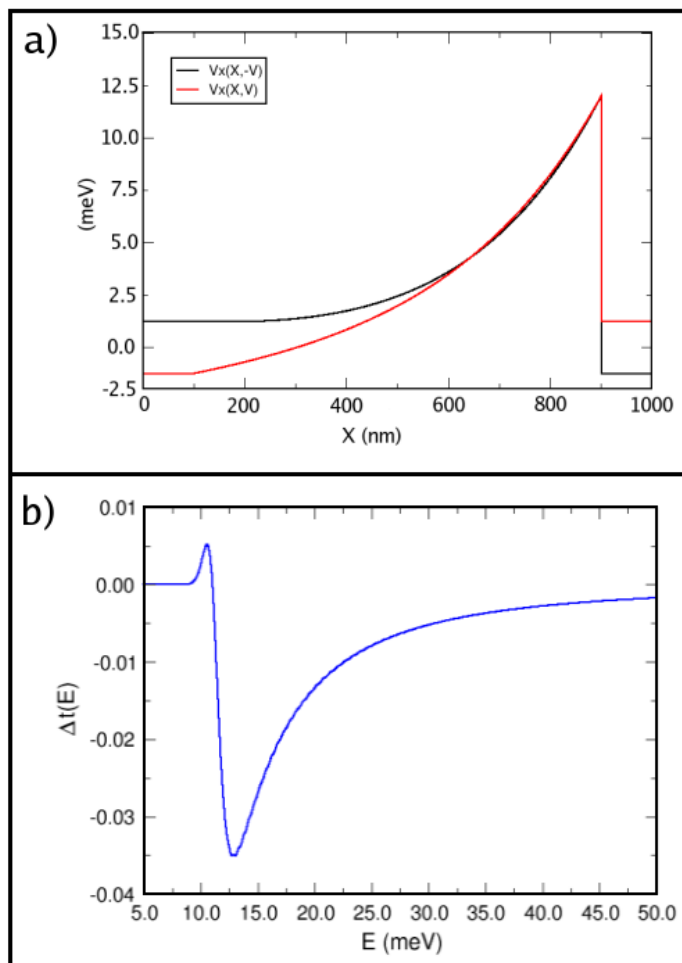


Figura 4.14: (a) En este caso, al potencial triangular es multiplicado por una función exponencial dada por la Ec. 4.3 utilizando un C distinto para cada signo del voltaje aplicado. Después se le aplica un V_d lineal. (b) Inversión de signo de $\Delta t(E)$ correspondiente al potencial de la parte (a). Esta inversión indica una posible inversión en la corriente.

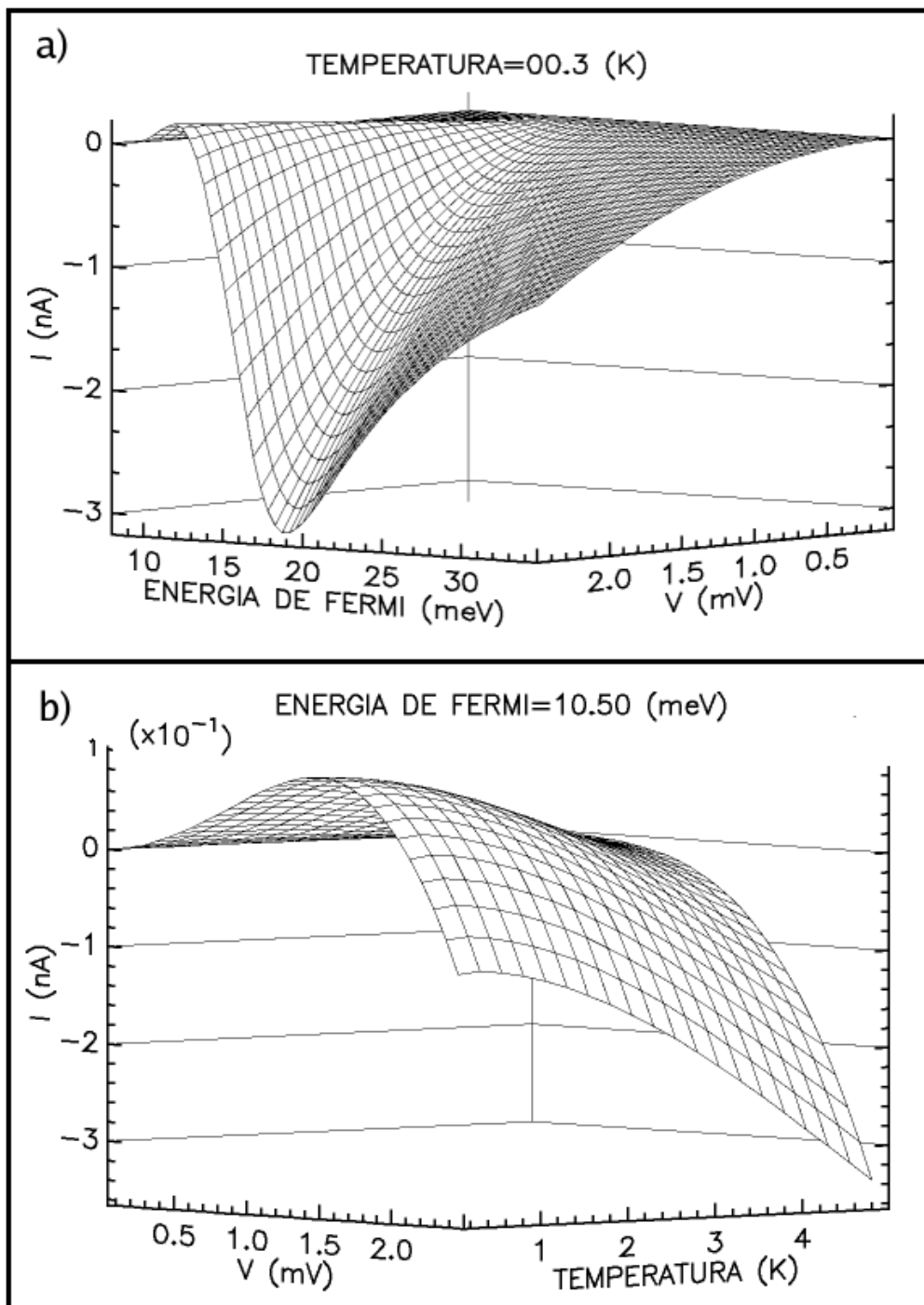


Figura 4.15: 1.41.0 Curvas I - V como función del nivel de Fermi para una temperatura $T = 0.3$ K (a), y como función de la temperatura para $E_F = 10.5$ meV (b). Nótese como la corriente cambia de signo como función de E_F (a) y como función de V (b). La corriente también cambia de signo en función de la temperatura.

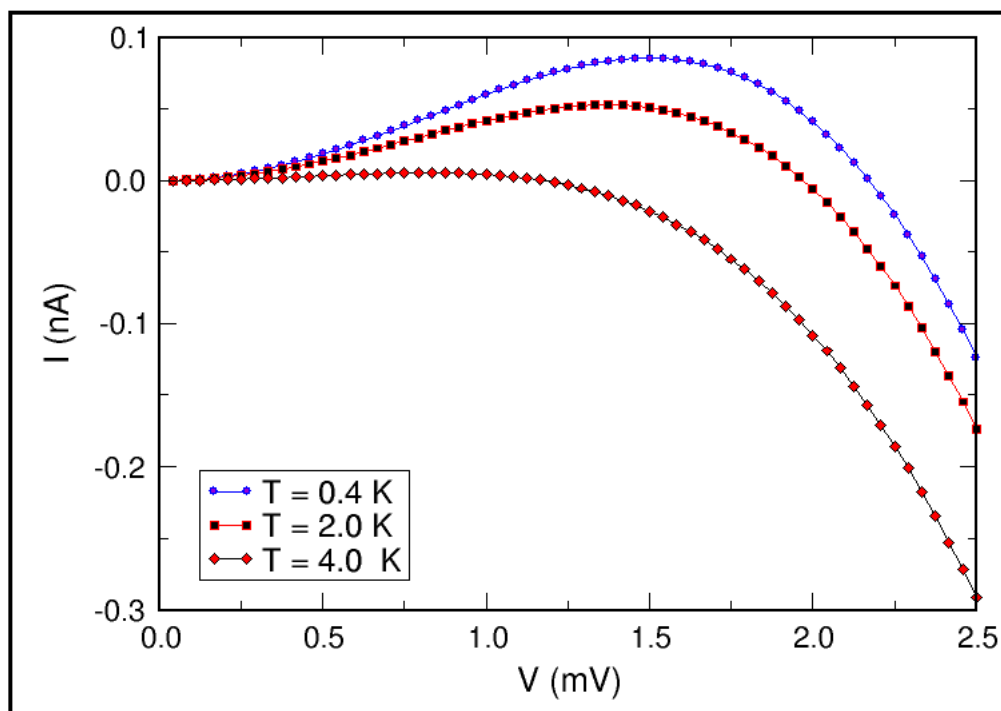


Figura 4.16: Curvas de corriente contra voltaje para tres distintas temperaturas. La inversión en la corriente desaparece como efecto de la temperatura.

Ahora mostraremos el resultado obtenido mediante un tratamiento similar al ejemplo anterior pero donde hemos truncado la barrera triangular con el objetivo de que esta sea más abrupta. La Fig. 4.17(a) muestra el potencial que hemos usado bajo el efecto del voltaje aplicado. En la parte (b) de la Fig. 4.17 se puede observar como $\Delta t(E)$ cambia de signo. Puede verse también que $\Delta t(E)$ oscila como efecto de haber truncado la barrera. Gráficas de superficie $I-V$ en función de la temperatura y energía de Fermi son presentadas en la Fig. 4.18

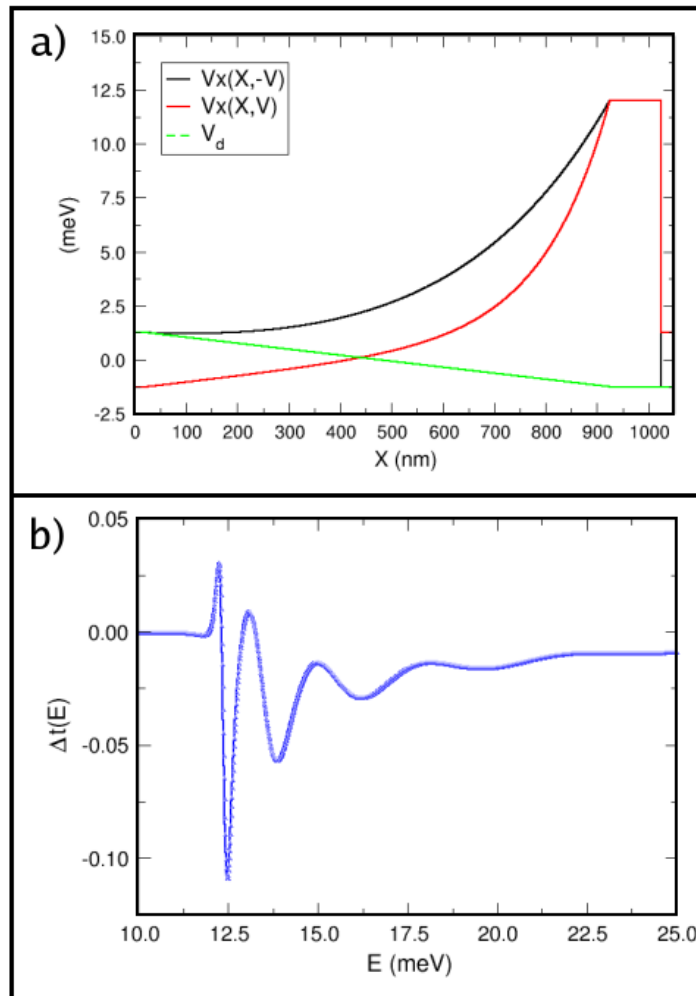


Figura 4.17: (a) Potencial asimétrico construido a partir de una barrera triangular truncada. Se ha aplicado V_d de la misma forma que a la barrera de la Fig. 4.14. (b) $\Delta t(E)$ correspondiente a la barrera de la parte (a). Las oscilaciones que se observan son debido al efecto de truncar la barrera.

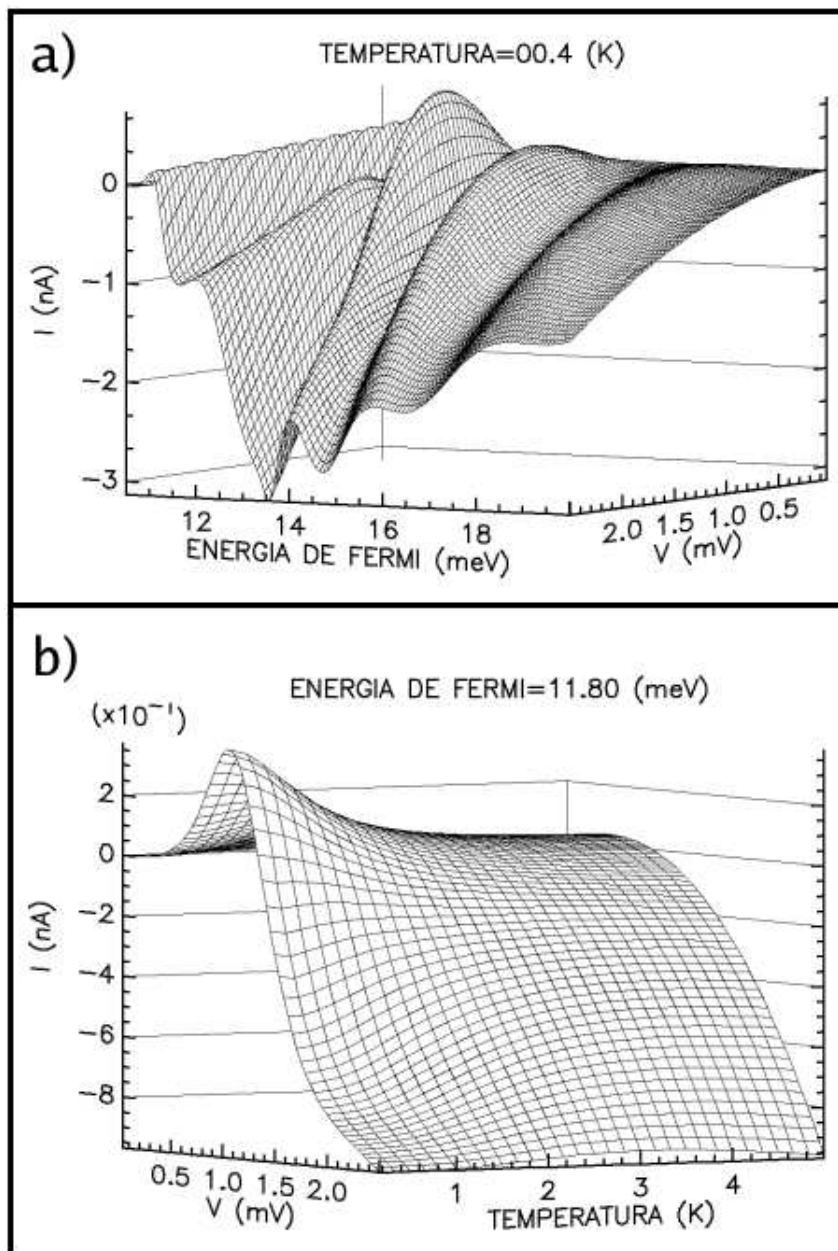


Figura 4.18: (a) I - V como función de la energía de Fermi para el potencial de la Fig. 4.17(a). El efecto provocado por truncar la barrera puede observarse claramente en la forma en que la curva oscila en función de E_F . La corriente cambia de dirección en varias ocasiones como función de E_F . (b) I - V como función de la temperatura. La corriente se invierte como función del voltaje aplicado y como función de la temperatura.

4.4. RESULTADOS EN FUNCIÓN DEL TAMAÑO

Para ilustrar que el tamaño también juega un papel importante en el comportamiento del sistema, hemos calculado $\Delta t(E)$ para varios tamaños de la barrera de potencial dada por la Ec.4.1, los resultados pueden observarse en la Fig. 4.19

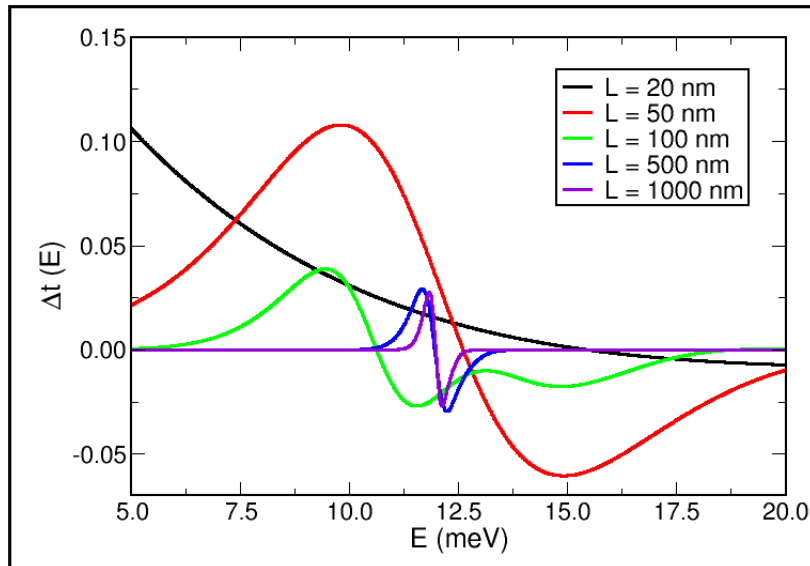


Figura 4.19: $\Delta t(E)$ para varios tamaños del potencial dado por la E. 4.1. La magnitud de $\Delta t(E)$, cambia considerablemente con el tamaño del sistema. Se utilizaron $V = 2.5$ mV y una altura de la barrera de 12.0 meV.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Hemos estudiado el comportamiento de las curvas de corriente contra voltaje en función de parámetros como son la temperatura y energía de Fermi para varios modelos de potenciales asimétricos. Las conclusiones que hemos obtenido de este estudio son las siguientes:

- La probabilidad de tunelamiento a través de las barreras depende fuertemente de la forma que el potencial adquiere cuando un voltaje es aplicado.
- Los coeficientes de transmisión correspondientes a cada signo del voltaje aplicado son diferentes lo que en algunos casos provoca que ocurra una inversión de $\Delta t(E)$ como función de la energía. Esto ocurre debido a que el cambio en la forma del potencial provocado al cambiar la polaridad del voltaje aplicado afecta la transmisión de los electrones en algunos rangos particulares de energía.
- La sola asimetría del sistema no es suficiente para provocar efectos de inversión de corriente.
- En las barreras suaves es más difícil observar efectos de inversión de corriente, debido a que los coeficientes de transmisión que resultan en estos potenciales, son muy parecidos para ambos signos del voltaje aplicado.

- El comportamiento de la corriente en función de la energía de Fermi está determinado por la forma de $\Delta t(E)$
- Si se toma en cuenta que debido a la asimetría del sistema, la forma en que el voltaje deforma a la barrera es diferente para cada signo, se obtiene inversión de corriente de una forma más natural.

Entre mayor sea el cambio de la barrera provocado por la aplicación del voltaje mayor será la probabilidad de obtener inversión de corriente.

Las perspectivas que resultaron de este trabajo de tesis son las siguientes.

- Con el objetivo de entender como el voltaje aplicado deforma a las barreras es necesario realizar el cálculo autoconsistente para determinar la forma exacta en que la barrera es deformada.
- Estudiar potenciales asimétricos utilizando la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo, de esta forma pueden estudiarse los ratchets fuera del régimen adiabático.
- Estudiar el comportamiento de la corriente contra voltaje como función del número de barreras. Explorar los efectos de tunelamiento resonante sobre la corriente.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] J. H. F. Scott-Thomas, S. B. Field, M. A. Kastner, H. I. Smith, and D. A. Antoniadis, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 583 (1989)
- [2] H. van Houten and C. W. J. Beenakker, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 1893 (1989).
- [3] U. Meirav, M. A. Kastner, and S. J. Wind, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 771 (1990).
- [4] R. Landauer, *IBM J. Res. Dev.* **1**, 223 (1957).
- [5] R. Landauer, *Phil. Mag.* **21**, 863 (1970).
- [6] H. Kroemer, *Rev. Mod. Phys.* **73**, 783 (2001).
- [7] L. L. Chang and K. Ploog, M. Nijhof, Dordrecht, The Netherlands 1985.
- [8] S. Datta, *Electronic Transport in Mesoscopic Systems*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1995.
- [9] R. Tsu and L. Esaki, *Appl. Phys. Lett.* **22**, 562 (1973).
- [10] L. L. Chang, L. Esaki, and R. Tsu, *Appl. Phys. Lett.* **24**, 593 (1974).
- [11] M. V. Smoluchowsky, *Z.Phys.* **13**, 1069 (1912).
- [12] R. P. Feynmann, R. B. Leighton, and M. Sands. *The Feynmann Lectures on Physics*, Vol I, p. 46.1-46.9, (Adisson-Wesley, Reading, 1966).
- [13] T. R. Kelly, I. Tellitu and J. P. Sestelo, *Angew. Chem. Int. Ed. Engl.* **36**, 1866 (1997).

- [14] T. R. Kelly, J. P. Sestelo and I. Tellitu, *J. Org.* **63**, 3655 (1998).
- [15] A. P. Davis, *Angew. Chem. Int. Ed. Engl.* **37**, 909 (1998).
- [16] K. L. Sebastian, *Phys. Rev. E* **61**, 937 (2000).
- [17] J. C. Maxwell, *Theory of Heat*, (Longmans, Green and Co., London 1872).
- [18] P. Reimann, *Phys. Rep.* **361**, 57 (2002).
- [19] M. O. Magnasco, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1477 (1993).
- [20] S. Leibler, *Nature* **370**, 412 (1994).
- [21] F. Jülicher, A. Ajdari and J. Prost, *Rev. Mod. Phys.* **69**, 1269 (1997).
- [22] L. Gorre, E. Ioannidis and P. Silberzan, *Europhys. Lett.* **33**, 267 (1996).
- [23] H. Linke *et al.*, *Europhys. Lett.* **44**, 341 (1998); H. Linke *et al.*, *Europhys. Lett.* **45**, 406 (1999).
- [24] A. Lorke *et al.*, *Physica B* **251**, 312 (1998).
- [25] J. Maddox, *Nature* **369**, 181 (1994).
- [26] J. Prost, J.-F. Chauwin, L. Peliti and A. Ajdari, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 2652 (1994).
- [27] R. D. Astumian, *Science* **276**, 917 (1997).
- [28] K. Kitamura, M. Tokunaga, A. H. Iwane and T. Yanagida, *Nature* **397**, 129 (1999).
- [29] J. Rousselet, L. Salome, A. Ajdari and J. Prost, *Nature* **370**, 446 (1994).
- [30] L. P. Faucheux, L. S. Bourdieu, P. D. Kaplan and A. J. Libchaber, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 1504 (1995).
- [31] C. Mennerat-Robilliard *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 851 (1999).

-
- [32] X. Wang, T. Junno, S.-B. Carlsson, C. Thelander and L. Samuelson, disponible en <http://xxx.lanl.gov/abs/condmat/9910444>.
- [33] P. Reimann, M. Grifoni and P. Hänggi, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 10 (1997).
- [34] H. Linke, T.E. Humphrey, A. Löfgren, A.O. Sushkov, R. Newbury, R.P. Taylor and P. Omling, *Science* **286**, 2314-1317 (1999).
- [35] C.W.J. Beenakker, *Phys. Rev. B* **44**, 1646 (1991).
- [36] T. J. Thornton, M. Pepper, H. Ahmed, D. Andrews, and G. J. Davies, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 1198 (1986).
- [37] H. van Houten, C.W.J. Beenakker, and B.J. van Wees, en: *Nanostructured Systems*, editado por M. A. Reed, (Academic, New York, 1992).
- [38] B.J. van Wees, H. van Houten, C.W.J. Beenakker, J.G. Williamson, L.P. Kouwenhoven, D. van der Marel, and C.T. Foxon, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 848 (1988).
- [39] D.A. Wharam, T.J. Thornton, R. Newbury, M. Pepper, H. Ahmed, J.E.F. Frost, D.G. Hasko, D.C. Peacock, D.A. Ritchie, and G.A.C. Jones, *J. Phys. C*, **21**, L209 (1988).
- [40] D. K. Ferry and S. M. Goodnick, *Transport in Nanostructures*, (Cambridge University Press, Cambridge 1999).
- [41] R. Landauer, *IBM J. Res. Dev.*, **1**, 223 (1957).
- [42] R. Landauer, *Phys. Lett.* **85a**, 91 (1957).
- [43] M. Büttiker, Y. Imry, R. Landauer, and S. Pinhas, *Phys. Rev. B* **31**, 6207 (1985).
- [44] D.S. Fisher and P. A. Lee, *Phys. Rev. B* **23**, 6851 (1981).
- [45] Y. Imry. *Introduction to Mesoscopic Physics*, (Oxford University Press, New York, 1997).

BIBLIOGRAFÍA

- [46] J. H. Davies. *The Physics of Low-Dimensional Semiconductors*, (Cambridge University Press, Canbridge, 1999).
- [47] N. W. Ashcroft and N. D. Mermin, *Solid State Physics*, (CBS Publishing Asia Ltd., Philadelphia, 1988).
- [48] C. W. J. Beenakker y H. van Houten, *Sol. Est. Phys.*, **44**, 1-228 (1991).
- [49] www.phycomp.technion.ac.il/~nika
- [50] Heterostructures and Quantum Devices, W. R. Frensley and N. G. Einspruch editors, A volume of VLSI Electronics: Microstructure Science. (Academic Press, San Diego, 1994) ISBN 0-12-234124-4