

IPICYT

**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

POSGRADO EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

Matrices de Lyapunov para sistemas integrales con retardos

Tesis que presenta

Héctor Javier Arismendi Valle

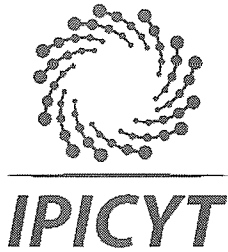
Para obtener el grado de

Doctor en Control y Sistemas Dinámicos

Director de la Tesis:

Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar

San Luis Potosí, S.L.P. a 26 de Abril del 2019



Constancia de aprobación de la tesis

La tesis “*Matrices de Lyapunov para sistemas integrales con retardos*” presentada para obtener el Grado de Doctor en Control y Sistemas Dinámicos, fue elaborada por **Héctor Javier Arismendi Valle** y aprobada el **veintiséis de abril del dos mil diecinueve** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

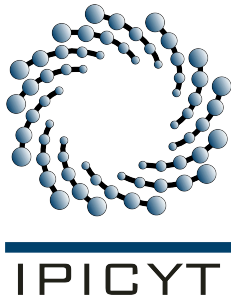
Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar
Director de la tesis

Dr. Hugo Cabrera Ibarra
Jurado en el Examen

Dr. César Fernando Francisco Méndez Barrios
Jurado en el Examen

Dr. Cesar Octavio Maldonado Ahumada
Jurado en el Examen

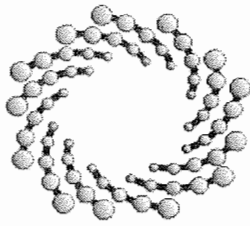
Dr. David Antonio Lizárraga Navarro
Jurado en el Examen



Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (No. de registro: 482886) y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C.



IPICYT

Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Acta de Examen de Grado

El Secretario Académico del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 014 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Doctorado en Control y Sistemas Dinámicos está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 26 días del mes de abril del año 2019, se reunió a las 13:05 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

Dr. Hugo Cabrera Ibarra	Presidente	IPICYT
Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar	Secretario	IPICYT
Dr. Cesar Octavio Maldonado Ahumada	Sinodal	IPICYT
Dr. César Fernando Francisco Méndez Barrios	Sinodal externo	UASLP
Dr. David Antonio Lizárraga Navarro	Sinodal	IPICYT

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

DOCTOR EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

sustentó el C.

Héctor Javier Arismendi Valle

sobre la Tesis intitulada:

Matrices de Lyapunov para sistemas integrales con retardos

que se desarrolló bajo la dirección de

Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar

El Jurado, después de deliberar, determinó

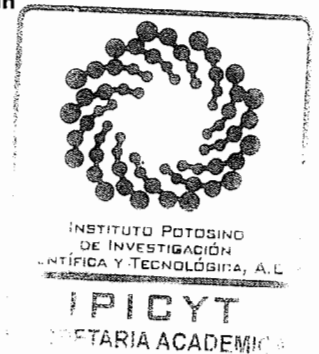
APROBARLO

Dándose por terminado el acto a las 14:50 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fe el Secretario Académico del Instituto.

A petición del interesado y para los fines que al mismo convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 26 días del mes de abril de 2019.


Mtra. Ivonne Lizette Cuevas Vélez
Jefa del Departamento del Posgrado


Dr. Marcial Bonilla Marín
Secretario Académico



*Dedicado a mi familia y a mi novia
que siempre estuvieron conmigo
para darme fuerza*

Agradecimientos

- Al Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar por su gran apoyo, sus buenos consejos, paciencia que contribuyeron en mi formación tanto académica como personal.
- A los Doctores César Fernando Mendez Barrios, Hugo Cabrera Ibarra, David Antonio Lizarraga Navarro y César Octavio Maldonado Ahumada, por aceptar ser parte del jurado de tesis, por sus comentarios y aportaciones que ayudaron a mejorar esta tesis.
- A CONACYT y al IPICYT por brindarme la oportunidad de desarrollar esta tesis.
- A mis compañeros del grupo de retardos Adrián, Abraham y Martín por su amistad y las discusiones interesantes en el pizarrón.
- Muy especialmente a mi familia por darme ese apoyo y fortaleza para seguir adelante, motivarme a no detenerme a pesar de la distancia y los obstáculos que se presentan en la vida.
- A mi mamá Marina que siempre me dió su apoyo incondicional y me enseñó a valorar todo lo que tengo.
- A mi novia Estefanía por su apoyo incondicional y por acompañarme en los momentos fáciles y difíciles e inspirarme a ser mejor persona día a día.

ÍNDICE GENERAL

Lista de figuras	IX
Lista de tablas	X
Notación	XI
1. Introducción	1
1.1. Introducción a sistemas diferenciales con retardo	1
1.2. Sobre soluciones de sistemas con retardo	3
1.3. Estabilidad de sistemas con retardo	4
1.4. Motivación al estudio de sistemas integrales con retardo	6
1.4.1. Asignación de espectro finito a sistemas con retardo	7
1.4.2. Dinámicas adicionales	10
1.5. Estructura de la tesis	13
2. Formulación del problema	14
3. Preliminares	18
3.1. Soluciones y concepto de estabilidad de sistemas integrales con retardo	18
3.2. Fórmula de Cauchy para sistemas integrales con retardo	22
3.3. Estabilidad de sistemas integrales con retardo	24
3.4. Condiciones de estabilidad para sistemas integrales con retardo	26

3.5. Funcionales y matrices de Lyapunov	27
4. Resultados principales	39
4.1. Nuevas propiedades de la matriz de Lyapunov	39
4.2. Unicidad de la matriz de Lyapunov	43
4.3. Aplicación del método numérico para la construcción de matrices de Lyapunov de sistemas diferenciales con retardo a sistemas integrales con retardo	51
4.4. Algoritmo de construcción de matrices de Lyapunov para sistemas integrales con retardo	57
4.4.1. Función inicial aproximada	57
4.4.2. Matriz de Lyapunov aproximada	63
4.5. Error de aproximación	65
4.6. Ejemplos sobre construcción numérica de matrices de Lyapunov para SIR	80
4.7. Aplicaciones	88
4.7.1. Estimados exponenciales para soluciones de SIR	88
4.7.2. Condiciones de estabilidad robusta	91
5. Conclusiones y trabajo futuro	93
6. Publicaciones	95
Bibliografía	96

LISTA DE FIGURAS

3.1. Región de estabilidad Γ_h del SIR (3.16).	27
4.1. Región de estabilidad del SIR (4.71) con $h = 1.5$	81
4.2. Componentes de la matriz fundamental $K(t)$ para el SIR (4.71) con $h=1.5$	81
4.3. Componentes de la Matriz de Lyapunov aproximada $\hat{U}(\tau)$ para el SIR (4.71) con $h=1.5$	82
4.4. Región de estabilidad del SIR (4.71) con $h = 4.5$	83
4.5. Componentes de la matriz fundamental $K(t)$ del SIR (4.71) con $h = 4.5$	84
4.6. Componentes de la Matriz de Lyapunov aproximada $\hat{U}(\tau)$ del SIR (4.71) con $h = 4.5$	84
4.7. Región de estabilidad del SIR (4.72) con $h = 0.5$	86
4.8. Componentes de la matriz fundamental $K(t)$ del SIR (4.72) con $h = 0.5$	87
4.9. Componentes de la Matriz de Lyapunov aproximada $\hat{U}(\tau)$ del SIR (4.72) con $h = 0.5$	87
4.10. Estimado exponencial para una solución del SIR (4.71)	90

LISTA DE TABLAS

4.1. Error de aproximación para distintos valores de partición N en el ejemplo	
(4.71) con $h = 1.5$	82
4.2. Error de aproximación para distintos valores de partición N del sistema inte-	
gral con retardo (4.71) para $h = 4.5$	85
4.3. Error de aproximación para distintos valores de partición N de la matriz de	
Lyapunov del sistema integral con retardo (4.72) con $h = 0.5$, con valores	
propios reales del kernel	88

Notación

\mathbb{R}	El conjunto de los números reales
\mathbb{R}_+	El conjunto de los números reales positivos
\mathbb{R}^n	Espacio euclideo real n -dimensional
$\mathbb{R}^{n \times m}$	El espacio de las matrices reales de dimensión $n \times m$
\mathbb{C}	El conjunto de los números complejos
I	Es la matriz identidad de dimensión $n \times n$
$0_{n \times n}$	Es la matriz cero de dimensión $n \times n$
F^{-1}	La inversa de la matriz F
$ a $	El valor absoluto de un escalar $a \in \mathbb{R}$
$\ x\ $	La norma Euclidea de un vector $x \in \mathbb{R}^n$
$\ F\ $	La norma inducida de una matriz F , $\ F\ = \max_{\ x\ =1} \ Fx\ $
$\mathcal{PC} \triangleq \mathcal{PC}([-h, 0], \mathbb{R}^n)$	El espacio de las funciones continuas a pedazos que mapean el intervalo $[-h, 0]$ a \mathbb{R}^n
$\mathcal{C} \triangleq \mathcal{C}([-h, 0], \mathbb{R}^n)$	El espacio de las funciones continuas que mapean el intervalo $[-h, 0]$ a \mathbb{R}^n
$\mathcal{C}^n \triangleq \mathcal{C}^n([-h, 0], \mathbb{R}^n)$	El espacio de las funciones continuas n -veces diferenciables que mapean el intervalo $[-h, 0]$ a \mathbb{R}^n
0_h	Función trivial, $0_h(\theta) = 0 \in \mathbb{R}^n$, $\theta \in [-h, 0]$
$\ \varphi\ _h$	La norma de convergencia uniforme, $\ \varphi\ _h = \sup_{\theta \in [-h, 0]} \ \varphi(\theta)\ $
x_t	Restricción de $x(t)$, $x_t : \theta \rightarrow x(t + \theta)$, $\theta \in [-h, 0]$
W^T	Transpuesta de una matriz W
$W > 0$, ($W \geq 0$)	Matriz simétrica W definida positiva, (semidefinida positiva)
$\lambda_{\min}(A)$, $\lambda_{\max}(A)$	El valor propio mínimo y máximo de la matriz A , respectivamente
$\det(A)$	Determinante de la matriz A
$\partial\Gamma$	Frontera de un conjunto abierto Γ
$A \otimes B$	El producto de Kronecker de las matrices A y B
$\text{vec}(A)$	Vectorización de la matriz A

Resumen

En este trabajo de tesis se estudian las matrices de Lyapunov para sistemas integrales con retardo. Dichas matrices son fundamentales para la construcción de funcionales de Lyapunov-Krasovskii de tipo completo las cuales son utilizadas en el análisis de estabilidad, estabilidad robusta, estimados exponenciales entre otras propiedades de sistemas integrales con retardo. En trabajos recientes se demostró que las matrices de Lyapunov satisfacen un conjunto de ecuaciones que permiten su construcción. Sin embargo, no existen estudios garantizando la unicidad de soluciones de dicho conjunto de ecuaciones así como tampoco se tiene un método sistemático para la construcción de tales soluciones.

En este trabajo de tesis se presentan resultados que dan respuesta a estos problemas abiertos para la clase de sistemas integrales con un solo retardo y kernel constante.

Palabras Clave: *Sistemas con retardo, Matrices de Lyapunov, Funcionales de Lyapunov-Krasovskii de tipo completo, Sistemas integrales con retardo.*

Abstract

In this thesis the Lyapunov matrices for integral systems with delay are studied. These matrices are fundamental for the construction of Lyapunov-Krasovskii functionals of complete type which are used in the analysis of stability, robust stability, exponential estimates among other properties of integral delay systems.

In recent works it was shown that Lyapunov matrices satisfy a set of equations that allows their construction. However, there are no studies guaranteeing the uniqueness of such set of equations as well as a systematic method for the construction of such solutions.

In this thesis, results that respond to these open problems for the class of integral systems with a single delay and constant kernel are presented.

Keywords: *Time delay systems, Lyapunov matrices, Lyapunov-Krasovskii functionals of complete type, Integral delay systems.*

En este capítulo se presentan algunos problemas de estabilidad de sistemas diferenciales con retardo (SDR) que motivan el estudio de sistemas integrales con retardo (SIR). Primeramente se presentan algunos preliminares sobre soluciones y estabilidad de SDR. Posteriormente, se discuten los problemas de asignación de espectro finito para SDR y el de dinámicas adicionales introducidas por transformaciones de sistema para obtener condiciones de estabilidad dependientes del retardo de SDR.

1.1. Introducción a sistemas diferenciales con retardo

En muchas aplicaciones, se supone que el comportamiento de un sistema se rige por un principio de causalidad, es decir, el estado futuro del sistema dinámico es independiente de los estados pasados y está determinado únicamente por el estado presente. Estos sistemas dinámicos son modelados por ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales. Sin embargo, bajo una investigación más detallada, se hace evidente que considerar solamente el estado presente es solo una primera aproximación a la situación verdadera y que un modelo más realista incluiría información de los estados pasados del sistema [8].

A principios de los años cuarenta, Minorsky [25], en su estudio de sistemas con acción retardada, señaló claramente la importancia de considerar el retardo en el tiempo de mecanismos con retroalimentación. En su libro, Mishkis [28] introdujo una clase general de ecuaciones

con argumentos retardados y sentó las bases para una teoría general de sistemas lineales. En su recopilación, Bellman y Danskin [2] señalaron las diversas aplicaciones de ecuaciones que contienen información pasada en áreas como la biología y la economía, por mencionar algunas. Un desarrollo más extenso de estas ideas está en el libro de Bellman y Cooke [1]. En su libro, sobre la teoría de estabilidad, Krasovskii [16] presentó la teoría de funcionales de Lyapunov enfatizando el importante hecho de que algunos problemas en sistemas con retardo son más significativos y susceptibles de resolver si se considera el movimiento en un espacio funcional a pesar de que la variable de estado sea un vector de dimensión finita. En los últimos años, la introducción de servomecanismos y otros sistemas de control en la industria y problemas cotidianos, han resaltado problemas físicos y matemáticos conectados con retardos de tiempo en el control, el proceso y/o de transferencia de energía en general. Estos problemas constituyen solo una parte de los muchos fenómenos físicos los cuales, requieren conocimiento no solo del estado presente si no, parte o todo el estado pasado. Los sistemas dinámicos que involucran retardo pueden ser modelados por ecuaciones diferenciales con retardo o de forma más general, por ecuaciones diferenciales funcionales. Matemáticamente, esto significa considerar un cambio en la descripción clásica de un modelo matemático por medio de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t \geq 0.$$

con condición inicial siguiente:

$$x(t_0) = x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n,$$

y ahora considerar ecuaciones diferenciales de la forma

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t), x(t-h)), \tag{1.1}$$

donde $h > 0$ es el retardo, con función inicial $x(t_0 + \theta) = \varphi(\theta)$, $\theta \in [-h, 0]$. Observe que si $h = 0$, la ecuación diferencial con retardo (1.1) se reduce a una ecuación diferencial ordinaria. La ecuación (1.1) se conoce como ecuación diferencial en diferencia o ecuación diferencial

retardada y es el tipo más sencillo de ecuación diferencial que involucra estados pasados.

Clases más generales de SDR pueden ser descritas por la ecuación diferencial funcional siguiente:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x_t), \quad t \geq t_0,$$

donde $f : \mathbb{R} \times \mathcal{PC} \rightarrow \mathbb{R}^n$, es una funcional, con $x_t = x(t + \theta)$, $\theta \in [-h, 0]$, esta ecuación diferencial funcional describe fenómenos que involucran retardo de tiempo, sin embargo el análisis de estas ecuaciones es bastante más complicado.

1.2. Sobre soluciones de sistemas con retardo

Al igual que las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO's), resulta fundamental garantizar existencia y unicidad de soluciones de SDR. Como se conoce para la EDO (1.1), el problema de valor inicial está bien definido dado un instante inicial t_0 y una condición inicial $x(t_0) = x_0$, con $x_0 \in \mathbb{R}^n$

Sin embargo, este no es el caso para SDR, para definir una solución de (1.1) se requiere conocer un instante inicial $t_0 \geq 0$ y una función inicial $\varphi : [t_0 - h, t_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde h es el retardo. El espacio en el cual la función inicial está determinada se elige dependiendo de las características del problema. Cabe resaltar, que el hecho que la función inicial pueda pertenecer a cualquier espacio funcional se sigue que los SDR pertenecen a una clase particular de sistemas infinito dimensional sin perder de vista que las trayectorias solución de un SDR sean un vector de dimensión finita.

En [1, 5] se exponen teoremas de punto fijo y aproximaciones sucesivas que garantizan existencia y unicidad de soluciones de SDR. Un método usado con frecuencia para obtener soluciones de SDR es el método denominado **paso-a-paso** el cual permite obtener soluciones en intervalos de longitud del retardo. Para ilustrar el método paso-a-paso considere el sistema lineal siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= Ax(t) + Bx(t-h), \quad t \geq 0, \\ x(t) &= \varphi(t), \quad t \in [-h, 0], \end{aligned} \tag{1.2}$$

donde $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y la función inicial se considera tal que $\varphi \in \mathcal{PC}$. Considere $t \in [0, h]$, entonces de (1.2) se obtiene

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + B\varphi(t-h).$$

Como se puede observar la igualdad anterior se puede resolver usando resultados conocidos para EDO's, de este modo la solución del SDR (1.2) para $t \in [0, h]$ es

$$x(t) = e^{At} \left[\varphi(0) + \int_0^t e^{-A\eta} B\varphi(\eta-h) d\eta \right].$$

Definamos como una nueva función inicial a la solución anterior como sigue $x(t) \triangleq \varphi_1(t)$, para $t \in [0, h]$.

Para el paso siguiente, de nuevo considere el SDR (1.2), ahora para $t \in [h, 2h]$ y con función inicial $\varphi_1(t)$.

Se sigue que el SDR (1.2) toma la forma siguiente para $t \in [h, 2h]$

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + B\varphi_1(t-h). \quad (1.3)$$

Nuevamente aplicando resultados conocidos para EDO's se obtiene que la solución del SDR (1.2) para $t \in [h, 2h]$ es

$$x(t) = e^{A(t-h)} \left[\varphi_1(h) + \int_h^t e^{-A(\eta-h)} B\varphi_1(\eta-h) d\eta \right].$$

El procedimiento anterior puede repetirse para el intervalo $[2h, 3h]$ y de hecho para cualquier intervalo $[kh, (k+1)h]$, $k = 0, 1, 2, \dots$, mostrando así la existencia y unicidad de soluciones de (1.2) para $t \geq 0$.

1.3. Estabilidad de sistemas con retardo

El análisis de estabilidad de sistemas con retardo se puede dividir de forma general en dos tipos:

- Métodos en el dominio de la frecuencia, en los cuales se hace un análisis del comportamiento de las raíces de sistemas con retardo, ejemplos clásicos de criterios de estabilidad en el dominio de la frecuencia incluyen resultados como criterio de Mikhailov, método de D-descomposiciones y método del pseudo-retardo, por mencionar algunos, ver [5].
- Métodos en el dominio del tiempo, en los cuales se emplea la teoría de Lyapunov para analizar soluciones de sistemas con retardo. Existen dos principales enfoques: el método de Lyapunov-Krasovskii y el método de Lyapunov-Razumikhin, ver [5].

Las ventajas de los métodos en el dominio del tiempo son: la posibilidad de analizar sistemas no lineales y sistemas con incertidumbres variantes en el tiempo, por mencionar algunas.

Este trabajo de tesis se centra en el enfoque de funcionales de Lyapunov-Krasovskii, de este modo se introduce la teoría de funcionales de Lyapunov-Krasovskii para sistemas con retardo.

Como se menciona en [5] en el estudio de sistemas libres de retardo, un método para determinar la estabilidad de un sistema con retardo es el conocido método de Lyapunov. Para aplicar esta metodología en un sistema libre de retardo, se requiere construir una función de Lyapunov $V(t, x(t))$, la cual proporciona una forma cualitativa de medir la desviación del estado $x(t)$ de la solución trivial. Para un sistema libre de retardo se necesita $x(t)$ para especificar la evolución del sistema para $t > 0$, de este modo, para el caso de sistemas con retardo el estado en el tiempo t requerido para el mismo propósito es el valor de $x(t)$ en el intervalo $[t - h, t]$, i.e., x_t . Es natural esperar que para sistemas con retardo, la correspondiente función de Lyapunov sea una funcional $V(t, x_t)$ que depende de x_t , la cual debería medir la desviación de x_t de la solución trivial 0_h .

Ahora, para exponer el resultado principal del teorema de Lyapunov-Krasovskii considere el SDR lineal (1.2). El teorema de Lyapunov-Krasovskii para SDR lineales de la forma (1.2)

Teorema 1 [11] *El SDR (1.2) es exponencialmente estable si existe una funcional $v : \mathcal{PC} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que se satisfacen las condiciones siguientes:*

1. Para constantes $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2$, la funcional v satisface las cotas siguientes:

$$\alpha_1 \|\varphi(0)\|^2 \leq v(\varphi) \leq \alpha_2 \|\varphi\|_h^2, \quad \varphi \in \mathcal{PC} \quad (1.4)$$

2. Para $\beta > 0$, la derivada de la funcional v a lo largo de las soluciones de (1.2) satisface la cota superior siguiente:

$$\frac{dv(x_t)}{dt} \leq -\beta \|x(t)\|^2, \quad t \geq 0 \quad (1.5)$$

El teorema anterior provee condiciones suficientes de estabilidad exponencial del SDR (1.2). Un resultado converso provee la forma exacta de la funcional que satisface las condiciones del teorema anterior, este tipo de funcional se les denomina funcional de Lyapunov-Krasovskii de tipo completo para SDR lineales y para poder usar esta funcional es necesario calcular una matriz denominada matriz de Lyapunov en un intervalo particular finito. El problema principal para calcular esta matriz radica en que la única información disponible son 3 propiedades; propiedad dinámica, propiedad de simetría y propiedad algebraica, las cuales no proporcionan información implícita para construirla. Así, en [11] se ha mostrado que estas propiedades son suficientes para construir la matriz de Lyapunov para cierta clase de sistemas usando métodos numéricos y semi-analíticos los cuales su desarrollo no es trivial.

1.4. Motivación al estudio de sistemas integrales con retardo

Entre las clases de sistemas con retardo, hay una especial cuya dinámica no se describe por la derivada del estado sino por integrales del estado del sistema. Tal clase de sistemas se conoce como sistemas integrales con retardo (SIR) o ecuaciones integrales con retardo y su análisis de estabilidad ha recibido recientemente atención considerable; ver, por ejemplo, [10, 21, 22, 23, 27] así como referencias descritas ahí. Hay una serie de problemas de estabilidad y control de SDR donde los SIR pueden ser encontrados. Por ejemplo, son esenciales en la estabilización de sistemas de control finito dimensionales con retardo en la entrada [17, 20].

De hecho, como se discute en [10], cada sistema de retroalimentación de tipo predictor esta descrito por un SIR. Otro problema donde aparecen SIR es en la obtención de condiciones de estabilidad dependientes del retardo mediante funcionales de Lyapunov-Krasovskii a través de transformaciones que introducen dinámicas adicionales [7] [14].

1.4.1. Asignación de espectro finito a sistemas con retardo

Considere el sistema con retardo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t-h), \quad (1.6)$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ y $u(t) \in \mathbb{R}^m$.

Usando la ley de control

$$u(t) = Fx(t), \quad (1.7)$$

el sistema en lazo cerrado es

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BFx(t-h),$$

cuya ecuación característica es

$$\det [sI - A - BFe^{-hs}] = 0.$$

El espectro del sistema en lazo cerrado (1.6)-(1.7) es el conjunto

$$\Lambda = \left\{ s \in \mathbb{C} \mid \det [sI - A - BFe^{-hs}] = 0 \right\}.$$

El conjunto Λ es infinito y controlar la ubicación de un número infinito de raíces mediante la ganancia F no es posible. Motivados por esto, en [20] proponen una ley de control que asigna un espectro finito en lazo cerrado al sistema (1.6).

La ley de control es

$$u(t) = Fx(t) + F \int_{-h}^0 e^{-(\theta+h)A} Bu(t+\theta) d\theta, \quad (1.8)$$

donde $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

El resultado de la Asignación de Espectro Finito en sistemas con retardo se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 2 [20] *El espectro del sistema en lazo cerrado (1.6)-(1.8) coincide con el espectro de la matriz $(A + B(A)F)$ donde*

$$B(A) = e^{-hA} B. \quad (1.9)$$

Suponiendo controlabilidad (respectivamente estabilizabilidad) del par $(A, B(A))$ el espectro del sistema (1.6)-(1.8) puede ser ubicado en cualquier conjunto deseado de n puntos complejos conjugados en el plano complejo (respectivamente los valores propios inestables de la matriz A pueden ser arbitrariamente ubicados), con una correcta elección de la matriz F .

Del Teorema [2] se sigue que el espectro del sistema en lazo cerrado (1.6)-(1.8) es precisamente el espectro de la matriz $A + B(A)F$, el cual evidentemente es finito, luego entonces se pueden aplicar los resultados clásicos que se tienen de asignación de espectro y estabilización de sistemas lineales libres de retardo.

Ahora bien, para la implementación del controlador (1.8) una realización natural es la siguiente: Definiendo

$$z(t) = \int_{-h}^0 e^{-(h+\theta)A} Bu(t+\theta) d\theta, \quad (1.10)$$

y diferenciando, se obtiene la siguiente ecuación diferencial para $z(t)$

$$\dot{z}(t) = Az(t) + e^{-hA} Bu(t) - Bu(t-h). \quad (1.11)$$

Entonces se tiene el siguiente esquema de control

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t-h), \\ \dot{z}(t) &= Az(t) + e^{-hA}Bu(t) - Bu(t-h), \\ u(t) &= F[x(t) + z(t)].\end{aligned}\tag{1.12}$$

Cuando el sistema en lazo abierto es inestable, esta realización involucra una cancelación de polos inestables del controlador por ceros inestables en el sistema (véase [20]) y la nueva variable $z(t)$ es gobernada por una ecuación inestable, por tanto, esta realización del controlador (1.8) debe ser descartada.

Manitius y Olbrot [20] sugieren usar métodos numéricos para aproximar la integral involucrada en la ley de control (1.8).

Entonces la integral con retardo distribuido en (1.10) puede ser aproximada por una suma de retardos puntuales empleando reglas de cuadratura numérica, por ejemplo:

$$z(t) = \int_{-h}^0 e^{-(h+\theta)A} Bu(t+\theta) d\theta \approx e^{-hA} \sum_{j=0}^q \eta_j e^{j h A} Bu(t - \frac{j}{q} h),\tag{1.13}$$

donde q determina la precisión del método y η_j depende del esquema numérico que se va a implementar.

Manitius en [19] realizó un estudio de este problema implementando la ley de control de forma numérica en el modelo de un túnel de viento teniendo resultados satisfactorios. Más adelante en [30] se muestra con un ejemplo escalar que para algunos valores de parámetros del sistema, la ley de control (1.8) aproximada numéricamente puede no estabilizar el sistema (1.6) sin importar la precisión q que se elija o incluso el método de integración seleccionado para la aproximación.

Prestando atención a este problema, se comenzó a investigar bajo que condiciones necesarias y/o suficientes el controlador (1.8) se puede implementar correctamente (ver [4, 26]). En [24] se presentan condiciones necesarias y suficientes para la correcta implementación numérica del controlador (1.8).

Teorema 3 [24] *La implementación mediante cualquier método de integración numérico de*

la ley de control (1.8) es segura si y solo si $(A + B(A)F)$ es Hurwitz y

$$z(t) = \int_{-h}^0 F e^{-(h+\theta)A} B z(t + \theta) d\theta \quad (1.14)$$

es estable.

El resultado anterior muestra que la estabilidad de la dinámica interna del controlador (1.8), gobernada por el sistema integral con retardo (1.14), es esencial para su correcta implementación, ver [4, 24, 26, 30].

Este tipo de dinámicas gobernadas por SIR aparecen también en el diseño de distintos controladores tales como el predictor de Smith [18], control óptimo [3, 31], estabilización por retroalimentación [16, 29] por mencionar algunos.

1.4.2. Dinámicas adicionales

Ahora presentaremos un problema de estabilidad de SDR que también involucra dinámicas gobernadas por SIR.

Considere el sistema con retardo en el tiempo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bx(t-h), \\ x(t) &= \varphi(t), \quad t \in [-h, 0], \end{aligned} \quad (1.15)$$

donde $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\varphi \in \mathcal{PC}$. Para el sistema (1.15) existen dos tipos de estabilidad: estabilidad dependiente del retardo y estabilidad independiente del retardo [5].

Cuando se desea obtener condiciones de estabilidad dependientes del retardo mediante el método de funcionales de Lyapunov-Krasovskii comúnmente se utilizan distintas transformaciones del sistema (1.15) [15]. Para efectos ilustrativos consideraremos una de dichas transformaciones de sistema. Primero observemos que de la fórmula de Newton-Leibniz se tiene que

$$x(t-h) = x(t) - \int_{-h}^0 \dot{x}(t+\theta) d\theta, \quad t \geq h.$$

Ahora, sustituyendo la derivada bajo la integral por el lado derecho de (1.15) se obtiene

$$x(t-h) = x(t) - \int_{-h}^0 [Ax(t+\theta) + Bx(t+\theta-h)] d\theta, \quad t \geq h.$$

Si utilizamos la expresión anterior en el sistema (1.15) obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= (A+B)y(t) - B \int_{-h}^0 (Ay(t+\theta) + By(t-h+\theta)) d\theta, \\ y(\theta) &= \tilde{\varphi}(\theta) \quad \theta \in [-h, h], \end{aligned} \quad (1.16)$$

donde

$$\tilde{\varphi}(\theta) = \begin{cases} \varphi(\theta) & \theta \in [-h, 0), \\ x(\theta, \varphi) & \theta \in [0, h]. \end{cases}$$

Note que para el sistema (1.15) se requiere conocer una función inicial en un intervalo de longitud h , mientras que el sistema transformado (1.16) requiere conocer una función inicial en un intervalo de longitud $2h$.

Es claro que cualquier solución de (1.16) es solución de (1.15). Este hecho es utilizado para obtener condiciones de estabilidad dependientes del retardo para (1.15) mediante la estabilidad de (1.16). Sin embargo, lo recíproco no es cierto en general, es decir, no toda solución de (1.16) es solución de (1.15). De esta forma, puede ocurrir que el sistema (1.16) no sea estable pero, sin embargo, el sistema (1.15) sí sea estable.

Recientemente en [6, 13, 14] se mostró que la transformación (1.16) introduce **dinámicas adicionales** a las del sistema original (1.15) las cuales son responsables de la pérdida de equivalencia de la propiedad de estabilidad entre el sistema original (1.15) y el sistema transformado (1.16).

Así, en [14] se demostró el resultado siguiente:

Teorema 4 [14] La ecuación (1.16) y el sistema

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + By(t-h) + z(t), \quad (1.17)$$

$$z(t) = B \int_{-h}^0 z(t + \theta) d\theta, \quad (1.18)$$

son equivalentes en el sentido que toda solución de (1.16) es solución de (1.17) y vice versa.

A continuación se resume la relación que tienen las soluciones de los sistemas (1.15), (1.16) y (1.17) en el punto siguiente:

- Toda solución de (1.15) es solución de (1.17) pero no toda solución de (1.17) es solución de (1.15) esto debido a que el sistema (1.17) tiene adicional a la dinámica de (1.15), la dinámica de $z(t)$ gobernada por (1.18).

Teorema 5 [14] *El sistema (1.16) es estable si y sólo si (1.15) y la ecuación integral*

$$z(t) = B \int_{-h}^0 z(t + \theta) d\theta, \quad (1.19)$$

son estables.

El resultado anterior muestra que si el sistema integral (1.18) es estable entonces (1.15) y (1.16) son estables equivalentemente.

Comparando las ecuaciones (1.14) y (1.19) se puede concluir que ambas son de la forma

$$x(t) = \int_{-h}^0 F(\theta)x(t + \theta) d\theta, \quad t \geq 0,$$

donde $F(\theta) = Fe^{-(h+\theta)A}B$ para el caso de asignación de espectro finito de sistemas con retardo y $F(\theta) = B$ para el caso de dinámicas adicionales.

En el trabajo [23], se ha introducido un teorema de Lyapunov-Krasovskii que garantiza la estabilidad exponencial de SIR lineales por medio de funcionales continuas y diferenciables. Este resultado fundamental ha motivado la construcción de funcionales para obtener condiciones de estabilidad y estabilidad robusta expresadas como desigualdades matriciales lineales [21, 22, 27].

Por otro lado, se han introducido en [23] expresiones generales de funcionales de Lyapunov-Krasovskii con derivada con respecto al tiempo dada. Estas funcionales están definidas por funciones matriciales que son la contra parte de matrices de Lyapunov que aparecen en la

construcción de funcionales de Lyapunov-Krasovskii de tipo completo para sistemas diferenciales con retardo (SDR) [12]; por lo tanto, parece natural llamar a dicha función matricial como *Matrices de Lyapunov para SIR* y a las correspondientes funcionales como *funcionales de Lyapunov-Krasovskii de tipo completo para SIR*.

1.5. Estructura de la tesis

La tesis está organizada de la manera siguiente: En el Capítulo 2 se plantea el problema de forma general tratado en esta tesis. En el Capítulo 3 se presenta algunos preliminares sobre soluciones y concepto de estabilidad. En este mismo capítulo se presenta el concepto de matriz fundamental, la fórmula de Cauchy así como algunas condiciones de estabilidad de SIR. De igual forma se presenta con más detalle el enfoque de funcionales de Lyapunov-Krasovskii necesario para el desarrollo de esta tesis mencionado ligeramente en el capítulo 2 de formulación del problema. El Capítulo 4 está dedicado a presentar los resultados principales de la tesis. En él se presentan nuevas propiedades de la matriz de Lyapunov para SIR presenta un resultado de unicidad de matrices de Lyapunov de SIR exponencialmente estables. En el mismo capítulo se presenta un algoritmo numérico que proporciona aproximaciones lineales a trozos de las matrices de Lyapunov después de mostrar que los métodos numéricos existentes para SDR no pueden aplicarse a SIR. También se muestra una forma de medir el error de aproximación de matrices de Lyapunov, al final del mismo capítulo se presentan varios ejemplos que ilustran la construcción y aplicación de matrices de Lyapunov para SIR exponencialmente estables. Conclusiones y el trabajo futuro se presentan en el Capítulo 5

CAPÍTULO 2

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Consideremos el sistema integral

$$x(t) = \int_{-h}^0 F(\theta)x(t+\theta)d\theta, \quad t \geq 0, \quad (2.1)$$

donde $F(\theta)$ es una función matricial con elementos continuamente diferenciables en $[-h, 0]$ y $h > 0$ es el retardo.

Como se mencionó anteriormente, en [23] se presentan nuevas condiciones de estabilidad de tipo Lyapunov para el sistema (2.1), esto motivado del hecho de que no se puede investigar la estabilidad de SIR de la forma (2.1) aplicando resultados existente de SDR, (véase [23] y el Capítulo 3 de preliminares). A continuación se enuncia el resultado de tipo Lyapunov siguiente:

Teorema 6 [23] *El sistema (2.1) es exponencialmente estable si existe una funcional continua $v : \mathcal{PC} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $t \mapsto v(x_t(\varphi))$ es diferenciable y se satisfacen las condiciones siguientes:*

1. $\alpha_1 \int_{-h}^0 \|\varphi(\theta)\|^2 d\theta \leq v(\varphi) \leq \alpha_2 \int_{-h}^0 \|\varphi(\theta)\|^2 d\theta$, para algunas constantes $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2$,
2. $\frac{d}{dt}v(x_t(\varphi)) \leq -\beta \int_{-h}^0 \|x(t+\theta, \varphi)\|^2 d\theta$, para una constante $\beta > 0$.

El resultado anterior garantiza la estabilidad exponencial del SIR (2.1) utilizando funcionales continuas y diferenciables. Esta característica es similar al resultado clásico de Lyapunov-Krasovskii para SDR (ver Teorema 1) expuesto en el capítulo anterior. Por otro lado, observe que las cotas inferiores y superiores para la funcional así como la cota superior para derivada de la funcional son todas cotas cuadráticas de tipo integral a diferencia del caso de SDR donde dichas cotas son cuadráticas pero no son integrales.

Este resultado fundamental para la estabilidad de SIR ha motivado la construcción de varias funcionales para obtener condiciones suficientes de estabilidad y estabilidad robusta, expresadas como desigualdades matriciales lineales para varias clases particulares de SIR de la forma (2.1), véase, por ejemplo, [21] [22] [27].

Por otro lado, en [23] también se aborda el problema converso al Teorema 6 es decir, dado un SIR (2.1) que es exponencialmente estable se busca una funcional que satisfaga las condiciones del Teorema 6

En el capítulo 3, formularemos de forma más precisa el resultado converso, por ahora solo mencionamos que en [23] se muestra que cuando el SIR (2.1), es exponencialmente estable entonces la funcional

$$\begin{aligned}
v(\varphi) = & \left(\int_{-h}^0 F(\theta)\varphi(\theta)d\theta \right)^T U(0) \left(\int_{-h}^0 F(\theta)\varphi(\theta)d\theta \right) \\
& - 2 \left(\int_{-h}^0 F(\theta)\varphi(\theta)d\theta \right)^T \int_{-h}^0 U(-h-\theta)F(-h)\varphi(\theta)d\theta \\
& - 2 \left(\int_{-h}^0 F(\theta)\varphi(\theta)d\theta \right)^T \int_{-h}^0 \left(\int_{-h}^{\theta} U(\xi-\theta)\dot{F}(\xi)d\xi \right) \varphi(\theta)d\theta \\
& + \int_{-h}^0 \varphi^T(\theta_1)F^T(-h) \left(\int_{-h}^0 U(\theta_1-\theta_2)F(-h)\varphi(\theta_2)d\theta_2 \right) d\theta_1 \\
& - \int_{-h}^0 \varphi^T(\theta_1)F^T(-h)K_0^T W \left[\int_{-h}^0 \left(\int_{-h-\theta_2}^{\theta_1-\theta_2} K(\xi)d\xi \right) F(-h)\varphi(\theta_2)d\theta_2 \right] d\theta_1 \\
& + 2 \int_{-h}^0 \varphi^T(\theta_1)F^T(-h) \left[\int_{-h}^{\theta_2} \left(\int_{-h}^{\theta_2} U(h+\theta_1+\xi-\theta_2)\dot{F}(\xi)\varphi(\theta_2)d\xi \right) d\theta_2 \right] d\theta_1 \\
& - 2 \int_{-h}^0 \varphi^T(\theta_1)F^T(-h)K_0^T W \int_{-h}^0 \left(\int_{-h}^{\theta_2} \left(\int_{\xi-\theta_2}^{h+\theta_1+\xi-\theta_2} K(\eta)d\eta \right) \right. \\
& \left. \times \dot{F}(\xi)\varphi(\theta_2)d\xi \right) d\theta_2 d\theta_1 \\
& + \int_{-h}^0 \varphi^T(\theta_1) \left(\int_{-h}^{\theta_1} \dot{F}^T(\xi_1) \left[\int_{-h}^0 \left(\int_{-h}^{\theta_2} U(\theta_1-\xi_1+\xi_2-\theta_2) \right) \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \dot{F}(\xi_2) d\xi_2 \Big) \varphi(\theta_2) d\theta_2 \Big] d\xi_1 \Big) d\theta_1 \\
& - \int_{-h}^0 \varphi^T(\theta_1) \left[\int_{-h}^{\theta_1} \dot{F}^T(\xi_1) K_0^T W \left(\int_{-h}^{\theta_2} \left[\int_{-h}^{\theta_2} \left(\int_{\xi_2 - \theta_2}^{\theta_1 - \xi_1 + \xi_2 - \theta_2} K(\eta) d\eta \right) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \times \dot{F}(\xi_2) d\xi_2 \right] \varphi(\theta_2) d\theta_2 \right) d\xi_1 \right] d\theta_1 + \int_{-h}^0 \varphi^T(\xi) [W_0 + (\xi + h) W_1] \varphi(\xi) d\xi, \quad (2.2)
\end{aligned}$$

satisface las condiciones del Teorema [6](#)

La matriz función $U(\tau)$ está definida como

$$U(\tau) = \int_0^\infty K^T(t) W K(t + \tau) dt, \quad \tau \geq 0, \quad (2.3)$$

donde $K(t)$ es la matriz fundamental asociada a [\(2.1\)](#). La matriz función [\(2.3\)](#) satisface las ecuaciones siguientes:

$$U(\tau) = \left(\int_{-h}^0 U(\tau + \theta) F(\theta) d\theta \right), \quad \tau \geq 0. \quad (2.4)$$

$$U(\tau) = U^T(-\tau) + K_0^T W \int_0^\tau K(\xi) d\xi, \quad \tau \in [0, h]. \quad (2.5)$$

$$-K^T(0) W K(0) = \int_{-h}^0 \dot{U}(\theta) F(\theta) d\theta + \left[\int_{-h}^0 \dot{U}(\theta) F(\theta) d\theta \right]^T \quad (2.6)$$

Como se puede observar para construir la funcional [\(2.2\)](#) y poder usarla para obtener condiciones de estabilidad, estabilidad robusta calcular estimados exponenciales entre otros problemas, se necesita calcular la matriz función $U(\tau)$ y su estructura surge de manera natural del resultado converso del Teorema [6](#).

Estas características son similares a la construcción de funcionales de Lyapunov-Krasovskii de tipo completo para SDR las cuales depende de una matriz función llamada matriz de Lyapunov para SDR, véase [\[23\]](#).

Por lo tanto, parece natural llamar a la matriz función [\(2.3\)](#) como *matriz de Lyapunov para SIR* y a la correspondiente funcional [\(2.2\)](#) como *funcional de Lyapunov-Krasovskii de tipo completo para el SIR* [\(2.1\)](#).

Las condiciones [\(2.4\)](#), [\(2.5\)](#) y [\(2.6\)](#) respectivamente se llaman: propiedad dinámica, propiedad de simetría y propiedad algebraica de la matriz de Lyapunov $U(\tau)$.

La propiedad dinámica define a $U(\tau)$ como solución de la ecuación integral con retardo

(2.4). Para calcular tal solución es necesario conocer una función inicial correspondiente $U(\tau) = \Phi(\tau)$, $\tau \in [-h, 0]$.

El problema fundamental que surge es que esta función inicial Φ **no está dada explícitamente**. Por otro lado, la propiedad de simetría (2.5) provee información implícita de Φ . Cuando el SIR (2.1) es exponencialmente estable la matriz $U(\tau)$ dada por (2.3) satisface las ecuaciones (2.4)-(2.6). Esto muestra que bajo la suposición de estabilidad exponencial, existe solución al conjunto de ecuaciones (2.4)-(2.6).

En [23] se mostró, mediante algunos ejemplos numéricos, que cuando el SIR (2.1) es exponencialmente estable, la matriz $U(\tau)$ puede construirse encontrando solución de la ecuación (2.4) que satisface (2.5) y (2.6).

Sin embargo, el problema de unicidad así como el de establecer un procedimiento sistemático para construir soluciones de (2.4)-(2.6) no fueron estudiados en [23].

Del trabajo [23] a la fecha no se encuentran trabajos de investigación abordando estos problemas abiertos sobre matrices de Lyapunov para SIR.

Estos problemas abiertos motivan el presente trabajo de tesis, donde nos proponemos encontrar solución a tales problemas al menos para el caso más sencillo de SIR, esto es para SIR con un solo retardo y un kernel constante, es decir, el caso de (2.1) cuando $F(\theta) = F$, $\theta \in [-h, 0]$.

En este capítulo se presentan algunos resultados preliminares necesarios para la obtención de los resultados principales de la tesis. Se introducen los conceptos de soluciones y estabilidad exponencial de sistemas integrales con retardo (SIR) así como el teorema directo y el teorema converso de Lyapunov-Krasovskii donde se presenta la funcional de Lyapunov-Krasovskii de tipo completo y se habla con mayor detalle del problema de la construcción de la matriz de Lyapunov de SIR.

3.1. Soluciones y concepto de estabilidad de sistemas integrales con retardo

Considere el SIR

$$x(t) = \int_{-h}^0 F(\theta)x(t+\theta)d\theta, \quad t \geq 0, \quad (3.1)$$

donde $F(\theta)$ es una función matricial continuamente diferenciable en $[-h, 0]$ y $h > 0$ es el retardo. Para definir una solución particular de (3.1) se debe proporcionar una función vectorial inicial $\varphi(\theta)$, $\theta \in [-h, 0)$. Se supone que φ pertenece al espacio de las funciones acotadas

continuas a pedazos \mathcal{PC} equipado con la norma de convergencia uniforme

$$\|\varphi\|_h = \sup_{\theta \in [-h, 0]} \|\varphi(\theta)\|.$$

Dada cualquier función inicial $\varphi \in \mathcal{PC}$ existe una única solución $x(t, \varphi)$ de (3.1) la cual está definida para todo $t \in [-h, \infty)$, ver [23]. Esta solución presenta una discontinuidad de tipo salto en $t = 0$ dada por

$$\Delta x(0, \varphi) = x(0, \varphi) - x(-0, \varphi) = \int_{-h}^0 F(\theta)\varphi(\theta)d\theta - \varphi(-0).$$

Por otro lado, $x(t, \varphi)$ es uniformemente continua para todo $t > 0$. En efecto, por un lado si $F(\theta) \equiv 0_{n \times n}$, $\theta \in [-h, 0]$, entonces $x(t, \varphi) \equiv 0$ es uniformemente continua para $t > 0$. Por otro lado, considere que $F(\theta)$ no es idénticamente cero, para $t \geq t_0 > 0$, se tiene

$$\|x(t, \varphi) - x(t_0, \varphi)\| = \left\| \int_{t-h}^t F(\xi-t)x(\xi, \varphi)d\xi - \int_{t_0-h}^{t_0} F(\xi-t)x(\xi, \varphi)d\xi \right\|. \quad (3.2)$$

Ahora, observe que

$$\begin{aligned} \int_{t-h}^t F(\xi-t)x(\xi, \varphi)d\xi &= \int_{t_0-h}^{t_0} F(\xi-t)x(\xi, \varphi)d\xi + \int_{t-h}^{t_0-h} F(\xi-t)x(\xi, \varphi)d\xi \\ &\quad + \int_{t_0}^t F(\xi-t)x(\xi, \varphi)d\xi, \end{aligned} \quad (3.3)$$

de este modo se obtiene

$$\|x(t, \varphi) - x(t_0, \varphi)\| = \left\| \int_{t-h}^{t_0-h} F(\xi-t)x(\xi, \varphi)d\xi + \int_{t_0}^t F(\xi-t)x(\xi, \varphi)d\xi \right\|. \quad (3.4)$$

Definiendo $\kappa = \max_{\xi \in [-h, t]} \|x(\xi, \varphi)\| < \infty$ y $M_F = \max_{\theta \in [-h, 0]} \|F(\theta)\|$ se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \|x(t, \varphi) - x(t_0, \varphi)\| &= \left\| \left(\int_{t-h}^{t_0-h} F(\xi-t)x(\xi, \varphi)d\xi + \int_{t_0}^t F(\xi-t)x(\xi, \varphi)d\xi \right) \right\| \leq \\ &\leq \kappa M_F \left(\int_{t_0-h}^{t-h} d\xi + \int_{t_0}^t d\xi \right) = 2\kappa M_F (t - t_0). \end{aligned} \quad (3.5)$$

De la desigualdad anterior se sigue que para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2\kappa M_F} > 0$ tal

que $t - t_0 < \delta$ implica que $\|x(t, \varphi) - x(t_0, \varphi)\| < \varepsilon$, lo cual muestra la continuidad uniforme de $x(t, \varphi)$ para todo $t > 0$.

Como es habitual en los sistemas con retardo, se define el estado natural de (3.1) como $x_t(\theta, \varphi) = x(t + \theta, \varphi)$, $\theta \in [-h, 0]$; por simplicidad de la notación, se escribe $x_t(\varphi)$ en lugar de $x_t(\theta, \varphi)$, $\theta \in [-h, 0]$. Además, cuando la función inicial es irrelevante en el contexto, simplemente se escribe $x(t)$ y x_t en lugar de $x(t, \varphi)$ y $x_t(\varphi)$, respectivamente. Una simple inspección muestra que para $t \in [0, h)$, $x_t(\varphi)$ pertenece a \mathcal{PC} , y para $t \geq h$, $x_t(\varphi)$ pertenece a \mathcal{C} .

Ahora, se mostrará un resultado importante que relaciona las soluciones de SDR con las soluciones de SIR, para esto considere el SDR

$$\frac{dy(t)}{dt} = F(0)y(t) - F(-h)y(t-h) - \int_{-h}^0 \left(\frac{d}{d\theta} F(\theta) \right) y(t+\theta) d\theta, \quad t \geq 0. \quad (3.6)$$

Para una función inicial dada $\varphi \in \mathcal{PC}$, se define la función inicial siguiente:

$$\tilde{\varphi}(\theta) = \begin{cases} \varphi(\theta), & t \in [-h, 0], \\ \int_{-h}^0 F(\xi)\varphi(\xi)d\xi, & \theta = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Sea $y(t, \tilde{\varphi})$, $t \geq 0$, la solución de (3.6). En el Lema siguiente se muestra cuando las soluciones de (3.6) son equivalentes con las soluciones de (3.1).

Lema 1 [23]

$$y(t, \tilde{\varphi}) = x(t, \varphi).$$

Demostración. La función $y(t, \tilde{\varphi})$ satisface

$$\frac{dy(t, \tilde{\varphi})}{dt} = F(0)y(t, \tilde{\varphi}) - F(-h)y(t-h, \tilde{\varphi}) - \int_{-h}^0 \left(\frac{d}{d\theta} F(\theta) \right) y(t+\theta, \tilde{\varphi}) d\theta, \quad t \geq 0.$$

Integrando la igualdad anterior de 0 a t se obtiene

$$y(t, \tilde{\varphi}) - \tilde{\varphi}(0) = F(0) \int_0^t y(\xi, \tilde{\varphi}) d\xi - F(-h) \int_{-h}^{t-h} y(\xi, \tilde{\varphi}) d\xi$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{-h}^0 \left(\frac{d}{d\theta} F(\theta) \right) \left(\int_{\theta}^{t+\theta} y(\xi, \tilde{\varphi}) d\xi \right) d\theta \\
& = F(0) \int_0^t y(\xi, \tilde{\varphi}) d\xi - F(-h) \int_{-h}^{t-h} y(\xi, \tilde{\varphi}) d\xi \\
& \quad - F(0) \int_0^t y(\xi, \tilde{\varphi}) d\xi + F(-h) \int_{-h}^{t-h} y(\xi, \tilde{\varphi}) d\xi \\
& \quad + \int_{-h}^0 F(\theta) [y(t+\theta, \tilde{\varphi}) - y(\theta, \tilde{\varphi})] d\theta \\
& = \int_{-h}^0 F(\theta) y(t+\theta, \tilde{\varphi}) - \int_{-h}^0 F(\theta) \tilde{\varphi}(\theta), \tag{3.8}
\end{aligned}$$

lo que significa que $y(t, \tilde{\varphi})$ satisface (3.1). Ahora, suponga que la función $x(t, \varphi)$, $t \geq 0$ satisface (3.1). Observe que para $t \geq 0$

$$x(t, \varphi) = \int_{-h}^0 F(\theta) x(t+\theta, \varphi) d\theta = \int_{t-h}^t F(\xi-t) x(\xi, \varphi) d\xi.$$

Se sigue que

$$\begin{aligned}
\frac{dx(t, \varphi)}{dt} & = F(0)x(t, \varphi) - F(-h)x(t-h, \varphi) - \int_{t-h}^t \left(\frac{d}{d(\xi-t)} F(\xi-t) \right) x(\xi, \varphi) d\xi \\
& = F(0)x(t, \varphi) - F(-h)x(t-h, \varphi) - \int_{-h}^0 \left(\frac{d}{d\theta} F(\theta) \right) x(t+\theta, \varphi) d\theta,
\end{aligned}$$

lo cual implica que $x(t, \varphi)$ satisface (3.6). Por la definición de la función $\tilde{\varphi}(\theta)$, $\varphi(\theta)$ coincide con $\tilde{\varphi}(\theta)$ para $\theta \in [-h, 0)$ y

$$x(0, \varphi) = y(0, \tilde{\varphi}) = \tilde{\varphi}(0) = \int_{-h}^0 F(\xi) \varphi(\xi) d\xi. \tag{3.9}$$

■

El Lema 1 muestra una conexión entre las soluciones de los sistemas (3.1) y (3.6), esto es de ayuda para obtener los resultados de la sección siguiente.

3.2. Fórmula de Cauchy para sistemas integrales con retardo

En esta sección se presenta la fórmula de Cauchy para las soluciones de (3.1).

Sea $K_1(t)$ la matriz fundamental de (3.6). La matriz $K_1(t)$ es solución de la ecuación diferencial matricial

$$\frac{dK_1(t)}{dt} = K_1(t)F(0) - K_1(t-h)F(-h) - \int_{-h}^0 K_1(t+\theta) \left(\frac{d}{d\theta} F(\theta) \right) d\theta, \quad t \geq 0, \quad (3.10)$$

con condición inicial $K_1(t) = 0$, $t \in [-h, 0)$ y $K_1(0) = I$, ver [1].

El sistema (3.6) es un caso particular de la clase de sistemas diferenciales con retardos discretos y distribuidos. Así, el siguiente resultado sigue de las ideas expuestas en [11].

Lema 2 *La solución $y(t, \tilde{\varphi})$ de (3.6) se puede escribir como*

$$\begin{aligned} y(t, \tilde{\varphi}) = & K_1(t)\tilde{\varphi}(0) - \int_{-h}^0 K_1(t-h-\tau)F(-h)\tilde{\varphi}(\tau)d\tau \\ & - \int_{-h}^0 \int_{-h}^{\tau} K_1(t+\theta-\tau) \left(\frac{d}{d\theta} F(\theta) \right) d\theta \tilde{\varphi}(\tau)d\tau, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

El espectro de (3.1) consiste en todos los ceros de la función característica

$$f(s) = \det \left(I - \int_{-h}^0 F(\theta) e^{\theta s} d\theta \right).$$

Ahora, se procede a obtener la fórmula de Cauchy del SIR (3.1), para este fin se enuncia el Lema siguiente:

Lema 3 [13] *Suponga que el espectro de (3.1) no contiene el punto $s = 0$, entonces la matriz $K_1(t)$ se puede escribir como*

$$K_1(t) = K(t) + K_0, \quad (3.12)$$

donde $K_0 = \left(I - \int_{-h}^0 F(\theta) d\theta \right)^{-1}$ y $K(t)$ es solución de la ecuación matricial

$$K(t) = \int_{-h}^0 K(t+\theta)F(\theta)d\theta, \quad (3.13)$$

con función inicial $K(t) = -K_0, t \in [-h, 0)$.

Demostración. Note que si $s = 0$ no pertenece al espectro de (3.1) entonces la matriz $\left(I - \int_{-h}^0 F(\theta) d\theta \right)$ es no singular, y de este modo, la matriz K_0 está bien definida. Ahora observe que la matriz $K_1(t)$ satisface la igualdad siguiente:

$$K_1(t) = \int_{-h}^0 K_1(t+\theta)F(\theta)d\theta + I, \quad t \geq 0. \quad (3.14)$$

Sustituyendo (3.12) en (3.14) se obtiene (3.13) y la función inicial para la matriz $K(t)$ se obtiene directamente de (3.14). ■

Lema 4 [13] Si $s = 0$ no pertenece al espectro de (3.1), entonces $x(t, \varphi)$ se puede escribir como

$$\begin{aligned} x(t, \varphi) = & K(t) \int_{-h}^0 F(\theta)\varphi(\theta) - \int_{-h}^0 K(t-h-\theta)F(-h)\varphi(\theta)d\theta \\ & - \int_{-h}^0 \left(\int_{-h}^{\theta} K(t+\xi-\theta) \left(\frac{d}{d\xi} F(\xi) \right) d\xi \right) \varphi(\theta)d\theta, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Demostración. De (3.11), (3.12) y del resultado del Lema 1 se obtiene para $t \geq 0$

$$\begin{aligned} x(t, \varphi) = & K(t) \int_{-h}^0 F(\theta)\varphi(\theta)d\theta - \int_{-h}^0 K(t-h-\theta)F(-h)\varphi(\theta)d\theta \\ & - \int_{-h}^0 \left(\int_{-h}^{\theta} K(t+\xi-\theta) \left(\frac{d}{d\xi} F(\xi) \right) d\xi \right) \varphi(\theta)d\theta \\ & + K_0 \int_{-h}^0 \left[F(\theta) - F(-h) - \int_{-h}^{\theta} \left(\frac{d}{d\xi} F(\xi) \right) d\xi \right] \varphi(\theta)d\theta. \end{aligned}$$

Como la expresión dentro de los paréntesis cuadrados en la igualdad anterior es cero, se sigue que la fórmula de Cauchy (3.15) es cierta.

■

La igualdad (3.15) se conoce como fórmula de Cauchy del SIR (3.1). Esta fórmula juega un rol importante en la construcción de funcionales cuadráticas de Lyapunov-Krasovskii de tipo completo para (3.1).

3.3. Estabilidad de sistemas integrales con retardo

Comenzamos mencionando la definición de estabilidad del sistema (3.1).

Definición 1 *El sistema (3.1) se dice que es exponencialmente estable si existen constantes $\alpha > 0$ y $\mu \geq 1$ tales que toda solución $x(t, \varphi)$ de (3.1) satisface la desigualdad siguiente:*

$$\|x_t(\varphi)\|_h \leq \mu e^{-\alpha t} \|\varphi\|_h, \quad t \geq 0.$$

La estabilidad exponencial del SIR (3.1) no se puede investigar mediante el SDR (3.6), es decir, el SDR siguiente:

$$\frac{dy(t)}{dt} = F(0)y(t) - F(-h)y(t-h) - \int_{-h}^0 \left(\frac{d}{d\theta} F(\theta) \right) y(t+\theta) d\theta, \quad t \geq 0,$$

ya que éste no es exponencialmente estable porque que admite cualquier vector constante como solución. De hecho, considere la función $y(t) \equiv c$, $t \in [-h, \infty)$, donde c es un vector arbitrario de \mathbb{R}^n . Es claro que $\frac{dy(t)}{dt} \equiv 0$, $t \in [-h, \infty)$. Por otro lado, para $t \in [-h, \infty)$ se tiene que

$$\begin{aligned} & F(0)y(t) - F(-h)y(t-h) - \int_{-h}^0 \left(\frac{dF(\theta)}{d\theta} \right) y(t+\theta) d\theta \\ &= \left[F(0) - F(-h) - \int_{-h}^0 \left(\frac{dF(\theta)}{d\theta} \right) d\theta \right] c. \end{aligned}$$

Como la expresión dentro del paréntesis cuadrado es igual a cero se sigue que la función $y(t) = c$, $t \in [-h, \infty)$ es solución de (3.6) con condición inicial $\varphi(\theta) = c$, $t \in [-h, 0]$.

De este modo, se tiene que $y_t(\varphi) = y(t+\theta, \varphi) = c$, $\theta \in [-h, 0]$ para $t \geq 0$ y por tanto

$$\|y_t(\varphi)\|_h = \sup_{\theta \in [-h, 0]} \|y(t+\theta, \varphi)\| = \|c\|,$$

y

$$\|\varphi\|_h = \sup_{\theta \in [-h, 0]} \|\varphi(\theta)\| = \|c\|.$$

Así, no es posible encontrar constantes $\alpha > 0$ y $\mu \geq 1$ tales que la desigualdad

$$\|y_t(\varphi)\|_h = \|c\| \leq \mu \|\varphi\|_h e^{-\alpha t} = \mu \|c\| e^{-\alpha t},$$

sea válida para todo $t \geq 0$. Luego entonces, de acuerdo a la Definición [1](#) se sigue que el sistema [\(3.6\)](#) no es exponencialmente estable.

Este hecho, de no poder investigar la estabilidad de SIR de la forma [\(3.1\)](#) mediante el estudio de la estabilidad del SDR [\(3.6\)](#), obtenido de [\(3.1\)](#) mediante diferenciación directa, motivó el estudio de SIR en su forma integral original.

Así, en [\[6, 13, 14\]](#) se presentan varias condiciones necesarias y/o suficientes para la estabilidad exponencial de SIR de la forma [\(3.1\)](#) con kernel constante y con uno o varios retardos. En [\[23\]](#) se desarrolla la extensión de la teoría de Lyapunov-Krasovskii para SDR al caso de SIR de la forma [\(3.1\)](#). Los resultados expuestos en [\[23\]](#) son fundamentales para el presente trabajo de tesis y serán revisados en la siguiente sección del capítulo.

En el presente trabajo de tesis consideramos el caso particular del SIR [\(3.1\)](#) donde $F(\theta) \equiv F \in \mathbb{R}^{n \times n}$, es decir, el SIR siguiente:

$$x(t) = F \int_{-h}^0 x(t + \theta) d\theta, \quad t \geq 0. \quad (3.16)$$

Como mencionamos, aunque el sistema [\(3.16\)](#) es el caso matricial más sencillo de SIR, la obtención de resultados sobre la construcción de matrices de Lyapunov para [\(3.16\)](#) es un problema abierto y no trivial.

3.4. Condiciones de estabilidad para sistemas integrales con retardo

En [13] se presentan condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad de (3.16). Estas condiciones fueron obtenidas utilizando herramientas frecuenciales y son de fundamental importancia para el enfoque de matrices y funcionales de Lyapunov-Krasovskii para (3.16). La función característica asociada a (3.16) es

$$F(s) = \det \left(I - \frac{1 - e^{-hs}}{s} F \right). \quad (3.17)$$

Lema 5 [13] *El sistema (3.16) es exponencialmente estable si y sólo si todos los ceros de la función característica (3.17) tienen parte real negativa.*

Sean z_1, z_2, \dots, z_n valores propios de la matriz F , entonces

$$\psi(s) = \det(F(s)) = \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{1 - e^{-hs}}{s} z_j \right). \quad (3.18)$$

Lema 6 [13] *Sea z un número complejo y $h > 0$. Todos los ceros de la función entera*

$$\phi(s) = 1 - \frac{1 - e^{-hs}}{s} z, \quad (3.19)$$

se encuentran en el semiplano izquierdo abierto del plano complejo si y sólo si z está dentro del dominio abierto Γ_h (ver Fig. 3.1) cuya frontera tiene la parametrización siguiente:

$$\partial\Gamma_h = \left\{ z = \frac{\omega \sin(h\omega)}{2(1 - \cos(h\omega))} + i \frac{\omega}{2} \mid \omega \in \left(-\frac{2\pi}{h}, \frac{2\pi}{h} \right) \right\}. \quad (3.20)$$

Utilizando el Lema anterior y (3.18) se obtiene el siguiente resultado que proporciona condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad de (3.16)

Teorema 7 [13] *El sistema (3.16) es exponencialmente estable si y sólo si todos los valores propios de F están dentro del dominio abierto Γ_h .*

Los autores hacen una observación importante sobre la región, mientras mas pequeño sea el

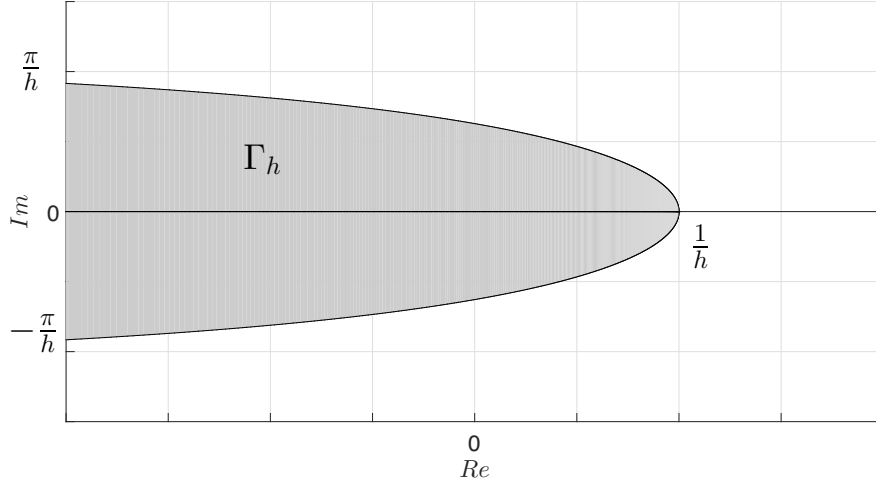


Figura 3.1: Región de estabilidad Γ_h del SIR (3.16).

retardo h la región Γ_h será más grande, en otras palabras, si $h \rightarrow +0$, el dominio tiende a todo el plano complejo.

Cabe resaltar que para el caso escalar de SIR, es decir, $F \in \mathbb{R}$, la región de estabilidad está definida por los parámetros de F y retardo h tales que $Fh < 1$.

3.5. Funcionales y matrices de Lyapunov

En esta sección revisaremos con más detalle los resultados principales en [23] sobre el caso particular del SIR (3.16).

El siguiente resultado proporciona condiciones suficientes de Lyapunov para la estabilidad exponencial de (3.16).

Teorema 8 [23] *El sistema (3.16) es exponencialmente estable si existe una funcional continua $v : \mathcal{PC} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $t \mapsto v(x_t(\varphi))$ es diferenciable y se satisfacen las condiciones siguientes:*

1. $\alpha_1 \int_{-h}^0 \|\varphi(\theta)\|^2 d\theta \leq v(\varphi) \leq \alpha_2 \int_{-h}^0 \|\varphi(\theta)\|^2 d\theta$, para algunas constantes $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2$,
2. $\frac{d}{dt} v(x_t(\varphi)) \leq -\beta \int_{-h}^0 \|x(t+\theta, \varphi)\|^2 d\theta$, para una constante $\beta > 0$.

En [23] se aborda el problema converso al Teorema 8. Es decir, dado un sistema de la forma (3.16) exponencialmente estable se formula el problema de construir una funcional

$v : \mathcal{PC} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface las condiciones de Teorema [8](#). Para esto, primeramente se define una funcional $w : \mathcal{PC} \rightarrow \mathbb{R}_+$ de la forma

$$w(\varphi) = \varphi^T(-h)W_0\varphi(-h) + \int_{-h}^0 \varphi^T(\theta)W_1\varphi(\theta)d\theta, \quad (3.21)$$

donde W_0 y W_1 son matrices definidas positivas.

Proposición 1 [\[23\]](#) Sea el sistema [\(3.16\)](#) exponencialmente estable. Entonces existe una funcional continua $v : \mathcal{PC} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $t \mapsto v(x_t(\varphi))$ es diferenciable y satisface

$$\frac{d}{dt}v(x_t(\varphi)) = -w(x_t(\varphi)), \quad t \geq 0. \quad (3.22)$$

La funcional es de la forma

$$\begin{aligned} v(\varphi) = & \left(F \int_{-h}^0 \varphi(\theta)d\theta \right)^T U(0) \left(F \int_{-h}^0 \varphi(\theta)d\theta \right) \\ & - 2 \left(F \int_{-h}^0 \varphi(\theta)d\theta \right)^T \int_{-h}^0 U(-h-\theta)F\varphi(\theta)d\theta \\ & + \int_{-h}^0 \varphi^T(\theta_1)F^T \left(\int_{-h}^0 U(\theta_1-\theta_2)F\varphi(\theta_2)d\theta_2 \right) d\theta_1 \\ & - \int_{-h}^0 \varphi^T(\theta_1)F^T K_0^T W \left[\int_{-h}^0 \left(\int_{-h-\theta_2}^{\theta_1-\theta_2} K(\xi)d\xi \right) F\varphi(\theta_2)d\theta_2 \right] d\theta_1 \\ & + \int_{-h}^0 \varphi^T(\theta) [W_0 + (\theta+h)W_1] \varphi(\theta)d\theta, \end{aligned} \quad (3.23)$$

donde para $\tau \in \mathbb{R}$,

$$U(\tau) = \int_0^\infty K^T(t)WK(t+\tau)dt, \quad (3.24)$$

con $W = W_0 + hW_1$.

Cuando el sistema [\(3.16\)](#) es exponencialmente estable la matriz $K(t)$ satisface la siguiente cota superior exponencial:

$$\|K(t)\| \leq \mu e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0. \quad (3.25)$$

De este modo, la integral impropia del lado derecho de la matriz [\(3.24\)](#) está bien definida.

Se muestra en [\[23\]](#) que si [\(3.16\)](#) es exponencialmente estable entonces la funcional [\(3.23\)](#)

satisface las condiciones del Teorema 8 llevando así a un resultado converso como se enuncia en el teorema siguiente:

Teorema 9 [23] Sea el SIR (3.16) exponencialmente estable. Entonces para cualquier par de matrices definidas positivas W_0 y W_1 existen constantes positivas α_1 , α_2 y β tales que la funcional (3.23) satisface las condiciones del Teorema 8

Claramente, la función matricial $U(\tau)$ dada por (3.24) es fundamental para construir la funcional $v(\varphi)$ en (3.23). Esta característica especial de la funcional (3.23) es análoga a la de las funcionales de Lyapunov-Krasovskii de tipo completo para SDR lineales cuya construcción depende de una función matricial llamada matriz de Lyapunov para SDR, ver [12]. Por lo tanto, llamaremos a la funcional $v(x_t)$ definida por (3.23) como *funcional de Lyapunov-Krasovskii de tipo completo* del SIR (3.16) y a la función matricial $U(\tau)$ definida por (3.24) como *matriz de Lyapunov* del SIR (3.16).

Se enuncia formalmente el concepto de matriz de Lyapunov en la definición siguiente.

Definición 2 La matriz $U(\tau)$ dada por (3.24) es la matriz de Lyapunov del sistema (3.16) asociada con una matriz simétrica definida positiva W .

El resultado siguiente se demostró en [23].

Lema 7 La matriz de Lyapunov $U(\tau)$ satisface las condiciones siguientes:

$$U(\tau) = \left(\int_{-h}^0 U(\tau + \theta) d\theta \right) F, \quad \tau \geq 0. \quad (3.26)$$

$$U(\tau) = U^T(-\tau) + K_0^T W \int_0^\tau K(\xi) d\xi, \quad \tau \in [0, h]. \quad (3.27)$$

$$-K^T(0)WK(0) = [U(0)F - U(-h)F]^T + [U(0)F - U(-h)F]. \quad (3.28)$$

Las condiciones (3.26), (3.27) y (3.28) respectivamente se llaman *la propiedad dinámica*, *la propiedad de simetría* y *la propiedad algebraica* de la matriz de Lyapunov.

A pesar del hecho que la funcional (3.23) fue calculada a partir de la ecuación (3.22), es necesario demostrar directamente que la funcional satisface dicha ecuación, para este fin se hace uso de las propiedades (3.26), (3.27) y (3.28).

Lema 8 La funcional (3.23), donde $U(\tau)$ está dada por (3.24), satisface la igualdad siguiente:

$$\frac{d}{dt}v(x_t) = -w(x_t), \quad t \geq 0.$$

Demostración. Dada $\varphi \in \mathcal{PC}$ sea $x(t, \varphi)$ la solución del SIR (3.16), entonces la funcional (3.23) se puede escribir a lo largo de las soluciones de (3.16) como

$$\begin{aligned} v(x_t) = & \underbrace{\left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right)^T U(0) \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right)}_{R_1(t)} \\ & - 2 \underbrace{\left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right)^T \int_{-h}^0 U(-h-\theta) F x(t+\theta) d\theta}_{R_2(t)} \\ & + \underbrace{\int_{-h}^0 x^T(t+\theta_1) F^T \left(\int_{-h}^0 U(\theta_1-\theta_2) F x(t+\theta_2) d\theta_2 \right) d\theta_1}_{R_3(t)} \\ & + \underbrace{\int_{-h}^0 x^T(t+\theta) [W_0 + (\theta+h)W_1] x(t+\theta) d\theta}_{R_4(t)} \\ & - \underbrace{\int_{-h}^0 x^T(t+\theta_1) F^T K_0^T W \int_{-h}^0 \left(\int_{-h-\theta_2}^{\theta_1-\theta_2} K(\eta) d\eta \right) F x(t+\theta_2) d\theta_2 d\theta_1}_{R_5(t)}. \end{aligned}$$

A continuación calcularemos las derivadas de cada uno de los términos $R_j(t)$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$.

La derivada del término $R_1(t)$, haciendo el cambio de variable de integración $\xi = t + \theta$, es

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}R_1(t) &= \frac{d}{dt} \left(\left(F \int_{t-h}^t x(\xi) d\xi \right)^T U(0) \left(F \int_{t-h}^t x(\xi) d\xi \right) \right) = \\ &= 2 \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right)^T U(0) (F [x(t) - x(t-h)]). \end{aligned}$$

La derivada del término $R_2(t)$, haciendo el cambio de variable de integración $\xi = t + \theta$ en ambas integrales del lado derecho, es la siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}R_2(t) &= -2 \left(\frac{d}{dt} \left(F \int_{t-h}^t x(\xi) d\xi \right)^T \right) \int_{t-h}^t U(-h-\xi+t) Fx(\xi) d\xi \\
&\quad -2 \left(F \int_{t-h}^t x(\xi) d\xi \right)^T \left(\frac{d}{dt} \int_{t-h}^t U(-h-\xi+t) Fx(\xi) d\xi \right) \\
&= -2 (F[x(t) - x(t-h)])^T \int_{t-h}^t U(-h-\xi+t) Fx(\xi) d\xi \\
&\quad -2 \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right)^T \left(U(-h)Fx(t) - U(0)Fx(t-h) \right. \\
&\quad \left. + \int_{t-h}^t \frac{\partial}{\partial t} U(-h-\xi+t) Fx(\xi) d\xi \right).
\end{aligned}$$

La derivada del término $R_3(t)$, haciendo los cambios de variable de integración $\xi_1 = t + \theta_1$ y $\xi_2 = t + \theta_2$, es

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}R_3(t) &= \frac{d}{dt} \left[\int_{t-h}^t x^T(\xi_1) F^T \left(\int_{t-h}^t U(\xi_1 - \xi_2) Fx(\xi_2) d\xi_2 \right) d\xi_1 \right] \\
&= x^T(t) F^T \int_{t-h}^t U(t-\xi) Fx(\xi) d\xi - x^T(t-h) F^T \int_{t-h}^t U(t-h-\xi) Fx(\xi) d\xi \\
&\quad + \int_{t-h}^t x^T(\xi_1) F^T \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{t-h}^t U(\xi_1 - \xi_2) Fx(\xi_2) d\xi_2 \right) d\xi_1 \\
&= x^T(t) F^T \int_{t-h}^t U(t-\xi) Fx(\xi) d\xi - x^T(t-h) F^T \int_{t-h}^t U(t-h-\xi) Fx(\xi) d\xi \\
&\quad + \int_{t-h}^t x^T(\xi) F^T (U(\xi-t) Fx(t) - U(\xi-t+h) Fx(t-h)) d\xi_1 \\
&= x^T(t) F^T \int_{t-h}^t (U(t-\xi) + U^T(\xi-t)) Fx(\xi) d\xi \\
&\quad - x^T(t-h) F^T \int_{t-h}^t (U(t-h-\xi) + U^T(\xi-t+h)) Fx(\xi) d\xi.
\end{aligned}$$

Para el término $R_4(t)$ se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}R_4(t) &= x^T(t) (W_0 + hW_1) x(t) - x^T(t-h) W_0 x(t-h) - \int_{t-h}^t x^T(\xi) W_1 x(\xi) d\xi \\
&= x^T(t) W x(t) - w(x_t).
\end{aligned}$$

Finalmente la derivada del término $R_5(t)$, haciendo el cambio de variable de integración

$\xi_1 = t + \theta_1$ y $\xi_2 = t + \theta_2$, es la siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}R_5(t) &= -\frac{d}{dt} \left[\int_{t-h}^t x^T(\xi_1) F^T K_0^T W \int_{t-h}^t \left(\int_{-h-\xi_2+t}^{\xi_1-\xi_2} K(\eta) d\eta \right) Fx(\xi_2) d\xi_2 d\xi_1 \right] \\
&= -x^T(t) F^T K_0^T W \int_{t-h}^t \left(\int_{-h-\xi+t}^{t-\xi} K(\eta) d\eta \right) Fx(\xi) d\xi \\
&\quad + x^T(t-h) F^T K_0^T W \int_{t-h}^t \left(\int_{-h-\xi+t}^{t-h-\xi} K(\eta) d\eta \right) Fx(\xi) d\xi \\
&\quad - \int_{t-h}^t x^T(\xi_1) F^T K_0^T W \left(\frac{\partial}{\partial t} \int_{t-h}^t \left(\int_{-h-\xi_2+t}^{\xi_1-\xi_2} K(\eta) d\eta \right) Fx(\xi_2) d\xi_2 \right) d\xi_1 \\
&= -x^T(t) F^T K_0^T W \int_{t-h}^t \left(\int_{-h-\xi+t}^{t-\xi} K(\eta) d\eta \right) Fx(\xi) d\xi \\
&\quad - \int_{t-h}^t x^T(\xi) F^T K_0^T W \left(\int_{-h}^{\xi-t} K(\eta) d\eta Fx(t) - \int_0^{\xi-t+h} K(\eta) d\eta Fx(t-h) \right) d\xi \\
&\quad + \int_{t-h}^t x^T(\xi_1) d\xi_1 F^T K_0^T W \int_{t-h}^t K(t-h-\xi_2) Fx(\xi_2) d\xi_2.
\end{aligned}$$

Recolectando las derivadas de los términos $R_j(t)$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}v(x_t) &= 2 \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right)^T U(0) F \left[x(t) - \cancel{x(t-h)} \right]^{(1)} \\
&\quad - 2x^T(t) F^T \int_{t-h}^t U(t-h-\xi) Fx(\xi) d\xi + 2x^T(t-h) F^T \int_{t-h}^t U(t-h-\xi) Fx(\xi) d\xi \\
&\quad - 2 \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right)^T U(-h) Fx(t) + 2 \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right)^T U^T(0) Fx(t-h) \\
&\quad - 2 \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right)^T \int_{t-h}^t \frac{\partial}{\partial t} U(t-h-\xi) Fx(\xi) d\xi \\
&\quad + x^T(t) F^T \int_{t-h}^t (U(t-\xi) + U^T(\xi-t)) Fx(\xi) d\xi \\
&\quad - x^T(t-h) F^T \int_{t-h}^t (U(t-h-\xi) + U^T(\xi-t+h)) Fx(\xi) d\xi \\
&\quad + x^T(t) Wx(t) - w(x_t) - x^T(t) F^T K_0^T W \int_{t-h}^t \left(\int_{-h-\xi+t}^{t-\xi} K(\eta) d\eta \right) Fx(\xi) d\xi \\
&\quad - \int_{t-h}^t x^T(\xi) F^T K_0^T W \int_{-h}^{\xi-t} K(\eta) d\eta d\xi Fx(t) \\
&\quad + \int_{t-h}^t x^T(\xi) F^T K_0^T W \int_0^{\xi-t+h} K(\eta) d\eta d\xi Fx(t-h)
\end{aligned} \tag{1}$$

$$+ \int_{t-h}^t x^T(\xi_1) d\xi_1 F^T K_0^T W \int_{t-h}^t K(t-h-\xi_2) Fx(\xi_2) d\xi_2.$$

Agrupando términos semejantes y usando las propiedades algebraica (3.28) y de simetría (3.27) se obtiene la igualdad siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v(x_t) &= \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right)^T \underbrace{\left[(U(0) - U(-h))F + F^T (U(0) - U(-h))^T \right]}_{-K^T(0)WK(0)} \\ &\times \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right) - 2x^T(t)F^T \int_{t-h}^t U(t-h-\xi) Fx(\xi) d\xi \\ &+ 2x^T(t-h)F^T \int_{t-h}^t U(t-h-\xi) Fx(\xi) d\xi \\ &- 2 \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right)^T \underbrace{\int_{t-h}^t \frac{\partial}{\partial t} U(t-h-\xi) Fx(\xi) d\xi}_{\blacksquare} \\ &\underbrace{+ x^T(t)F^T \int_{t-h}^t (U(t-\xi) + U^T(\xi-t)) Fx(\xi) d\xi}_{\blacktriangledown} \\ &- x^T(t-h)F^T \int_{t-h}^t \left(U(t-h-\xi) + \underbrace{U^T(\xi-t+h) - \int_0^{h+\xi-t} K^T(\theta) d\theta WK_0}_{U(t-h-\xi)} \right) Fx(\xi) d\xi \\ &+ x^T(t)Wx(t) - w(x_t) - x^T(t)F^T K_0^T W \int_{t-h}^t \left(\int_{-h-\xi+t}^{t-\xi} K(\eta) d\eta \right) Fx(\xi) d\xi \\ &- \int_{t-h}^t x^T(\xi) F^T K_0^T W \int_{-h}^{\xi-t} K(\eta) d\eta d\xi Fx(t) \\ &+ \int_{t-h}^t x^T(\xi_1) d\xi_1 F^T K_0^T W \int_{t-h}^t K(t-h-\xi_2) Fx(\xi_2) d\xi_2. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Considere el término \blacksquare . Para $\xi \in [t-h, t]$ se tiene que $t-h-\xi \in [-h, 0]$, usando la propiedad de simetría (3.27) se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} U(t-h-\xi) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(U^T(h+\xi-t) - \int_0^{h+\xi-t} K^T(\eta) d\eta WK_0 \right) \\ &= - \frac{dU^T(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=h+\xi-t} + K^T(\tau)WK_0 \Big|_{\tau=h+\xi-t}. \end{aligned}$$

Calculando la derivada

$$\begin{aligned} -\frac{dU^T(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=h+\xi-t} &= -\frac{d}{d\tau} \left(F^T \int_{-h}^0 U^T(\tau+\theta) d\theta \right) \Big|_{\tau=h+\xi-t} \\ &= -F^T [U^T(h+\xi-t) - U^T(\xi-t)]. \end{aligned}$$

Finalmente se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} U^T(h+\xi-t) = -F^T [U^T(h+\xi-t) - U^T(\xi-t)] + K^T(h+\xi-t)WK_0. \quad (3.30)$$

Ahora, considere el término (▼). Dado que $t-\xi \in [0, h]$ para $\xi \in [t-h, t]$, entonces usando la propiedad de simetría (3.27) el término (▼) se escribe como

$$\begin{aligned} x^T(t)F^T \int_{t-h}^t (U(t-\xi) + U^T(\xi-t)) Fx(\xi) d\xi &= 2x^T(t)F^T \int_{t-h}^t U^T(\xi-t) Fx(\xi) d\xi \\ -x^T(t)F^T K_0^T W \int_{t-h}^t \left(\int_0^{t-\xi} K(\theta) d\theta \right) Fx(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Sustituyendo (3.30) y (3.31) en (3.29) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v(x_t) &= - \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right)^T K^T(0)WK(0) \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right) \\ &\quad - 2x^T(t)F^T \int_{t-h}^t U(t-h-\xi) Fx(\xi) d\xi + 2x^T(t-h)F^T \int_{t-h}^t U(t-h-\xi) \overset{(1)}{Fx(\xi) d\xi} \\ &\quad + 2 \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right)^T F^T \int_{t-h}^t \left(\underbrace{U^T(h+\xi-t)}_{\square} - \underbrace{U^T(\xi-t)}_{\nabla} \right) Fx(\xi) d\xi \\ &\quad - 2 \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right)^T \int_{t-h}^t K^T(h+\xi-t)WK_0 Fx(\xi) d\xi \\ &\quad + 2x^T(t)F^T \int_{t-h}^t U(t-\xi) Fx(\xi) d\xi - x^T(t)F^T K_0^T W \int_{t-h}^t \left(\int_0^{t-\xi} K(\theta) d\theta \right) Fx(\xi) d\xi \\ &\quad - 2x^T(t-h)F^T \int_{t-h}^t U(t-h-\xi) \overset{(1)}{Fx(\xi) d\xi} \\ &\quad + x^T(t)Wx(t) - w(x_t) - x^T(t)F^T K_0^T W \int_{t-h}^t \left(\int_{t-h-\xi}^{t-\xi} K(\eta) d\eta \right) Fx(\xi) d\xi \\ &\quad - \int_{t-h}^t x^T(\xi)F^T K_0^T W \int_{-h}^{\xi-t} K(\eta) d\eta d\xi Fx(t) \end{aligned}$$

$$+ \int_{t-h}^t x^T(\xi_1) d\xi_1 F^T K_0^T W \int_{t-h}^t K(t-h-\xi_2) Fx(\xi_2) d\xi_2. \quad (3.32)$$

Considere el término (\square) de la ecuación (3.32). Dado que $h + \xi - t \in [0, h]$ cuando $\xi \in [t-h, t]$, el término (\square) , usando la propiedad de simetría, satisface la ecuación siguiente:

$$U^T(h + \xi - t) = U(t - h - \xi) + \int_0^{h+\xi-t} K^T(\theta) d\theta W K_0. \quad (3.33)$$

Ahora, considere el término (∇) de la ecuación (3.32). Ya que $\xi - t \in [-h, 0]$ cuando $\xi \in [t-h, t]$, el término (∇) , usando la propiedad de simetría, satisface la ecuación siguiente:

$$U^T(\xi - t) = U(t - \xi) - K_0^T W \int_0^{t-\xi} K(\theta) d\theta. \quad (3.34)$$

Sustituyendo los términos (3.33) y (3.34) en (3.32) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v(x_t) &= - \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right)^T K^T(0) W K(0) \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right) \\ &\quad - 2x^T(t) F^T \int_{t-h}^t \underbrace{U(t-h-\xi)}^{(1)} Fx(\xi) d\xi \\ &\quad + 2 \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right)^T F^T \int_{t-h}^t \underbrace{U(t-h-\xi)}^{(1)} Fx(\xi) d\xi \\ &\quad + 2 \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right)^T F^T \int_{t-h}^t \int_0^{h+\xi-t} K^T(\theta) d\theta W K_0 Fx(\xi) d\xi \\ &\quad - 2 \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right)^T F^T \int_{t-h}^t \underbrace{U(t-\xi)}^{(2)} Fx(\xi) d\xi \\ &\quad + 2 \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right)^T F^T \int_{t-h}^t K_0^T W \int_0^{t-\xi} K(\theta) d\theta Fx(\xi) d\xi \\ &\quad - 2 \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right)^T \int_{t-h}^t \underbrace{K^T(h+\xi-t) W K_0}_{\circ} Fx(\xi) d\xi \\ &\quad + 2x^T(t) F^T \int_{t-h}^t \underbrace{U(t-\xi)}^{(2)} Fx(\xi) d\xi - x^T(t) F^T K_0^T W \int_{t-h}^t V(t-\xi) Fx(\xi) d\xi \\ &\quad + x^T(t) W x(t) - w(x_t) - x^T(t) F^T K_0^T W \int_{t-h}^t \left(\underbrace{\int_{t-h-\xi}^{t-\xi} K(\eta) d\eta}_{\blacktriangle} \right) Fx(\xi) d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{t-h}^t x^T(\xi) F^T K_0^T W \underbrace{\int_{-h}^{\xi-t} K(\eta) d\eta}_{\blacklozenge} d\xi F x(t) \\
& + \int_{t-h}^t x^T(\xi_1) d\xi_1 F^T K_0^T W \underbrace{\int_{t-h}^t K(t-h-\xi_2) F x(\xi_2) d\xi_2}_{\blacktriangleright}. \tag{3.35}
\end{aligned}$$

Considere el término (\blacklozenge) de la ecuación (3.35). Dado que $\eta \in [-h, h]$ cuando $\xi \in [t-h, t]$, el término (\blacklozenge) se puede escribir como

$$\int_{t-h-\xi}^{t-\xi} K(\eta) d\eta = \int_{t-h-\xi}^0 K(\eta) d\eta + \int_0^{t-\xi} K(\eta) d\eta.$$

Como $t-h-\xi \in [-h, 0]$ cuando $\xi \in [t-h, t]$ entonces $K(\eta) = -K_0$ cuando $\eta \in [t-h-\xi, 0]$ y por tanto se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{t-h-\xi}^{t-\xi} K(\eta) d\eta &= -K_0 \int_{t-h-\xi}^0 d\eta + \int_0^{t-\xi} K(\eta) d\eta \\
&= (t-h-\xi)K_0 + \int_0^{t-\xi} K(\eta) d\eta. \tag{3.36}
\end{aligned}$$

Considere el término (\blacklozenge) de la ecuación (3.35). Dado que $\xi-t \in [-h, 0]$ cuando $\xi \in [t-h, t]$ entonces $K(\eta) = -K_0$ cuando $\eta \in [-h, 0]$ y entonces el término (\blacklozenge) se escribe como

$$\int_{-h}^{\xi-t} K(\eta) d\eta = -K_0 \int_{-h}^{\xi-t} d\eta - K_0(h+\xi-t). \tag{3.37}$$

Ahora considere el término (\blacktriangleright) de la ecuación (3.35). Dado que $t-h-\xi_2 \in [-h, 0]$ cuando $\xi_2 \in [t-h, t]$ se sigue que $K(t-h-\xi_2) = -K_0$ y entonces (\blacktriangleright) se escribe como

$$\int_{t-h}^t K(t-h-\xi_2) F x(\xi_2) d\xi_2 = -K_0 F \int_{t-h}^t x(\xi_2) d\xi_2. \tag{3.38}$$

Por último, considere el término \circ de la ecuación (3.35). Ya que $h+\xi-t \in [0, h]$ cuando $\xi \in [t-h, t]$ el término \circ satisface la ecuación siguiente:

$$K^T(h+\xi-t) = F^T \int_{-h}^0 K^T(h+\xi-t+\theta) d\theta = F^T \int_{\xi-t}^{h+\xi-t} K^T(\eta) d\eta$$

$$\begin{aligned}
&= F^T \int_0^{h+\xi-t} K^T(\eta) d\eta + F^T \int_{\xi-t}^0 K^T(\eta) d\eta \\
&= F^T \int_0^{h+\xi-t} K^T(\eta) d\eta + (\xi-t) F^T K_0^T.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Sustituyendo los términos (3.36), (3.37), (3.38) y (3.39) en (3.35) se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}v(x_t) &= - \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right)^T K^T(0) W K(0) \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right) \\
&+ 2 \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right)^T F^T \int_{t-h}^t \int_0^{h+\xi-t} K^T(\theta) d\theta W K_0 F x(\xi) d\xi - \\
&+ 2 \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right)^T F^T \int_{t-h}^t K_0^T W \left(\int_0^{t-\xi} K(\theta) d\theta \right)^{(1)} F x(\xi) d\xi - \\
&- 2 \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right)^T \int_{t-h}^t \left(F^T \int_0^{h+\xi-t} K^T(\eta) d\eta + (\xi-t) F^T K_0^T \right) W K_0 F x(\xi) d\xi \\
&- x^T(t) F^T K_0^T W \int_{t-h}^t \left(\int_0^{t-\xi} K(\theta) d\theta \right)^{(1)} F x(\xi) d\xi + x^T(t) W x(t) - w(x_t) \\
&- x^T(t) F^T K_0^T W \int_{t-h}^t \left((t-h-\xi) K_0 + \int_0^{t-\xi} K(\theta) d\theta \right)^{(1)} F x(\xi) d\xi \\
&+ \int_{t-h}^t x^T(\xi) F^T K_0^T W (K_0(h+\xi-t) d\xi F x(t)) \\
&- \int_{t-h}^t x^T(\xi_1) d\xi_1 F^T K_0^T W \left(K_0 F \int_{t-h}^t x(\xi_2) d\xi_2 \right).
\end{aligned}$$

Simplificando términos semejantes y reescribiendo la igualdad anterior se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}v(x_t) &= - \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right)^T K^T(0) W K(0) \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right) \\
&+ 2 \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right)^T F^T \int_{t-h}^t \int_0^{h+\xi-t} K^T(\theta) d\theta^{(1)} W K_0 F x(\xi) d\xi \\
&- 2 \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right)^T \int_{t-h}^t \left(F^T \int_0^{h+\xi-t} K^T(\eta) d\eta \right)^{(1)} + \\
&+ (\xi-t)^{(2)} F^T K_0^T \left(W K_0 F x(\xi) d\xi \right) \\
&+ x^T(t) W x(t) - w(x_t) + 2x^T(t) F^T K_0^T W h K_0 \left(F \int_{t-h}^t x(\xi) d\xi \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2x^T(t)F^T K_0^T W K_0 F \int_{t-h}^t \overset{(2)}{(\xi \rightarrow t)} x(\xi) d\xi \\
& - \left(F \int_{t-h}^t x(\xi_1) d\xi_1 \right)^T K_0^T W K_0 \left(F \int_{t-h}^t x(\xi_2) d\xi_2 \right).
\end{aligned}$$

De la igualdad anterior se sigue que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}v(x_t) &= - \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right)^T K^T(0) W K(0) \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right) \\
& + x^T(t) W x(t) - w(x_t) + 2x^T(t) F^T K_0^T W h K_0 \left(F \int_{t-h}^t x(\xi) d\xi \right) \\
& - \left(F \int_{t-h}^t x(\xi_1) d\xi_1 \right)^T K_0^T W K_0 \left(F \int_{t-h}^t x(\xi_2) d\xi_2 \right).
\end{aligned}$$

De la igualdad $K(0) = I - K_0$ se obtiene que $K^T(0) W K(0) = W - K_0^T W - W K_0 + K_0^T W K_0$. Entonces usando el hecho que $x(t) = \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right)$ se sigue que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}v(x_t) &= - \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right)^T \left(\overset{(1)}{W} - K_0^T W - W K_0 \right) \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right) \\
& + x^T(t) \overset{(1)}{W} x(t) - w(x_t) + 2x^T(t) F^T K_0^T W h K_0 \left(F \int_{t-h}^t x(\xi) d\xi \right) \\
& - 2 \left(F \int_{t-h}^t x(\xi_1) d\xi_1 \right)^T K_0^T W K_0 \left(F \int_{t-h}^t x(\xi_2) d\xi_2 \right),
\end{aligned}$$

factorizando elementos comunes

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}v(x_t) &= -w(x_t) + 2 \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right)^T \overset{(1)}{W K_0} \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right) \\
& - 2 \left(F \int_{t-h}^t x(\xi_1) d\xi_1 \right)^T \underbrace{(I - hF^T)}_I K_0^T \overset{(1)}{W K_0} \left(F \int_{t-h}^t x(\xi_2) d\xi_2 \right),
\end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. ■

Con estos resultados preliminares sobre la teoría de Lyapunov-Krasovskii para SIR, abordaremos en el siguiente capítulo el trabajo de investigación sobre matrices de Lyapunov para SIR.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS PRINCIPALES

En este capítulo se presentan los resultados principales obtenidos en la tesis. Se presentan nuevas propiedades de la matriz de Lyapunov para el SIR. Estas propiedades son útiles en la demostración de la unicidad de matrices de Lyapunov para SIR exponencialmente estables, el cual es uno de los resultados principales de la tesis. También se aborda el problema de construcción numérica de matrices de Lyapunov. Primeramente, se muestra que estas matrices de Lyapunov no pueden construirse mediante los métodos existentes para sistemas diferenciales. Posteriormente, se presenta un algoritmo numérico para construir aproximaciones lineales a pedazos de la función inicial desconocida de la ecuación dinámica de la matriz de Lyapunov. Con el cálculo de la función inicial se presenta un algoritmo para obtener la correspondiente solución de la ecuación dinámica. Adicionalmente se presentan un método para evaluar la calidad de la aproximación numérica. Finalmente se presentan algunos ejemplos numéricos y algunas aplicaciones como el cálculo de cotas exponenciales y condiciones de estabilidad robusta que ilustran la utilidad de los algoritmos propuestos.

4.1. Nuevas propiedades de la matriz de Lyapunov

Primero, se observa que la matriz $K(t)$, como sucede con las soluciones de (3.16), es uniformemente continua para $t > 0$ y en $t = 0$ presenta una discontinuidad de tipo salto. Esta

discontinuidad está dada por

$$\Delta K(0) = K(0) - K(-0) = I - K_0 - (-K_0) = I.$$

Por otro lado, la matriz de Lyapunov $U(\tau)$ es uniformemente continua para todo $\tau \in [0, \infty)$ tal como se muestra en el resultado siguiente.

Lema 9 *La matriz de Lyapunov $U(\tau)$ es uniformemente continua para todo $\tau \in [0, \infty)$.*

Demostración. Por la continuidad uniforme de $K(t)$ para $t > 0$, se sigue que para cualquier $t_0 > 0$ y $\rho > 0$ existe $\delta = \delta(\rho) > 0$ tal que $t \geq t_0$ y $t - t_0 < \delta$ implica $\|K(t) - K(t_0)\| < \rho$. Ahora, para cualquier $\tau_0 \in [0, \infty)$ y $\tau \geq \tau_0$ se tiene que

$$\|U(\tau) - U(\tau_0)\| \leq \int_0^\infty \|K^T(t)\| \|W\| \|K(t + \tau) - K(t + \tau_0)\| dt.$$

Si $\tau - \tau_0 = (t + \tau) - (t + \tau_0) < \delta$ entonces $\|K(t + \tau) - K(t + \tau_0)\| < \rho$. De esto y de la cota superior exponencial de $K(t)$ en (3.25) se obtiene

$$\|U(\tau) - U(\tau_0)\| \leq \rho \|W\| \mu \int_0^\infty e^{-\alpha t} dt.$$

Calculando la integral del lado derecho de la desigualdad anterior

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} dt = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} \Big|_0^\infty = \frac{1}{\alpha}.$$

De este modo se obtiene la desigualdad siguiente:

$$\|U(\tau) - U(\tau_0)\| < \frac{\rho \|W\| \mu}{\alpha}, \quad \text{para } \tau - \tau_0 < \delta.$$

Dado $\varepsilon > 0$, sea $\rho = \rho(\varepsilon) = \frac{\alpha \varepsilon}{\mu \|W\|}$. Entonces, para este $\rho > 0$ existe $\delta = \delta(\rho) > 0$ tal que $\tau - \tau_0 < \delta$ implica $\|U(\tau) - U(\tau_0)\| < \varepsilon$, lo que muestra la continuidad uniforme de $U(\tau)$ para $\tau \in [0, \infty)$. ■

De la propiedad dinámica (3.26), la propiedad de simetría (3.27) y la continuidad uniforme de la matriz de Lyapunov se tiene el resultado siguiente.

Lema 10 La matriz de Lyapunov $U(\tau)$ es infinitamente diferenciable para $\tau \in (0, h)$.

Demostración. Para $\tau \in (0, h)$ de (3.26) se tiene

$$U(\tau) = \left(\int_{\tau-h}^0 \Phi(\xi) d\xi \right) F + \left(\int_0^\tau U(\xi) d\xi \right) F.$$

Donde $\Phi(\xi)$, $\xi \in [\tau-h, 0]$ es la función inicial de la matriz de Lyapunov $U(\tau)$. Claramente, el lado derecho de la ecuación anterior es diferenciable. Por lo tanto, $U(\tau)$ es diferenciable para $\tau \in (0, h)$ y su derivada está dada por

$$\frac{d}{d\tau} U(\tau) = -\Phi(\tau-h)F + U(\tau)F. \quad (4.1)$$

Ahora, por la propiedad de simetría (3.27) se tiene

$$\Phi(-\tau) = U^T(\tau) - \left(\int_0^\tau K^T(\xi) d\xi \right) W K_0. \quad (4.2)$$

De esta ecuación y la continuidad de $U(\tau)$ se concluye que $\Phi(-\tau)$ es también continua. La continuidad de $\Phi(-\tau)$ y $U(\tau)$ en la ecuación (4.1) implica que $U(\tau)$ es continuamente diferenciable para $\tau \in (0, h)$. Esto a su vez de (4.2) implica que $\Phi(-\tau)$ es diferenciable para $\tau \in (0, h)$ y

$$\frac{d}{d\tau} \Phi(-\tau) = \frac{d}{d\tau} U^T(\tau) - K^T(\tau) W K_0. \quad (4.3)$$

De (4.3), la continuidad de $\frac{d}{d\tau} U(\tau)$ y $K(\tau)$ se sigue que $\frac{d}{d\tau} \Phi(-\tau)$ es continua. Al usar estos hechos en (4.1) se puede concluir que $U(\tau)$ es dos veces continuamente diferenciable para $\tau \in (0, h)$. Repitiendo estos argumentos en las ecuaciones (4.1)-(4.3) y teniendo en cuenta el hecho de que $K(t)$ es infinitamente diferenciable para $t > 0$, se llega a la conclusión. ■

Como ocurre en el caso de SDR, la derivada de la matriz de Lyapunov es discontinua en $\tau = 0$. Para los SDR, dicha discontinuidad coincide con la correspondiente propiedad algebraica pero, sin embargo, este no es precisamente el caso para SIR tal como se muestra en el resultado siguiente.

Lema 11 La propiedad algebraica (3.28) se puede escribir como

$$\left(\lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{dU(\tau)}{d\tau} \right) + \left(\lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{dU^T(\tau)}{d\tau} \right) = -K^T(0)WK(0).$$

Entonces, la propiedad de simetría (3.27) implica que la derivada de la matriz de Lyapunov $U(\tau)$ presenta una discontinuidad de tipo salto en $\tau = 0$ determinada por

$$\left(\lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{dU(\tau)}{d\tau} \right) - \left(\lim_{\tau \rightarrow -0} \frac{dU(\tau)}{d\tau} \right) = -K^T(0)W.$$

Demostración. Primero, se observa que

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{dU(\tau)}{d\tau} = [U(0) - U(-h)]F. \quad (4.4)$$

De la propiedad de simetría se sigue que para $\tau > 0$

$$\frac{dU(-\tau)}{d\tau} = \left[\frac{dU(\tau)}{d\tau} \right]^T - K^T(\tau)WK_0,$$

y entonces

$$\lim_{\tau \rightarrow -0} \frac{dU(\tau)}{d\tau} = -F^T [U(0) - U(-h)]^T + K^T(0)WK_0. \quad (4.5)$$

De (4.4) y (4.5) se obtiene

$$\begin{aligned} & \left(\lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{dU(\tau)}{d\tau} \right) - \left(\lim_{\tau \rightarrow -0} \frac{dU(\tau)}{d\tau} \right) \\ &= [U(0) - U(-h)]F + F^T [U(0) - U(-h)]^T - K^T(0)WK_0. \end{aligned}$$

Al usar la propiedad algebraica (3.28) en el lado derecho de la ecuación anterior y teniendo en cuenta que $K(0) = I - K_0$ se llega al resultado. ■

Estas nuevas propiedades, que no han sido reportadas con anterioridad, son una herramienta importante en la obtención de los resultados principales de esta tesis, en particular la unicidad de matrices de Lyapunov como se muestra a continuación.

4.2. Unicidad de la matriz de Lyapunov

La definición de la matriz de Lyapunov por medio de la integral impropia (3.24) tiene las limitaciones de ser válida solo para SIR exponencialmente estables y no ser adecuada para el desarrollo de procedimientos computacionales prácticos. Por lo tanto, siguiendo las ideas en (11) para el caso de SDR, resulta conveniente proponer una nueva definición de la matriz de Lyapunov para SIR con el fin de superar tales limitaciones.

Para este objetivo, primero observamos que el Lema (11) muestra que la propiedad algebraica (3.28) es, de hecho, una consecuencia de la propiedad dinámica (3.26) y de la propiedad de simetría (3.27). Esto indica que la propiedad algebraica (3.28) puede no ser necesaria en el procedimiento para construir la matriz de Lyapunov $U(\tau)$.

Por otro lado, como propiedad de la matriz Lyapunov, la ecuación algebraica (3.28) es útil para calcular la derivada de la funcional (3.23) a lo largo de las soluciones del SIR (3.16) como se mostró en el Lema (8) en el capítulo anterior. De hecho, las propiedades (3.26)-(3.28) son las únicas necesarias para verificar que la derivada de la funcional definida por (3.23) coincide con $w(x_t)$ dada por (3.21) como se muestra a continuación.

Lema 12 *Sea $\bar{U}(\tau)$ solución de la ecuación integral con retardo (3.26) que satisface las ecuaciones (3.27) y (3.28). La funcional $\bar{v}(\varphi)$ definida por la expresión (3.23), donde la matriz $U(\tau)$ es substituida por la matriz $\bar{U}(\tau)$, satisface la ecuación*

$$\frac{d}{dt}\bar{v}(x_t) = -w(x_t), \quad t \geq 0.$$

Demostración. El resultado se puede obtener siguiendo el procedimiento usado en el Lema (8), cambiando $v(x_t)$ por $\bar{v}(x_t)$ y usando las ecuaciones (3.26)-(3.28) para la matriz $\bar{U}(\tau)$. ■

El resultado anterior sirve para motivar la siguiente nueva definición para matrices Lyapunov.

Definición 3 *Se dice que la matriz $U(\tau)$ es una matriz de Lyapunov del sistema (3.16) asociada con una matriz simétrica definida positiva W si ésta satisface las propiedades (3.26)-(3.28).*

El siguiente resultado juega un papel importante en la demostración del Teorema (10)

Lema 13 Sea $Y(\tau)$ una matriz función que satisface las ecuaciones siguientes:

$$Y(\tau) = \left(\int_{-h}^0 Y(\tau + \theta) d\theta \right) F, \quad \tau \geq 0, \quad (4.6)$$

$$Y(\tau) = (Y(-\tau))^T, \quad \tau \in [0, h]. \quad (4.7)$$

Si $Y(\tau) = Y(0)$ para $\tau \in [-h, 0]$, entonces la única solución de (4.6) que satisface (4.7) es la trivial, i.e., $Y(\tau) \equiv 0_{n \times n}$, $\tau \in [-h, \infty)$.

Demostración. De (4.6) se tiene que

$$Y(\tau) = \left(\int_{\tau-h}^0 Y(\theta) d\theta \right) F + \left(\int_0^\tau Y(\theta) d\theta \right) F.$$

Por un lado, para $\tau \in [0, h]$ se cumple de (4.7) que $Y(\theta) = (Y(-\theta))^T$ cuando $\theta \in [0, \tau]$. La condición del Lema implica que $Y(\theta) = Y(0)$ para $\theta \in [\tau-h, 0]$ y $(Y(-\theta))^T = (Y(0))^T = Y(0)$ para $\theta \in [0, \tau]$. Entonces,

$$Y(\tau) = -(\tau-h)Y(0)F + \tau Y(0)F = hY(0)F, \quad (4.8)$$

es cierta para todo $\tau \in [0, h]$. Por otro lado, para $\tau = 0$ la ecuación (4.8) toma la forma $Y(0) = hY(0)F$ que conduce a la ecuación algebraica $Y(0)(I - hF) = 0_{n \times n}$. Dado que $I - hF$ es no singular entonces la única solución de la ecuación algebraica es $Y(0) = 0_{n \times n}$. Se sigue de (4.8) que $Y(\tau) = 0_{n \times n}$ para todo $\tau \in [0, h]$. La unicidad de soluciones implica que $Y(\tau) = 0_{n \times n}$ para todo $\tau \geq 0$ lo que concluye la demostración. ■

A continuación se enuncia un resultado auxiliar conocido que se utilizará en la demostración del Teorema 10

Sea $f(x)$ una función n veces diferenciable, la aproximación de Taylor de $f(x)$ al rededor del punto a es

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n), \quad x \rightarrow a, \quad (4.9)$$

donde $f^{(k)}(a)$ es la k -ésima derivada de la función $f(x)$ evaluada en a y la cantidad dada

por $o((x-a)^n)$ satisface la condición siguiente:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{o((x-a)^n)}{(x-a)^n} = 0, \quad (4.10)$$

y se lee como "o pequeña de orden $(x-a)^n$ ", ver [9].

Con estos resultados se procede a demostrar el Teorema siguiente que garantiza que si el sistema (3.16) es exponencialmente estable, la única matriz de Lyapunov, en el sentido de la Definición 3 es la dada por la integral impropia (3.24).

Teorema 10 Sea el sistema (3.16)

$$x(t) = F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta, \quad t \geq 0,$$

exponencialmente estable. La matriz $U(\tau)$ dada por (3.24),

$$U(\tau) = \int_0^\infty K^T(t) W K(t+\tau) dt,$$

es la única solución de (3.26),

$$U(\tau) = \left(\int_{-h}^0 U(\tau+\theta) d\theta \right) F, \quad \tau \geq 0,$$

que satisface (3.27)

$$U(\tau) = U^T(-\tau) + K_0^T W \int_0^\tau K(\xi) d\xi, \quad \tau \in [0, h],$$

Demostración. Por el Lema 7, la matriz $U(\tau)$ dada por la integral impropia (3.24) satisface (3.27). Supongase que para una matriz simétrica definida positiva W existen dos matrices $U_j(\tau)$, $j = 1, 2$, que son solución de (3.26) y que satisface (3.27). Se define $\Delta U(\tau) = U_2(\tau) - U_1(\tau)$. Cálculos directos muestran que $\Delta U(\tau)$ satisface también la ecuación integral con retardo

$$\Delta U(\tau) = \left(\int_{-h}^0 \Delta U(\tau+\theta) d\theta \right) F, \quad \tau \in [0, h]. \quad (4.11)$$

y la condición

$$\Delta U(\tau) = [\Delta U(-\tau)]^T, \quad \tau \in [0, h]. \quad (4.12)$$

Por lo tanto, se busca $\Delta U(\tau)$ solución de (4.11) que satisfice (4.12). Para esto, se consideran dos funcionales $v_1(\varphi)$ y $v_2(\varphi)$ de la forma (3.23); respectivamente cada una con $U(\tau) = U_1(\tau)$ y $U(\tau) = U_2(\tau)$. Dada cualquier función inicial $\varphi \in \mathcal{PC}$, sea $x(t, \varphi)$ la solución correspondiente del sistema (3.16). Entonces, por el Lema 12 se tiene que

$$\frac{dv_j(x_t(\varphi))}{dt} = -w(x_t(\varphi)), \quad j = 1, 2, \quad t \geq 0.$$

Sea $\Delta v(x_t(\varphi)) = v_2(x_t(\varphi)) - v_1(x_t(\varphi)), t \geq 0$. Entonces, se satisface que

$$\frac{d\Delta v(x_t(\varphi))}{dt} = 0, \quad t \geq 0,$$

lo cual implica $\Delta v(x_t(\varphi)) = \Delta v(\varphi), t \geq 0$. La estabilidad exponencial de (3.16) implica que $x_t(\varphi) \rightarrow 0_h$ cuando $t \rightarrow \infty$, donde $0_h \in \mathcal{PC}$ denota la función trivial, $0_h : \theta \rightarrow 0 \in \mathbb{R}^n$. Entonces, $\Delta v(x_t(\varphi)) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ y, por lo tanto, para cualquier función inicial $\varphi \in \mathcal{PC}$ la igualdad siguiente se cumple:

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta v(\varphi) = \left(F \int_{-h}^0 \varphi(\theta) d\theta \right)^T \Delta U(0) \left(F \int_{-h}^0 \varphi(\theta) d\theta \right) \\ &\quad - 2 \left(F \int_{-h}^0 \varphi(\theta) d\theta \right)^T \int_{-h}^0 \Delta U(-h-\theta) F \varphi(\theta) d\theta \\ &\quad + \int_{-h}^0 \varphi^T(\theta_1) F^T \left(\int_{-h}^0 \Delta U(\theta_1 - \theta_2) F \varphi(\theta_2) d\theta_2 \right) d\theta_1. \end{aligned}$$

Para un vector $\gamma \in \mathbb{R}^n$ y $\tau \in (0, h]$ sea $\varepsilon > 0$ tal que $-\tau + \varepsilon < 0$ y se define la función inicial $\tilde{\varphi} \in \mathcal{PC}$ como sigue:

$$\tilde{\varphi}(\theta) = \begin{cases} \gamma & \theta \in [-\tau, -\tau + \varepsilon], \\ 0 & \text{para otros puntos de } [-h, 0). \end{cases}$$

Para esta función inicial $\tilde{\phi}$ se tiene

$$\begin{aligned} \Delta v(\tilde{\phi}) &= \underbrace{\varepsilon^2 \gamma^T F^T \Delta U(0) F \gamma}_{g_1(\varepsilon)} - \underbrace{2\varepsilon \gamma^T F^T \int_{-\tau}^{-\tau+\varepsilon} \Delta U(-h-\theta) d\theta F \gamma}_{g_2(\varepsilon)} \\ &\quad + \underbrace{\gamma^T F^T \int_{-\tau}^{-\tau+\varepsilon} \int_{-\tau}^{-\tau+\varepsilon} \Delta U(\theta_1 - \theta_2) d\theta_2 d\theta_1 F \gamma}_{g_3(\varepsilon)}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

De la diferenciabilidad continua de las matrices $U_j(\tau)$, $j = 1, 2$, (ver Lema 10) y de las ecuaciones (4.11) y (4.12) se sigue que $\Delta U(\tau)$ también es infinitamente continuamente diferenciable para $\tau \in (0, h)$.

Expandiendo el término $g_1(\varepsilon)$, en (4.13), en series de Taylor para $\varepsilon = 0$ se tiene

$$\begin{aligned} g_1(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} &= \varepsilon^2 \gamma^T F^T \Delta U(0) F \gamma \Big|_{\varepsilon=0} = 0 \\ \frac{dg_1(\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} &= 2\varepsilon \gamma^T F^T \Delta U(0) F \gamma \Big|_{\varepsilon=0} = 0, \\ \frac{d^2 g_1(\varepsilon)}{d\varepsilon^2} \Big|_{\varepsilon=0} &= 2\gamma^T F^T \Delta U(0) F \gamma \Big|_{\varepsilon=0} = 2\gamma^T F^T \Delta U(0) F \gamma. \end{aligned}$$

De este modo, la aproximación en series de Taylor de $g_1(\varepsilon)$ se escribe como

$$g_1(\varepsilon) = \varepsilon^2 \gamma^T F^T \Delta U(0) F \gamma + o(\varepsilon^2). \quad (4.14)$$

Ahora, para el término $g_2(\varepsilon)$ tenemos

$$\begin{aligned} g_2(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} &= 2\varepsilon \gamma^T F^T \int_{-\tau}^{-\tau+\varepsilon} \Delta U(-h-\theta) d\theta F \gamma \Big|_{\varepsilon=0} = 0, \\ \frac{dg_2(\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} &= 2\varepsilon \gamma^T F^T \Delta U(\tau-h-\varepsilon) F \gamma - 2\gamma^T F^T \int_{-\tau}^{-\tau+\varepsilon} \Delta U(-h-\theta) d\theta F \gamma \Big|_{\varepsilon=0} = 0, \\ \frac{d^2 g_2(\varepsilon)}{d\varepsilon^2} \Big|_{\varepsilon=0} &= 2\varepsilon \gamma^T F^T [\Delta U(h+\varepsilon-\tau) F - \Delta U(\varepsilon-\tau) F] F \gamma \Big|_{\varepsilon=0} \\ &\quad + 4\gamma^T F^T \Delta U(\tau-h-\varepsilon) F \gamma \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= 2\gamma^T F^T \Delta U(\tau-h) F \gamma, \end{aligned}$$

y así la aproximación en series de Taylor de $g_2(\varepsilon)$ es

$$g_2(\varepsilon) = 2\varepsilon^2 \gamma^T F^T \Delta U(\tau - h) F \gamma + o(\varepsilon^2). \quad (4.15)$$

Finalmente para el término $g_3(\varepsilon)$ se tiene

$$\begin{aligned} g_3(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} &= \gamma^T F^T \int_{-\tau}^{-\tau+\varepsilon} \int_{-\tau}^{-\tau+\varepsilon} \Delta U(\theta_1 - \theta_2) d\theta_2 d\theta_1 F \gamma \Big|_{\varepsilon=0} = 0, \\ \frac{dg_3(\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} &= \gamma^T F^T \left(\int_{-\tau}^{-\tau+\varepsilon} \Delta U(-\tau + \varepsilon - \theta_2) d\theta_2 \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\tau}^{-\tau+\varepsilon} \Delta U(\theta_1 + \tau - \varepsilon) d\theta_1 \right) F \gamma \Big|_{\varepsilon=0} = 0, \\ \frac{d^2 g_3(\varepsilon)}{d\varepsilon^2} &= \gamma^T F^T \left(2\Delta U(0) + \int_{-\tau}^{-\tau+\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Delta U(-\tau + \varepsilon - \theta_2) d\theta_2 \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\tau}^{-\tau+\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Delta U(\theta_1 + \tau - \varepsilon) d\theta_1 \right) F \gamma \Big|_{\varepsilon=0} = 2\gamma^T F^T \Delta U(0) F \gamma, \end{aligned}$$

la aproximación en series de Taylor de $g_3(\varepsilon)$ es

$$g_3(\varepsilon) = \varepsilon^2 \gamma^T F^T \Delta U(0) F \gamma + o(\varepsilon^2). \quad (4.16)$$

Utilizando (4.14), (4.15) y (4.16) en (4.13) se obtiene la aproximación asintótica siguiente:

$$\Delta v(\tilde{\Phi}) = 2\varepsilon^2 \gamma^T F^T \Delta U(0) F \gamma - 2\varepsilon^2 \gamma^T F^T \Delta U(\tau - h) F \gamma + o(\varepsilon^2).$$

Ya que $\Delta v(\tilde{\Phi}) = 0$ es válida para cualquier $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño se sigue que

$$0 = 2\gamma^T F^T [\Delta U(0) - \Delta U(\tau - h)] F \gamma.$$

Debido a que esta igualdad se cumple para cualquier vector arbitrario $\gamma \in \mathbb{R}^n$ se obtiene que

$$F^T \Delta U(0) F = F^T \Delta U(\tau - h) F, \quad \tau \in (0, h]. \quad (4.17)$$

La continuidad uniforme de $\Delta U(\tau)$ implica que la igualdad (4.17) es válida en el intervalo cerrado $[0, h]$.

Definamos $Y(\tau) = F^T \Delta U(\tau) F$. Para $\tau \geq 0$ y $\theta \in [-h, 0]$ se tiene que

$$Y(\tau + \theta) = F^T \Delta U(\tau + \theta) F.$$

Integrando ambos lados de la ecuación anterior de $-h$ a 0 se obtiene

$$\int_{-h}^0 Y(\tau + \theta) d\theta = F^T \left(\int_{-h}^0 \Delta U(\tau + \theta) d\theta \right) F.$$

Como $\Delta U(\tau)$ satisface (4.11) se tiene que

$$\int_{-h}^0 Y(\tau + \theta) d\theta = F^T \Delta U(\tau), \quad \tau \geq 0.$$

Posmultiplicando la ecuación anterior por F se obtiene

$$Y(\tau) = \left(\int_{-h}^0 Y(\tau + \theta) d\theta \right) F, \quad \tau \geq 0. \quad (4.18)$$

Para $\tau \in [0, h]$ tenemos que $Y(-\tau) = F^T \Delta U(-\tau) F$.

Como $\Delta U(\tau) = [\Delta U(-\tau)]^T$, $\tau \in [0, h]$ se sigue que $Y(-\tau) = F^T [\Delta U(\tau)]^T F$ o equivalentemente

$$[Y(-\tau)]^T = F^T \Delta U(\tau) F = Y(\tau), \quad \tau \in [0, h]. \quad (4.19)$$

Ahora bien, la ecuación (4.17) es equivalente a $Y(\tau) = Y(0)$, $\tau \in [-h, 0]$. Entonces de (4.18), (4.19) y el Lema 13 se sigue que

$$Y(\tau) = F^T \Delta U(\tau) F \equiv 0_{n \times n}, \quad \tau \in [-h, \infty]. \quad (4.20)$$

Así, para $\tau \geq 0$ y $\theta \in [-h, 0]$ se satisface que

$$F^T \Delta U(\tau + \theta) F = 0_{n \times n}. \quad (4.21)$$

Integrando esta ecuación de $-h$ a 0 y usando la ecuación (4.11) para $\Delta U(\tau)$ se tiene que

$$F^T \left(\int_{-h}^0 \Delta U(\tau + \theta) d\theta \right) F = F^T \Delta U(\tau) = 0_{n \times n}, \quad \tau \geq 0. \quad (4.22)$$

Como $\Delta U(\tau)$ satisface que $\Delta U(\tau) = [\Delta U(-\tau)]^T$, $\tau \in [0, h]$ entonces se sigue que

$$F^T \Delta U(\tau) = F^T [\Delta U(-\tau)]^T = [\Delta U(-\tau)F]^T = 0_{n \times n}, \quad \tau \in [0, h]. \quad (4.23)$$

Ahora, definamos $Z(\tau) \triangleq \Delta U(\tau)F$. Para $\tau \geq 0$ y $\theta \in [-h, 0]$ se tiene que

$$Z(\tau + \theta) = \Delta U(\tau + \theta)F. \quad (4.24)$$

Integrando la ecuación anterior de $-h$ a 0 obtenemos

$$\int_{-h}^0 Z(\tau + \theta) d\theta = \left(\int_{-h}^0 \Delta U(\tau + \theta) d\theta \right) F = \Delta U(\tau). \quad (4.25)$$

Posmultiplicando la igualdad anterior por F se llega a que $Z(\tau)$ satisface la ecuación integral siguiente:

$$Z(\tau) = \left(\int_{-h}^0 Z(\tau + \theta) d\theta \right) F, \quad \tau \geq 0. \quad (4.26)$$

De (4.23) se tiene que $Z(-\tau) = 0_{n \times n}$, $\tau \in [0, h]$ o equivalentemente $Z(\tau) = 0_{n \times n}$, $\tau \in [-h, 0]$.

La unicidad de soluciones implica que

$$Z(\tau) = \Delta U(\tau)F \equiv 0, \quad \tau \in [-h, \infty). \quad (4.27)$$

Por lo tanto, para $\tau \geq 0$ y $\theta \in [-h, 0]$ se satisface que

$$\Delta U(\tau + \theta)F = 0_{n \times n}. \quad (4.28)$$

Integrando de $-h$ a 0 la ecuación anterior se obtiene

$$\left(\int_{-h}^0 \Delta U(\tau + \theta) d\theta \right) F = \Delta U(\tau) = 0_{n \times n}, \quad \forall \tau \geq 0. \quad (4.29)$$

La unicidad de soluciones de la ecuación (4.11) implica que $\Delta U(\tau) = 0_{n \times n}$, $\tau \in [-h, \infty)$.

Lo anterior implica que $U_2(\tau) = U_1(\tau)$ para todo $\tau \in [-h, \infty)$ y por lo tanto la unicidad de la matriz de Lyapunov lo que concluye la prueba. ■

El resultado anterior, que asegura la unicidad de la matriz de Lyapunov para el SIR, es esencial para desarrollar algoritmos numéricos robustos para construir matrices de Lyapunov para SIR exponencialmente estables como se muestra en las secciones siguientes.

El problema principal en el cálculo de matrices de Lyapunov para SIR consiste en determinar la función inicial $U(\tau) = \Phi(\tau)$, $\tau \in [-h, 0]$, para la ecuación (3.26), es decir la ecuación integral

$$U(\tau) = \left(\int_{-h}^0 U(\tau + \theta) d\theta \right) F, \quad t \geq 0.$$

Existen algunos métodos para determinar la función inicial correspondiente para las matrices Lyapunov de SDR [11]. Lamentablemente, dichos métodos no se pueden aplicar directamente al cálculo de matrices de Lyapunov para SIR como se puede ver en la subsección siguiente.

4.3. Aplicación del método numérico para la construcción de matrices de Lyapunov de sistemas diferenciales con retardo a sistemas integrales con retardo

Siguiendo las ideas expuestas en [11] definimos la función matricial $\Phi(\tau)$, $\tau \in [-h, 0]$, como la función inicial desconocida para la ecuación dinámica (3.26) y dividimos el intervalo $[-h, 0]$ en N segmentos de la misma longitud $[-(j+1)r, -jr]$, $j = 0, 1, 2, \dots, N-1$, donde $r = \frac{h}{N}$.

Ahora, introducimos $N+1$ matrices desconocidas $\Phi_j = \Phi(-jr)$, $j = 0, 1, 2, \dots, N$, y defini-

mos la aproximación lineal continua a pedazos de la función inicial $\Phi(\tau)$ como sigue:

$$\hat{\Phi}(s) = \left(1 + \frac{s+jr}{r}\right) \Phi_j + \left(-\frac{s+jr}{r}\right) \Phi_{j+1}, \quad (4.30)$$

donde $s \in [-(j+1)r, -jr]$, $j = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Sea $U(\tau) = U(\tau, \Phi)$ la solución de (3.26) correspondiente a la función inicial Φ y definase la aproximación lineal continua a pedazos de $U(\tau)$ como sigue:

$$\hat{U}(s) = \left(1 - \frac{s-jr}{r}\right) U_j + \left(\frac{s-jr}{r}\right) U_{j+1}, \quad (4.31)$$

donde $s \in [jr, (j+1)r]$, $U_j = U(jr)$, $j = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

De (3.26), para $\tau = jr$, se tiene

$$U(jr) = \left(\int_{-h}^0 U(jr+\theta) d\theta\right) F.$$

Siguiendo las ideas del método expuesto en [11], comparemos (3.26) para $\tau = jr$ y $\tau = (j+1)r$

$$U((j+1)r) - U(jr) = \int_{(j+1)r-h}^{jr} U(\xi) d\xi F - \int_{jr-h}^{(j-1)r} U(\xi) d\xi F. \quad (4.32)$$

Sustituyendo $h = Nr$ se obtiene lo siguiente:

$$U((j+1)r) - U(jr) = \int_{(j+1-N)r}^{jr} U(\xi) d\xi F - \int_{(j-N)r}^{(j-1)r} U(\xi) d\xi F.$$

Separando las integrales de la igualdad anterior y reduciendo términos semejantes

$$\begin{aligned} U((j+1)r) - U(jr) &= \left(\int_{(j+1-N)r}^{(j-1)r} U(\xi) d\xi + \int_{(j-1)r}^{jr} U(\xi) d\xi \right) F \\ &\quad - \left(\int_{(j-N)r}^{(j+1-N)r} U(\xi) d\xi + \int_{(j+1-N)r}^{(j-1)r} U(\xi) d\xi \right) F \end{aligned}$$

$$= \left(\underbrace{\int_{(j-1)r}^{jr} U(\xi) d\xi}_{M_j} - \underbrace{\int_{(j-N)r}^{(j+1-N)r} U(\xi) d\xi}_{L_j} \right) F. \quad (4.33)$$

Considere el término L_j de la igualdad anterior. Ya que $(j+1-N)r \leq 0$, para $j \in [0, N-1]$ se tiene que

$$L_j = \int_{(j-N)r}^{(j+1-N)r} U(\xi) d\xi = \int_{(j-N)r}^{(j+1-N)r} \Phi(\xi) d\xi, \quad \xi \in [(j-N)r, (j+1-N)r].$$

Ahora, sea \hat{L}_j la aproximación de L_j y sustituyendo $\Phi(\xi)$ por su aproximación $\hat{\Phi}(\xi)$ dada por (4.30) se obtiene

$$\begin{aligned} \hat{L}_j = \int_{(j-N)r}^{(j+1-N)r} \hat{\Phi}(\xi) d\xi &= \int_{(j-N)r}^{(j+1-N)r} \left[\left(1 + \frac{\xi + (N-j-1)r}{r} \right) \Phi_{N-j-1} \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{\xi + (N-j-1)r}{r} \right) \Phi_{N-j} \right] d\xi. \end{aligned}$$

Cálculos directos nos llevan a

$$- \int_{(j-N)r}^{(j+1-N)r} \left(\frac{\xi + (N-j-1)r}{r} \right) d\xi = \frac{r}{2}.$$

y

$$\int_{(j-N)r}^{(j+1-N)r} \left(1 + \frac{\xi + (N-j-1)r}{r} \right) d\xi = \frac{r}{2}.$$

Utilizando estas cantidades en la expresión para \hat{L}_j se obtiene

$$\hat{L}_j = \frac{r}{2} \Phi_{N-j} + \frac{r}{2} \Phi_{N-j-1}. \quad (4.34)$$

Considere el término M_j de la ecuación (4.33). Por un lado, note que para $j = 0$ se tiene que

$\xi \in [-r, 0]$ y entonces

$$M_0 = \int_{-r}^0 U(\xi) d\xi = \int_{-r}^0 \Phi(\xi) d\xi.$$

Sea \hat{M}_0 la aproximación de M_0 y sustituyendo $\Phi(\xi)$ por su aproximación $\hat{\Phi}(\xi)$ dada por (4.30) se tiene que

$$\hat{M}_0 = \int_{-r}^0 \hat{\Phi}(\xi) d\xi = \int_{-r}^0 \left[\left(-\frac{\xi + 0r}{r} \right) \Phi_1 + \left(1 + \frac{\xi + 0r}{r} \right) \Phi_0 \right] d\xi = \frac{r}{2} \Phi_1 + \frac{r}{2} \Phi_0.$$

Por otro lado, para $j = 1, 2, \dots, N-1$ se tiene que $\xi \in [(j-1)r, jr] \in [0, h]$, se sigue que M_j para $j = 1, 2, \dots, N-1$ se calcula como

$$M_j = \int_{(j-1)r}^{jr} U(\xi) d\xi.$$

Sea \hat{M}_j la aproximación de M_j y sustituyendo $U(\xi)$ por su aproximación $\hat{U}(\xi)$ dada por (4.31) se obtiene que

$$\hat{M}_j = \int_{(j-1)r}^{jr} \hat{U}(\xi) d\xi = \int_{(j-1)r}^{jr} \left[\left(1 - \frac{\xi - jr}{r} \right) U_{j-1} + \left(\frac{\xi - jr}{r} \right) U_j \right] d\xi.$$

Cálculos directos muestran que

$$\int_{(j-1)r}^{jr} \left(\frac{\xi - jr}{r} \right) d\xi = \frac{r}{2},$$

y

$$\int_{(j-1)r}^{jr} \left(1 - \frac{\xi - jr}{r} \right) d\xi = \frac{r}{2}.$$

Utilizando estas cantidades en la expresión para \hat{M}_j , $j = 1, 2, \dots, N-1$ se tiene

$$\hat{M}_j = \frac{r}{2} U_{j-1} + \frac{r}{2} U_j,$$

De lo anterior, se obtiene de (4.33) las expresiones siguientes:

- Para $j = 0$

$$U_1 - U_0 = \frac{r}{2} (\Phi_0 + \Phi_1 - \Phi_N - \Phi_{N-1}) F, \quad (4.35)$$

- Para $j = 1, 2, \dots, N-1$

$$U_{j+1} - U_j = \frac{r}{2} (U_{j-1} + U_j - \Phi_{N-j} - \Phi_{N-j-1}) F. \quad (4.36)$$

Para escribir las expresiones (4.35) y (4.36) en término de la función inicial Φ , se hace uso de la propiedad de simetría en los puntos de la partición. De hecho, para $\tau = jr$ la ecuación (3.27) toma la forma

$$U(jr) = U^T(-jr) + K_0^T W \int_0^{jr} K(\xi) d\xi = \Phi^T(-jr) + K_0^T W \int_0^{jr} K(\xi) d\xi,$$

lo que nos lleva a

$$U_j = \Phi_j^T + K_0^T W V_j, \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad (4.37)$$

donde

$$V_j = \int_0^{jr} K(\xi) d\xi, \quad j = 0, 1, \dots, N. \quad (4.38)$$

Usando la ecuación (4.37) en (4.35) y (4.36) se llega a un conjunto de N ecuaciones lineales expresadas en términos de las matrices desconocidas Φ_j , $j = 0, 1, \dots, N-1$ de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{r}{2}F + I\right) \Phi_j^T + \left(\frac{r}{2}F - I\right) \Phi_{j+1}^T - \frac{r}{2} (\Phi_{N-j} + \Phi_{N-j-1}) F \\ & = K_0^T W \left(V_{j+1} - V_j - \frac{r}{2} (V_j + V_{j+1}) \right). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Agregando al conjunto anterior la ecuación algebraica (3.28) en los puntos de la partición

$$(\Phi_0 - \Phi_N) F + F^T (\Phi_0 - \Phi_N)^T = -K^T(0) W K(0) \quad (4.40)$$

se llega a un sistema de $N+1$ ecuaciones matriciales para $N+1$ matrices desconocidas Φ_j ,

$j = 0, 1, \dots, N$.

En principio, la solución del sistema de ecuaciones (4.39)-(4.40) proporciona las matrices Φ_j y la fórmula (4.30) permite construir la aproximación deseada de la función inicial para la ecuación integral con retardo (3.26).

Ahora consideremos el caso más sencillo de un SIR, este es el caso escalar, donde $F \in \mathbb{R}$. Por simplicidad, consideremos 2 particiones. Así, $N = 2$ y $r = \frac{h}{2}$. Para este caso, el sistema lineal de ecuaciones (4.39)-(4.40) puede escribirse como

$$AX = B,$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} \left(\frac{r}{2}F + 1\right) & -1 & -\frac{r}{2}F \\ \frac{r}{2}F & 1 & \left(\frac{r}{2} - 1\right) \\ 2F & 0 & -2F \end{bmatrix}, \quad X = [\Phi_0 \quad \Phi_1 \quad \Phi_2]^T,$$

$$B = \begin{bmatrix} K_0W \left(V_1 - \frac{r}{2}V_1F\right) \\ K_0W \left((V_1 - V_1) - \frac{r}{2}(V_1 + V_2)F\right) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Cálculos directos muestran que

$$\det(A) = -rF^2 - 2F - rF^2 + 2F + rF^2 + rF^2 = 0,$$

lo cual implica que la matriz A es singular para todos los valores de $F \in \mathbb{R}$ y $h > 0$.

Se sigue que el sistema de ecuaciones (4.39)-(4.40) no es consistente ya que no hay una solución única de $AX = B$ esto independientemente de la elección de la matriz F y el retardo h . Entonces si se elije un sistema escalar exponencialmente estable con F y retardo h tal que $F < \frac{1}{h}$ no es posible construir matrices de Lyapunov de SIR usando esta metodología y dado que en el Teorema 10 se mostró que existe una única matriz de Lyapunov para el SIR (3.16) exponencialmente estable y particularmente para el caso del SIR escalar, se sigue que el método expuesto en [11] para SDR no provee una solución apropiada al problema

del cálculo de matrices de Lyapunov para SIR. Por otro lado del Teorema [10](#) debe existir una matriz de Lyapunov para SIR de la forma [\(3.1\)](#) que son exponencialmente estables. Motivados de lo anterior, se propone una metodología para obtener matrices de Lyapunov de SIR como muestra en la sección siguiente.

4.4. Algoritmo de construcción de matrices de Lyapunov para sistemas integrales con retardo

El análisis en la subsección anterior muestra que se requiere un nuevo método para calcular soluciones de la ecuación dinámica [\(3.26\)](#), satisfaciendo las condiciones [\(3.27\)](#) y [\(3.28\)](#), para calcular matrices de Lyapunov de SIR exponencialmente estables. Primero se presenta el cálculo de la función inicial para después calcular la matriz de Lyapunov correspondiente de igual forma se presenta una forma de medir el error de aproximación de matrices de Lyapunov para SIR.

4.4.1. Función inicial aproximada

Considere las aproximaciones lineales a pedazos [\(4.30\)](#) y [\(4.31\)](#). De [\(3.26\)](#), para $\tau = jr$, se tiene

$$U_j = \left(\int_{(j-N)r}^{jr} U(\xi) d\xi \right) F. \quad (4.41)$$

Ya que $(j-N)r \leq 0$, $j = 0, 1, \dots, N$, se puede reescribir la ecuación [\(4.41\)](#) como

$$U_j = \left(\underbrace{\int_{(j-N)r}^0 \Phi(\xi) d\xi}_{m_j} + \underbrace{\int_0^{jr} U(\xi) d\xi}_{n_j} \right) F. \quad (4.42)$$

Consideremos el término m_j de la ecuación [\(4.42\)](#) y reescribamoslo en sumas de integrales en intervalos de longitud r

$$m_j = \int_{(j-N)r}^0 \Phi(\xi) d\xi = \sum_{k=0}^{N-j-1} \int_{-(N-j-k)r}^{-(N-j-k-1)r} \Phi(\xi) d\xi, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

$$m_N = 0.$$

Sustituyendo $\Phi(\xi)$ por su aproximación $\hat{\Phi}(\xi)$ obtenemos

$$\hat{m}_j = \sum_{k=0}^{N-j-1} \int_{-(N-j-k)r}^{-(N-j-k-1)r} \hat{\Phi}(\xi) d\xi, \quad (4.43)$$

donde \hat{m}_j es la aproximación de m_j . Sustituyendo la aproximación lineal a pedazos (4.30) para $\hat{\Phi}(\xi)$, un término de la suma en (4.43) satisface

$$\begin{aligned} \int_{-(N-j-k)r}^{-(N-j-k-1)r} \hat{\Phi}(\xi) d\xi &= \int_{-(N-j-k)r}^{-(N-j-k-1)r} \left[\left(1 + \frac{\xi + (N-j-k-1)r}{r} \right) \Phi_{N-j-k-1} \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{\xi + (N-j-k-1)r}{r} \right) \Phi_{N-j-k} \right] d\xi. \end{aligned}$$

Cálculos directos muestran que

$$- \int_{-(N-j-k)r}^{-(N-j-k-1)r} \left(\frac{\xi + (N-j-k-1)r}{r} \right) d\xi = \frac{r}{2},$$

y

$$\int_{-(N-j-k)r}^{-(N-j-k-1)r} \left(1 + \frac{\xi + (N-j-k-1)r}{r} \right) d\xi = \frac{r}{2}.$$

Sustituyendo las cantidades anteriores en (4.43) se obtiene

$$\begin{aligned} \hat{m}_j &= \frac{r}{2} \sum_{k=0}^{N-j-1} (\Phi_{N-j-k-1} + \Phi_{N-j-k}), \quad j = 0, 1, 2, \dots, N-1, \\ \hat{m}_N &= 0. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Ahora, considere el término n_j en (4.42). Del mismo modo, reescribiendo la integral en una suma de integrales con intervalos de longitud r y sustituyendo $U(\xi)$ por su aproximación $\hat{U}(\xi)$, se tiene

$$\begin{aligned} \hat{n}_j &= \sum_{k=0}^{j-1} \int_{(j-k-1)r}^{(j-k)r} \hat{U}(\xi) d\xi, \quad j = 1, 2, \dots, N, \\ \hat{n}_0 &= 0, \end{aligned} \quad (4.45)$$

donde \hat{n}_j denota la aproximación de n_j . Sustituyendo la aproximación lineal a pedazos (4.31) para $\hat{U}(\xi)$, un término de la suma en (4.45) satisface

$$\int_{(j-k-1)r}^{(j-k)r} \hat{U}(\xi) d\xi = \int_{(j-k-1)r}^{(j-k)r} \left[\left(1 - \frac{\xi - (j-k-1)r}{r}\right) U_{j-k-1} + \left(\frac{\xi - (j-k-1)r}{r}\right) U_{j-k} \right] d\xi.$$

De la igualdad anterior se tiene que

$$\int_{(j-k-1)r}^{(j-k)r} \left(\frac{\xi - (j-k-1)r}{r}\right) d\xi = \frac{r}{2},$$

y

$$\int_{(j-k-1)r}^{(j-k)r} \left(1 - \frac{\xi - (j-k-1)r}{r}\right) d\xi = \frac{r}{2}.$$

Así, se obtiene la siguiente expresión para \hat{n}_j

$$\begin{aligned} \hat{n}_j &= \frac{r}{2} \sum_{k=0}^{j-1} (U_{j-k-1} + U_{j-k}), \quad j = 1, \dots, N, \\ \hat{n}_0 &= 0. \end{aligned} \tag{4.46}$$

De (4.42), utilizando (4.44) y (4.46), se tiene la ecuación siguiente:

$$U_j = (\hat{m}_j + \hat{n}_j) F, \quad j = 0, 1, \dots, N,$$

aceptando que existe un error de aproximación. Al usar la propiedad de simetría en los puntos de la partición (4.37)

$$U(\tau) = U^T(-\tau) + K_0^T W \int_0^\tau K(\xi) d\xi, \quad \tau \in [0, h],$$

en la ecuación anterior, se obtiene el sistema de ecuaciones matriciales siguientes:

■ Para $j = 0$

$$\Phi_0 - \frac{r}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (\Phi_{N-k-1} + \Phi_{N-k}) F = 0. \tag{4.47}$$

- Para $j = 1, 2, \dots, N-1$

$$\begin{aligned} \Phi_j^T - \frac{r}{2} \left[\sum_{k=0}^{N-j-1} (\Phi_{N-j-k-1} + \Phi_{N-j-k}) + \sum_{k=0}^{j-1} (\Phi_{j-k-1} + \Phi_{j-k}^T) \right] F \\ = K_0^T W \left(\frac{r}{2} \sum_{k=0}^{j-1} (V_{j-k-1} + V_{j-k}) F - V_j \right). \end{aligned} \quad (4.48)$$

- Para $j = N$

$$\Phi_N^T - \frac{r}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (\Phi_{N-k-1}^T + \Phi_{N-k}^T) F = K_0^T W \left(\frac{r}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (V_{N-k-1} + V_{N-k}) F - V_N \right). \quad (4.49)$$

Las ecuaciones (4.47)-(4.49) determinan un sistema de $N+1$ ecuaciones matriciales para $N+1$ matrices desconocidas Φ_j , $j = 0, 1, \dots, N$. La solución de este sistema proporciona las matrices Φ_j , $j = 0, 1, 2, \dots, N$, y la fórmula (4.30) permite calcular la aproximación deseada de la función inicial matricial.

Para mostrar que el sistema de ecuaciones matriciales (4.47)-(4.49) no presenta el mismo problema de inconsistencia que el sistema de ecuaciones matriciales (4.39)-(4.40) considere de nuevo el caso más sencillo de un SIR donde $F \in \mathbb{R}$. Otra vez por simplicidad considere dos particiones $N = 2$ lo que lleva a $r = \frac{h}{2}$. Para este caso, el sistema de ecuaciones (4.47)-(4.49) se puede escribir como

$$\bar{A}X = \bar{B},$$

donde

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{r}{2}F\right) & -rF & -\frac{r}{2}F \\ -rF & (1 - rF) & 0 \\ -\frac{r}{2}F & -rF & \left(1 - \frac{r}{2}F\right) \end{bmatrix}, \quad X = [\Phi_0 \quad \Phi_1 \quad \Phi_2]^T,$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ K_0 W \left(\frac{r}{2} V_1 F - V_1 \right) \\ K_0 W \left(\frac{r}{2} (2V_1 + V_2) F \right) - V_2 \end{bmatrix}.$$

Cálculos directos muestran que $\det(\bar{A}) = -2Fr + 1$. entonces, se sigue que el único caso cuando \bar{A} es singular es $F = \frac{1}{2r} = \frac{1}{h}$, el cual es precisamente la frontera de la región de estabilidad para el caso de SIR escalares, ver sección 3.4. Así, para este caso, el sistema de ecuaciones (4.47)-(4.49) provee una única solución para todos los SIR escalares exponencialmente estables.

Sin embargo para el caso general, así como sucede con los métodos numéricos para calcular matrices de Lyapunov de SDR, no existe conocimiento sobre la existencia y unicidad del sistema de ecuaciones matriciales (4.47)-(4.49). El Teorema 10 nos proporciona un argumento sólido para estudiar la existencia de soluciones de (4.47)-(4.49) para SIR que son exponencialmente estables. Sin embargo, este análisis no es trivial y es un problema abierto. Entonces por ahora, solo podemos decir que si existe solución del sistema de ecuaciones matriciales (4.47)-(4.49) entonces esta solución provee las matrices Φ_j , $j = 0, 1, 2, \dots, N$, y la fórmula (4.30) nos permite calcular la aproximación de la función inicial deseada de la matriz de Lyapunov.

Para encontrar una solución del sistema de ecuaciones matriciales (4.47)-(4.49) es conveniente escribir las ecuaciones en forma vectorial por medio de la operación vector $\text{vec}(Q) = q$, donde $q \in \mathbb{R}^{n^2}$ se obtiene de $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ al agrupar sus columnas en un solo vector. La vectorización de $C = AXB$ es $\text{vec}(C) = (A \otimes B) \text{vec}(X)$ donde

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} b_{11}A & b_{21}A & \cdots & b_{n1}A \\ b_{12}A & b_{22}A & \cdots & b_{n2}A \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n}A & b_{2n}A & \cdots & b_{nn}A \end{pmatrix},$$

es el producto de Kronecker de las matrices A y B , y la vectorización de $D = AX^T B$ es $\text{vec}(D) = (A \circ B) \text{vec}(X)$, donde $A \circ B$ está definida por

$$A \circ B = \begin{pmatrix} A_1 B_1^T & A_2 B_1^T & \cdots & A_n B_1^T \\ A_1 B_2^T & A_2 B_2^T & \cdots & A_n B_2^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1 B_n^T & A_2 B_n^T & \cdots & A_n B_n^T \end{pmatrix},$$

con $A_j, B_j, j = 1, 2, \dots, N$, denotando el vector columna de A y B , respectivamente. Entonces, el sistema de ecuaciones matriciales (4.47)-(4.49) puede escribirse en forma de vector de la manera siguiente:

- Para $j = 0$

$$(I \circ I) \phi_0 - \frac{r}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (I \otimes F) (\phi_{N-k-1} + \phi_{N-k}) = 0.$$

- Para $j = 1, 2, \dots, N-1$

$$\begin{aligned} & (I \circ I) \phi_j - \frac{r}{2} \left[\sum_{k=0}^{N-j-1} (I \otimes F) (\phi_{N-j-k-1} + \phi_{N-j-k}) \right. \\ & \left. + \sum_{k=0}^{j-1} (I \circ F) (\phi_{j-k-1} + \phi_{j-k}) \right] \\ & = \text{vec} \left(K_0^T W \left(\frac{r}{2} \sum_{k=0}^{j-1} (V_{j-k-1} + V_{j-k}) F - V_j \right) \right). \end{aligned}$$

- para $j = N$

$$\begin{aligned} & (I \circ I) \phi_N - \frac{r}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (I \circ F) (\phi_{N-k-1} + \phi_{N-k}) \\ & = \text{vec} \left(K_0^T W \left(\frac{r}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (V_{N-k-1} + V_{N-k}) F - V_N \right) \right), \end{aligned}$$

donde $\phi_j = \text{vec}(\Phi_j)$, $j = 1, 2, \dots, N$. Para resolver las igualdades anteriores se necesitan conocer las matrices $V_j, j = 1, 2, \dots, N$, definidas por (4.38) y por lo tanto, calcular la matriz fundamental $K(t)$ para $t \in [0, h]$. A continuación se presenta una forma de como calcular la matriz fundamental.

Observación 1 Note que la matriz $K(t)$ satisface la ecuación $K(t) = K_1(t) - K_0$, donde $K_1(t)$ es solución de la ecuación

$$\dot{K}_1(t) = (K_1(t) - K_1(t-h))F, \quad t \geq 0, \quad (4.50)$$

con función inicial $K_1(t) = 0, t < 0$ y $K_1(0) = I$, véase Lema 3 en sección 3.2. Ya que, para $t \in [0, h]$, se tiene que $K_1(t) = e^{Ft}$, entonces $K(t) = -K_0 + e^{Ft}$, lo que nos lleva a una forma

explícita de la solución de $K(t)$ para $t \in [0, h]$. Cabe resaltar que la extensión para $t > h$, es más complicada.

4.4.2. Matriz de Lyapunov aproximada

Con la aproximación lineal a pedazos de la función inicial calculada, ahora se aborda el problema de buscar la solución correspondiente de la SIR (3.26). De hecho, el problema se puede formular como el problema de valor inicial siguiente:

$$U(\tau) = \left(\int_{-h}^0 U(\tau + \theta) d\theta \right) F, \quad \tau \geq 0, \quad (4.51)$$

$$U(\tau) = \hat{\Phi}(\tau), \quad \tau \in [-h, 0]. \quad (4.52)$$

Tener en cuenta que el problema de valor inicial (4.51)-(4.52) no puede ser resuelto por medio de conocido método paso a paso para construir soluciones de sistemas diferenciales con retardo [1]. En otras palabras, para $\tau \in [0, h]$ y haciendo el cambio de variable de integración $\xi = \tau + \theta$, la ecuación (4.51) toma la forma siguiente:

$$U(\tau) = \left(\int_{t-h}^t U(\xi) d\xi \right) F = \left(\int_{t-h}^0 \hat{\Phi}(\xi) d\xi + \int_0^t U(\xi) d\xi \right) F, \quad (4.53)$$

donde $\hat{\Phi}$ es la función inicial aproximada. El objetivo principal del método a pasos es a partir de una ecuación con retardo obtener una ecuación, en intervalos de longitud del retardo, donde el lado derecho de la igualdad no dependa de la variable de interés, este procedimiento no se puede realizar en la ecuación (4.51) ya que como se puede ver en la igualdad (4.53) el lado derecho depende de la matriz de Lyapunov $U(\xi)$, $\xi \in [0, t]$.

Motivados de lo anterior, a continuación se propone un método para resolver el problema de valor inicial (4.51)-(4.52) que de hecho se puede usar para construir numéricamente soluciones de SIR de la forma de (3.16).

A partir de (4.51) se tiene que para $\tau \in [0, h]$

$$U(\tau) = W(\tau) + \left(\int_0^\tau U(\xi) d\xi \right) F, \quad (4.54)$$

donde

$$W(\tau) = \left(\int_{\tau-h}^0 \hat{\Phi}(\xi) d\xi \right) F.$$

Se sigue que el problema de valor inicial (4.51)-(4.52) es equivalente al problema de encontrar solución de la ecuación integral (4.54). La ecuación (4.54) es una ecuación tipo Volterra para la cual la existencia y unicidad de soluciones puede garantizarse mediante teoría de operadores o aproximaciones sucesivas. En particular, el método de aproximaciones sucesivas provee un procedimiento constructivo para calcular de forma numérica soluciones de (4.54). De manera más precisa, sea $U_0(\tau) = W(\tau)$ y $U_j(\tau)$, $j = 1, 2, 3, \dots$, una secuencia determinada inductivamente de la manera siguiente:

$$U_j(\tau) = W(\tau) + \left(\int_0^\tau U_{j-1}(\xi) d\xi \right) F, \quad \tau \in [0, h].$$

Es posible mostrar que $U_j(\tau)$ converge (uniformemente en τ) a la matriz $U(\tau)$ cuando $j \rightarrow \infty$ y esta matriz $U(\tau)$ satisface la ecuación integral (4.54). La secuencia $U_j(\tau)$ proporciona un procedimiento para construir numéricamente una aproximación de $U(\tau)$ para cada $\tau \in [0, h]$. Al continuar este proceso en intervalos de longitud h se puede obtener la solución de $U(\tau)$ para cualquier $\tau \geq 0$.

Por lo tanto, al usar este procedimiento, sea $\hat{U}(\tau) = \hat{U}(\tau, \hat{\Phi})$, $\tau \in [0, h]$, la solución aproximada de la ecuación dinámica (3.26) correspondiente a la función inicial $\hat{\Phi}$. La matriz $\hat{U}(\tau)$ para $\tau \in [-h, h]$ es la matriz de Lyapunov aproximada deseada.

En resumen, el algoritmo propuesto para calcular la matriz aproximada de Lyapunov $\hat{U}(\tau)$ es el siguiente: Primeramente, se calcula la matriz fundamental $K(t)$ para $t \in [0, h]$ y se obtienen las correspondientes matrices V_j , $j = 1, 2, \dots, N$ dadas por (4.38); después se busca solución de las ecuaciones (4.47)-(4.49) para encontrar las matrices Φ_j , $j = 0, \dots, N$ y en seguida se usa la fórmula (4.30) para calcular la aproximación de la función inicial matricial $\hat{\Phi}(\tau)$ para $\tau \in [-h, 0]$. Finalmente, se usa el algoritmo propuesto de aproximaciones sucesivas con la función inicial matricial previamente calculada $\hat{\Phi}(\tau)$ para obtener la matriz de Lyapunov aproximada $\hat{U}(\tau)$.

4.5. Error de aproximación

En esta sección, se presenta un método para evaluar la calidad de la aproximación de la matriz de Lyapunov calculada.

En primer lugar, observar que por el procedimiento de construcción en la subsección 4.4.2 se sigue que la matriz $\hat{U}(\tau)$ satisface la propiedad dinámica (3.26) para $\tau \in [0, h]$, en otras palabras, satisface la ecuación integral siguiente:

$$U(\tau) = \int_{-h}^0 U(\tau + \theta) d\theta F, \quad \tau \in [0, h],$$

con $\hat{U}(0) = \hat{\Phi}(0)$. Por otro lado, la matriz $\hat{U}(\tau)$ no necesariamente satisface las propiedades de simetría (3.27) y más aún la propiedad algebraica (3.28) ya que esta propiedad no se usa en el procedimiento de construcción de la matriz de Lyapunov aproximada $\hat{U}(\tau)$.

Considere las matrices siguientes:

$$\Delta S(\tau) = \hat{U}(\tau) - \hat{\Phi}^T(-\tau) - K_0^T W V(\tau), \quad (4.55)$$

y

$$\begin{aligned} \Delta A &= [\hat{U}(0) - \hat{U}^T(h) + V^T(h) W K_0] F + K^T(0) W K(0) \\ &\quad + F^T [\hat{U}(0) - \hat{U}^T(h) + V^T(h) W K_0]^T. \end{aligned} \quad (4.56)$$

La matriz $\Delta S(\tau)$ mide el error de la propiedad de simetría mientras la matriz ΔA evalúa la desviación de la propiedad algebraica. Ahora, en virtud de la propiedad de simetría, se reescribe la funcional $v(\varphi)$ dada por (3.23) en la forma equivalente siguiente:

$$\begin{aligned} v(\varphi) &= \left(F \int_{-h}^0 \varphi(\theta) d\theta \right)^T U(0) \left(F \int_{-h}^0 \varphi(\theta) d\theta \right) \\ &\quad - 2 \left(F \int_{-h}^0 \varphi(\theta) d\theta \right)^T \int_{-h}^0 U^T(h + \theta) F \varphi(\theta) d\theta \\ &\quad + 2 \left(F \int_{-h}^0 \varphi(\theta) d\theta \right)^T \int_{-h}^0 \left(\int_0^{h+\theta} K^T(\xi) d\xi \right) W K_0 F \varphi(\theta) d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{-h}^0 \varphi^T(\theta_1) F^T \left(\int_{-h}^0 U(\theta_1 - \theta_2) F \varphi(\theta_2) d\theta_2 \right) d\theta_1 \\
& - \int_{-h}^0 \varphi^T(\theta_1) F^T K_0^T W \left[\int_{-h}^0 \left(\int_{-h-\theta_2}^{\theta_1-\theta_2} K(\xi) d\xi \right) F \varphi(\theta_2) d\theta_2 \right] d\theta_1 \\
& + \int_{-h}^0 \varphi^T(\theta) [W_0 + (\theta + h) W_1] \varphi(\theta) d\theta,
\end{aligned} \tag{4.57}$$

que es más conveniente para el cálculo del error de aproximación.

Reemplazando la matriz $U(\tau)$ por $\hat{U}(\tau)$, se obtiene la funcional siguiente:

$$\begin{aligned}
\hat{v}(x_t) = & \underbrace{\left(F \int_{-h}^0 x(t + \theta) d\theta \right)^T \hat{U}(0) \left(F \int_{-h}^0 x(t + \theta) d\theta \right)}_{I_1(t)} \\
& - 2 \underbrace{\left(F \int_{-h}^0 x(t + \theta) d\theta \right)^T \int_{-h}^0 \hat{U}^T(h + \theta) F x(t + \theta) d\theta}_{I_2(t)} \\
& + 2 \underbrace{\left(F \int_{-h}^0 x(t + \theta) d\theta \right)^T \int_{-h}^0 \int_0^{h+\theta} K^T(\eta) d\eta W K_0 F x(t + \theta) d\theta}_{I_3(t)} \\
& + \underbrace{\int_{-h}^0 x^T(t + \theta_1) F^T \left(\int_{-h}^0 \hat{U}(\theta_1 - \theta_2) F x(t + \theta_2) d\theta_2 \right) d\theta_1}_{I_4(t)} \\
& + \underbrace{\int_{-h}^0 x^T(t + \theta) [W_0 + (\theta + h) W_1] x(t + \theta) d\theta}_{I_5(t)} \\
& - \underbrace{\int_{-h}^0 x^T(t + \theta_1) F^T K_0^T W \int_{-h}^0 \left(\int_{-h-\theta_2}^{\theta_1-\theta_2} K(\eta) d\eta \right) F x(t + \theta_2) d\theta_2 d\theta_1}_{I_6(t)}.
\end{aligned}$$

En la Sección [3.5](#) se calcularon las derivadas de los términos $I_1(t)$, $I_4(t)$, $I_5(t)$ e $I_6(t)$, de este modo se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} I_1(t) & = 2 \left(F \int_{-h}^0 x(t + \theta) d\theta \right)^T \hat{U}(0) (F [x(t) - x(t - h)]), \\
\frac{d}{dt} I_4(t) & = x^T(t) F^T \int_{t-h}^t (\hat{U}(t - \xi) + \hat{U}^T(\xi - t)) F x(\xi) d\xi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -x^T(t-h)F^T \int_{t-h}^t (\hat{U}(t-h-\xi) + \hat{U}^T(\xi-t+h)) Fx(\xi) d\xi, \\
\frac{d}{dt} I_5(t) &= x^T(t)Wx(t) - w(x_t), \\
\frac{d}{dt} I_6(t) &= -x^T(t)F^T K_0^T W \int_{t-h}^t \left(\int_{-h-\xi+t}^{t-\xi} K(\eta) d\eta \right) Fx(\xi) d\xi \\
& - \int_{t-h}^t x^T(\xi) F^T K_0^T W \left(\int_{-h}^{\xi-t} K(\eta) d\eta d\xi Fx(t) - \int_0^{\xi-t+h} K(\eta) d\eta d\xi Fx(t-h) \right) \\
& + \int_{t-h}^t x^T(\xi_1) d\xi_1 F^T K_0^T W \int_{t-h}^t K(t-h-\xi_2) Fx(\xi_2) d\xi_2.
\end{aligned}$$

Ahora, calcularemos las derivadas de los términos $I_2(t)$ e $I_3(t)$, haciendo el cambio de variable de integración $\xi = t + \theta$ en el término correspondiente a $I_2(t)$ bajo la segunda integral se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} I_2(t) &= -2 \left(\frac{d}{dt} \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right)^T \right) \int_{t-h}^t \hat{U}^T(h+\xi-t) Fx(\xi) d\xi \\
& - 2 \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right)^T \left(\frac{d}{dt} \int_{t-h}^t \hat{U}^T(h+\xi-t) Fx(\xi) d\xi \right) \\
& = -2 (F[x(t) - x(t-h)])^T \int_{t-h}^t \hat{U}^T(h+\xi-t) Fx(\xi) d\xi \\
& - 2 \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right)^T \left(\hat{U}^T(h) Fx(t) - \hat{U}^T(0) Fx(t-h) \right. \\
& \left. + \int_{t-h}^t \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}^T(h+\xi-t) Fx(\xi) d\xi \right).
\end{aligned}$$

Ahora, la derivada del término $I_3(t)$, haciendo el cambio de variable de integración $\xi = t + \theta$, es la siguiente

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} I_3(t) &= 2 \left[\frac{d}{dt} \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right)^T \right] \int_{t-h}^t \left(\int_0^{h+\xi-t} K^T(\eta) d\eta \right) W K_0 Fx(\xi) d\xi \\
& + 2 \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right)^T \left[\frac{d}{dt} \int_{t-h}^t \left(\int_0^{h+\xi-t} K^T(\eta) d\eta \right) W K_0 Fx(\xi) d\xi \right] \\
& = 2 [F(x(t) - x(t-h))]^T \int_{t-h}^t \left(\int_0^{h+\xi-t} K^T(\eta) d\eta \right) W K_0 Fx(\xi) d\xi \\
& + 2 \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right)^T \left[\int_0^h K^T(\eta) d\eta W K_0 Fx(t) - \int_{t-h}^t K^T(h+\xi-t) W K_0 Fx(\xi) d\xi \right].
\end{aligned}$$

Recolectando las derivadas de los términos $I_1(t) - I_6(t)$ se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \hat{v}(x_t) &= 2 \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right)^T \left(\hat{U}(0) F x(t) - \hat{U}(0) F x(t-h) \right)^T \quad (1) \\
&- 2x^T(t) F^T \int_{t-h}^t \hat{U}^T(h+\xi-t) F x(\xi) d\xi + 2x^T(t-h) F^T \int_{t-h}^t \hat{U}^T(h+\xi-t) F x(\xi) d\xi \\
&- 2 \underbrace{\left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right)^T}_{(\blacktriangle)} \hat{U}^T(h) F x(t) + 2 \underbrace{\left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right)^T}_{(\blacktriangle)} \hat{U}^T(0) F x(t-h) \quad (1) \\
&- 2 \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right)^T \underbrace{\int_{t-h}^t \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}^T(h+\xi-t) F x(\xi) d\xi}_{(\blacksquare)} \\
&+ 2x^T(t) F^T \int_{t-h}^t \int_0^{h+\xi-t} K^T(\theta) d\theta W K_0 F x(\xi) d\xi \\
&- \overset{(2)}{\cancel{2}} x^T(t-h) F^T \int_{t-h}^t \int_0^{h+\xi-t} K^T(\theta) d\theta W K_0 F x(\xi) d\xi \\
&+ 2 \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right)^T \int_0^h K^T(\theta) d\theta W K_0 F x(t) \\
&- 2 \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right)^T \int_{t-h}^t K^T(h+\xi-t) W K_0 F x(\xi) d\xi \\
&+ \underbrace{x^T(t) F^T \int_{t-h}^t (\hat{U}(t-\xi) + \hat{U}^T(\xi-t)) F x(\xi) d\xi}_{(\blacktriangledown)} \\
&- \underbrace{x^T(t-h) F^T \int_{t-h}^t (\hat{U}(t-h-\xi) + \hat{U}^T(\xi-t+h)) F x(\xi) d\xi}_{(\blacklozenge)} \\
&+ x^T(t) W x(t) - w(x_t) - x^T(t) F^T K_0^T W \int_{t-h}^t \left(\int_{-h-\xi+t}^{t-\xi} K(\eta) d\eta \right) F x(\xi) d\xi \\
&- \int_{t-h}^t x^T(\xi) F^T K_0^T W \int_{-h}^{\xi-t} K(\eta) d\eta d\xi F x(t) \quad (2) \\
&+ \int_{t-h}^t x^T(\xi) F^T K_0^T W \int_0^{\xi-t+h} K(\eta) d\eta d\xi F x(t-h) \\
&+ \int_{t-h}^t x^T(\xi_1) d\xi_1 F^T K_0^T W \int_{t-h}^t K(t-h-\xi_2) F x(\xi_2) d\xi_2. \quad (4.58)
\end{aligned}$$

Agrupando términos semejantes

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\hat{v}(x_t) &= \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta)d\theta \right)^T ([\hat{U}(0) - \hat{U}^T(h) + V^T(h)WK_0] F \\
&+ F^T [\hat{U}(0) - \hat{U}^T(h) + V^T(h)WK_0]^T) \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta)d\theta \right) \\
&- 2x^T(t)F^T \int_{t-h}^t \hat{U}^T(h+\xi-t)Fx(\xi)d\xi + 2x^T(t-h)F^T \int_{t-h}^t \hat{U}^T(h+\xi-t)Fx(\xi)d\xi \\
&- 2 \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta)d\theta \right)^T \int_{t-h}^t \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \hat{U}^T(h+\xi-t)Fx(\xi)d\xi}_{(\blacksquare)} \\
&+ 2x^T(t)F^T \int_{t-h}^t \int_0^{h+\xi-t} K^T(\theta)d\theta WK_0 Fx(\xi)d\xi \\
&- x^T(t-h)F^T \int_{t-h}^t \int_0^{h+\xi-t} K^T(\theta)d\theta WK_0 Fx(\xi)d\xi \\
&- 2 \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta)d\theta \right)^T \int_{t-h}^t K^T(h+\xi-t)WK_0 Fx(\xi)d\xi \\
&+ \underbrace{x^T(t)F^T \int_{t-h}^t (\hat{U}(t-\xi) + \hat{U}^T(\xi-t)) Fx(\xi)d\xi}_{(\blacktriangledown)} \\
&- \underbrace{x^T(t-h)F^T \int_{t-h}^t (\hat{U}(t-h-\xi) + \hat{U}^T(\xi-t+h)) Fx(\xi)d\xi}_{(\blacklozenge)} \\
&+ x^T(t)Wx(t) - w(x_t) - x^T(t)F^T K_0^T W \int_{t-h}^t \left(\int_{-h-\xi+t}^{t-\xi} K(\eta)d\eta \right) Fx(\xi)d\xi \\
&- \int_{t-h}^t x^T(\xi)F^T K_0^T W \int_{-h}^{\xi-t} K(\eta)d\eta d\xi Fx(t) \\
&+ \int_{t-h}^t x^T(\xi_1)d\xi_1 F^T K_0^T W \int_{t-h}^t K(t-h-\xi_2)Fx(\xi_2)d\xi_2. \tag{4.59}
\end{aligned}$$

Considere el término (\blacksquare) , para $\xi \in [t-h, t]$ se tiene que $h+\xi-t \in [0, h]$, entonces

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{U}^T(h+\xi-t) = \frac{d}{d(h+\xi-t)} \hat{U}^T(h+\xi-t) \frac{d}{dt}(h+\xi-t) = -\frac{d}{d(h+\xi-t)} \hat{U}^T(h+\xi-t).$$

Calculando la derivada de

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{d(h+\xi-t)} \hat{U}^T(h+\xi-t) &= -\frac{d}{d(h+\xi-t)} \left(F^T \int_{-h}^0 \hat{U}^T(h+\xi-t+\theta)d\theta \right) \\
&= -F^T [\hat{U}^T(h+\xi-t) - \hat{U}^T(\xi-t)].
\end{aligned}$$

Finalmente se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{U}^T(h + \xi - t) = -F^T [\hat{U}^T(h + \xi - t) - \hat{U}^T(\xi - t)].$$

Ahora, considere el término (▼)

$$x^T(t) F^T \int_{t-h}^t (\hat{U}(t - \xi) + \hat{U}^T(\xi - t)) Fx(\xi) d\xi,$$

dado que $t - \xi \in [0, h]$ cuando $\xi \in [t - h, t]$ y usando la definición del error (4.55)

$$\hat{U}(\tau) = \Delta S(\tau) + \hat{U}^T(-\tau) + K_0^T W V(\tau), \quad \tau \geq 0,$$

se sigue que el término (▼) se escribe como

$$\begin{aligned} & x^T(t) F^T \int_{t-h}^t (\hat{U}(t - \xi) + \hat{U}^T(\xi - t)) Fx(\xi) d\xi = \\ & x^T(t) F^T \int_{t-h}^t (2\hat{U}^T(\xi - t) + \Delta S(t - \xi) + K_0^T W V(t - \xi)) Fx(\xi) d\xi \\ = & 2x^T(t) F^T \int_{t-h}^t \hat{U}^T(\xi - t) Fx(\xi) d\xi + x^T(t) F^T \int_{t-h}^t \Delta S(t - \xi) Fx(\xi) d\xi \\ & + x^T(t) F^T K_0^T W \int_{t-h}^t V(t - \xi) Fx(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Considere el término (◆)

$$-x^T(t-h) F^T \int_{t-h}^t (\hat{U}(t-h-\xi) + \hat{U}^T(\xi-t+h)) Fx(\xi) d\xi,$$

dado que $t-h-\xi \in [-h, 0]$ cuando $\xi \in [t-h, t]$ y usando la definición del error (4.55)

$$\hat{U}(-\tau) = \hat{U}^T(\tau) + V^T(\tau) W K_0 - \Delta S^T(\tau), \quad \tau \geq 0,$$

el término (◆) se puede escribir como

$$-x^T(t-h) F^T \int_{t-h}^t (\hat{U}(t-h-\xi) + \hat{U}^T(\xi-t+h)) Fx(\xi) d\xi =$$

$$\begin{aligned}
&= -x^T(t-h)F^T \int_{t-h}^t (2\hat{U}^T(\xi-t+h) - V^T(\xi-t+h)WK_0 - \Delta S^T(\xi-t+h)) Fx(\xi)d\xi \\
&= -2x^T(t-h)F^T \int_{t-h}^t \hat{U}^T(\xi-t+h)Fx(\xi)d\xi \\
&\quad + x^T(t-h)F^T \int_{t-h}^t V^T(\xi-t+h)WK_0 Fx(\xi)d\xi \\
&\quad + x^T(t-h)F^T \int_{t-h}^t \Delta S^T(\xi-t+h)Fx(\xi)d\xi.
\end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de los términos (■), (▼) y (◆) en (4.58) y denotando como (■*), (▼*) y (◆*) a los nuevos términos se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\hat{v}(x_t) &= \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta)d\theta \right)^T ([\hat{U}(0) - \hat{U}^T(h) + V^T(h)WK_0] F \\
&\quad + F^T [\hat{U}(0) - \hat{U}^T(h) + V^T(h)WK_0]^T) \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta)d\theta \right) \\
&\quad - 2x^T(t)F^T \int_{t-h}^t \hat{U}^T(h+\xi-t) Fx(\xi)d\xi \quad (1) \\
&\quad + 2x^T(t-h)F^T \int_{t-h}^t \hat{U}^T(h+\xi-t) Fx(\xi)d\xi \quad (2) \\
&\quad + 2 \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta)d\theta \right)^T \int_{t-h}^t \underbrace{\left[F^T \left(\hat{U}^T(h+\xi-t) - \hat{U}^T(\xi-t) \right) \right]}_{(\blacksquare^*)} Fx(\xi)d\xi \\
&\quad + 2x^T(t)F^T \int_{t-h}^t \int_0^{h+\xi-t} K^T(\theta)d\theta WK_0 Fx(\xi)d\xi \\
&\quad - x^T(t-h)F^T \int_{t-h}^t \int_0^{h+\xi-t} K^T(\theta)d\theta WK_0 Fx(\xi)d\xi \quad (5) \\
&\quad - 2 \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta)d\theta \right)^T \int_{t-h}^t K^T(h+\xi-t)WK_0 Fx(\xi)d\xi \\
&\quad + 2x^T(t)F^T \int_{t-h}^t \hat{U}^T(\xi-t) Fx(\xi)d\xi + x^T(t)F^T \int_{t-h}^t \Delta S(t-\xi)Fx(\xi)d\xi \\
&\quad \underbrace{\hspace{15em}}_{(\blacktriangledown^*)} \\
&\quad + \underbrace{x^T(t)F^T K_0^T W \int_{t-h}^t V(t-\xi)Fx(\xi)d\xi}_{(\blacktriangledown^*)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \underbrace{-2x^T(t-h)F^T \int_{t-h}^t \hat{U}^T(\xi-t+h) Fx(\xi)d\xi}_{(\diamond^*)} \quad (2) \\
& \underbrace{+x^T(t-h)F^T \int_{t-h}^t V^T(\xi-t+h)WK_0 Fx(\xi)d\xi}_{(\diamond^*)} \quad (5) \\
& \underbrace{+x^T(t-h)F^T \int_{t-h}^t \Delta S^T(\xi-t+h)Fx(\xi)d\xi}_{(\diamond^*)} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +x^T(t)Wx(t) - w(x_t) - x^T(t)F^T K_0^T W \int_{t-h}^t \left(\int_{-h-\xi+t}^{t-\xi} K(\eta)d\eta \right) Fx(\xi)d\xi \\
& - \int_{t-h}^t x^T(\xi)F^T K_0^T W \int_{-h}^{\xi-t} K(\eta)d\eta d\xi Fx(t) \\
& + \int_{t-h}^t x^T(\xi_1)d\xi_1 F^T K_0^T W \int_{t-h}^t K(t-h-\xi_2)Fx(\xi_2)d\xi_2.
\end{aligned}$$

Reescribiendo la ecuación anterior

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \hat{v}(x_t) &= \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta)d\theta \right)^T ([\hat{U}(0) - \hat{U}^T(h) + V^T(h)WK_0] F \\
& + F^T [\hat{U}(0) - \hat{U}^T(h) + V^T(h)WK_0]^T) \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta)d\theta \right) \\
& + 2x^T(t)F^T \int_{t-h}^t \int_0^{h+\xi-t} K^T(\theta)d\theta WK_0 Fx(\xi)d\xi \\
& - 2 \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta)d\theta \right)^T \int_{t-h}^t \underbrace{K^T(h+\xi-t)WK_0 Fx(\xi)d\xi}_{(\diamond)} \\
& + x^T(t)F^T \int_{t-h}^t \Delta S(t-\xi)Fx(\xi)d\xi + x^T(t)F^T K_0^T W \int_{t-h}^t V(t-\xi)Fx(\xi)d\xi \\
& + x^T(t-h)F^T \int_{t-h}^t \Delta S^T(\xi-t+h)Fx(\xi)d\xi + \\
& + x^T(t)Wx(t) - w(x_t) - x^T(t)F^T K_0^T W \int_{t-h}^t \left(\underbrace{\int_{-h-\xi+t}^{t-\xi} K(\eta)d\eta}_{(\Delta)} \right) Fx(\xi)d\xi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \underbrace{- \int_{t-h}^t x^T(\xi) F^T K_0^T W \int_{-h}^{\xi-t} K(\eta) d\eta d\xi F x(t)}_{(\nabla)} \\
& + \underbrace{\int_{t-h}^t x^T(\xi_1) d\xi_1 F^T K_0^T W \int_{t-h}^t K(t-h-\xi_2) F x(\xi_2) d\xi_2}_{(\square)}.
\end{aligned} \tag{4.60}$$

Considere el término (\diamond) de la ecuación (4.60)

$$K^T(h + \xi - t),$$

dado que $h + \xi - t \in [0, h]$ cuando $\xi \in [t - h, t]$, el término (\diamond) satisface la ecuación siguiente

$$K^T(h + \xi - t) = F^T \int_{-h}^0 K^T(h + \xi - t + \theta) d\theta,$$

haciendo $\eta = h + \xi - t + \theta$

$$K^T(h + \xi - t) = F^T \int_{-h}^0 K^T(h + \xi - t + \theta) d\theta = F^T \int_{\xi-t}^{h+\xi-t} K^T(\eta) d\eta,$$

dado que $\eta \in [\xi - t, h + \xi - t] \in [-h, h]$ cuando $\xi \in [t - h, t]$, la ecuación anterior se puede escribir como

$$K^T(h + \xi - t) = F^T \int_{\xi-t}^{h+\xi-t} K^T(\eta) d\eta = F^T \left(\int_{\xi-t}^0 K^T(\eta) d\eta + \int_0^{h+\xi-t} K^T(\eta) d\eta \right),$$

el argumento de la primer integral $\eta \in [\xi - t, 0] \in [-h, 0]$ cuando $\xi \in [t - h, t]$, entonces se puede sustituir por la función inicial de la matriz fundamental por lo que se llega a la igualdad siguiente

$$\begin{aligned}
K^T(h + \xi - t) &= F^T \left(-K_0 \int_{\xi-t}^0 d\eta + \int_0^{h+\xi-t} K^T(\eta) d\eta \right) \\
&= F^T \left((\xi - t) K_0 + \int_0^{h+\xi-t} K^T(\eta) d\eta \right).
\end{aligned}$$

Considere el término (Δ) de la ecuación (4.60)

$$\int_{-h-\xi+t}^{t-\xi} K(\eta)d\eta,$$

dado que $\eta \in [t-h-\xi, t-\xi] \in [-h, h]$ cuando $\xi \in [t-h, t]$, el término (Δ) se puede escribir como

$$\int_{t-h-\xi}^{t-\xi} K(\eta)d\eta = \int_{t-h-\xi}^0 K(\eta)d\eta + \int_0^{t-\xi} K(\eta)d\eta,$$

ya que el argumento de la primer integral $\eta \in [t-h-\xi, 0] \in [-h, 0]$ cuando $\xi \in [t-h, t]$, se puede sustituir el término $K(\eta)$ por la función inicial $-K_0$

$$\begin{aligned} \int_{t-h-\xi}^{t-\xi} K(\eta)d\eta &= \int_{t-h-\xi}^0 K(\eta)d\eta + \int_0^{t-\xi} K(\eta)d\eta \\ &= -K_0 \int_{t-h-\xi}^0 d\eta + \int_0^{t-\xi} K(\eta)d\eta \\ &= (t-h-\xi)K_0 + \int_0^{t-\xi} K(\eta)d\eta. \end{aligned}$$

Considere el término (∇) de la ecuación (4.60)

$$- \int_{t-h}^t x^T(\xi)F^T K_0^T W \int_{-h}^{\xi-t} K(\eta)d\eta d\xi Fx(t).$$

Transponiendo el término anterior y dado que $\eta \in [-h, \xi-t] \in [-h, 0]$ cuando $\xi \in [t-h, t]$ la expresión anterior se escribe como

$$\begin{aligned} -x^T(t)F^T \int_{t-h}^t \int_{-h}^{\xi-t} K^T(\eta)d\eta W K_0 Fx(\xi)d\xi &= x^T(t)F^T K_0^T \int_{t-h}^t \int_{-h}^{\xi-t} d\eta W K_0 Fx(\xi)d\xi \\ &= x^T(t)F^T K_0^T W K_0 F \int_{t-h}^t (\xi-t+h)x(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

Considere el término (\square) de la ecuación (4.60)

$$\int_{t-h}^t x^T(\xi_1)d\xi_1 F^T K_0^T W \int_{t-h}^t K(t-h-\xi_2)Fx(\xi_2)d\xi_2,$$

dado que $t-h-\xi_2 \in [-h, 0]$ cuando $\xi_2 \in [t-h, t]$, la igualdad anterior se escribe como

$$\begin{aligned}
& \int_{t-h}^t x^T(\xi_1) d\xi_1 F^T K_0^T W \int_{t-h}^t K(t-h-\xi_2) F x(\xi_2) d\xi_2 = \\
& = - \int_{t-h}^t x^T(\xi_1) d\xi_1 F^T K_0^T W \int_{t-h}^t K_0 F x(\xi_2) d\xi_2 \\
& = - \int_{t-h}^t x^T(\xi_1) d\xi_1 F^T K_0^T W K_0 F \int_{t-h}^t x(\xi_2) d\xi_2 = -x^T(t) K_0^T W K_0 x(t).
\end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de los términos (\diamond) , (Δ) , (∇) y (\square) en [\(4.60\)](#) y denotando como (\diamond^*) , (Δ^*) , (∇^*) y (\square^*) a los nuevos términos se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \hat{v}(x_t) &= \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right)^T \left([\hat{U}(0) - \hat{U}^T(h) + V^T(h) W K_0] F \right. \\
&+ F^T [\hat{U}(0) - \hat{U}^T(h) + V^T(h) W K_0]^T \left. \right) \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right) \\
&+ 2x^T(t) F^T \int_{t-h}^t \int_0^{h+\xi-t} \cancel{K^T(\theta) d\theta}^{(1)} W K_0 F x(\xi) d\xi \\
&- 2 \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right)^T \int_{t-h}^t \underbrace{F^T \left((\xi-t) K_0 + \int_0^{h+\xi-t} \cancel{K^T(\eta) d\eta}^{(1)} \right)}_{(\diamond^*)} W K_0 F x(\xi) d\xi \\
&+ x^T(t) F^T \int_{t-h}^t \Delta S(t-\xi) F x(\xi) d\xi + x^T(t) F^T K_0^T W \int_{t-h}^t \cancel{V(t-\xi)}^{(2)} F x(\xi) d\xi \\
&+ x^T(t-h) F^T \int_{t-h}^t \Delta S^T(\xi-t+h) F x(\xi) d\xi + x^T(t) W x(t) - w(x_t) \\
&- x^T(t) F^T K_0^T W \int_{t-h}^t \left(\underbrace{(t-h-\xi) K_0 + \int_0^{t-\xi} \cancel{K(\eta) d\eta}^{(2)}}_{(\Delta^*)} \right) F x(\xi) d\xi \\
&\underbrace{+ x^T(t) F^T K_0^T W K_0 F \int_{t-h}^t (\xi-t+h) x(\xi) d\xi}_{(\nabla^*)} \underbrace{- x^T(t) K_0^T W K_0 x(t)}_{(\square^*)}. \tag{4.61}
\end{aligned}$$

Reescribiendo la ecuación anterior

$$\frac{d}{dt} \hat{v}(x_t) = \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right)^T ([\hat{U}(0) - \hat{U}^T(h) + V^T(h) W K_0] F$$

$$\begin{aligned}
& +F^T [\hat{U}(0) - \hat{U}^T(h) + V^T(h)WK_0]^T \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta)d\theta \right) \\
& -2 \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta)d\theta \right)^T \int_{t-h}^t F^T(\xi-t)K_0WK_0Fx(\xi)d\xi \\
& +x^T(t)F^T \int_{t-h}^t \Delta S(t-\xi)Fx(\xi)d\xi + x^T(t-h)F^T \int_{t-h}^t \Delta S^T(\xi-t+h)Fx(\xi)d\xi \\
& +x^T(t)Wx(t) - w(x_t) - \underbrace{x^T(t)F^TK_0^TK_0F \int_{t-h}^t (t-h-\xi)x(\xi)d\xi}_{\blacktriangleleft} \\
& \underbrace{+x^T(t)F^TK_0^TK_0F \int_{t-h}^t (\xi-t+h)x(\xi)d\xi}_{\blacktriangleright} - x^T(t)K_0^TK_0x(t). \tag{4.62}
\end{aligned}$$

Sumando los términos (\blacktriangleleft) y (\blacktriangleright)

$$\begin{aligned}
& x^T(t)F^TK_0^TK_0F \int_{t-h}^t (\xi-t+h)x(\xi)d\xi - x^T(t)F^TK_0^TK_0F \int_{t-h}^t (t-h-\xi)x(\xi)d\xi = \\
& = 2x^T(t)F^TK_0^TK_0F \int_{t-h}^t (\xi-t+h)x(\xi)d\xi. \tag{4.63}
\end{aligned}$$

Reescribiendo el lado derecho de la igualdad anterior como

$$\begin{aligned}
& 2x^T(t)F^TK_0^TK_0F \int_{t-h}^t (\xi-t+h)WK_0Fx(\xi)d\xi = \\
& = 2x^T(t)F^TK_0^TK_0F \int_{t-h}^t (\xi-t)x(\xi)d\xi + 2x^T(t)hF^TK_0^TK_0F \int_{t-h}^t x(\xi)d\xi \\
& = 2x^T(t)F^TK_0^TK_0F \int_{t-h}^t (\xi-t)x(\xi)d\xi + 2x^T(t)hF^TK_0^TK_0x(t).
\end{aligned}$$

Denotando por (\blacktriangleright^*) a la suma de los términos (\blacktriangleleft) y (\blacktriangleright)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\hat{v}(x_t) & = \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta)d\theta \right)^T ([\hat{U}(0) - \hat{U}^T(h) + V^T(h)WK_0] F \\
& +F^T [\hat{U}(0) - \hat{U}^T(h) + V^T(h)WK_0]^T) \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta)d\theta \right) \\
& -2 \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta)d\theta \right)^T F^TK_0WK_0F \int_{t-h}^t (\xi-t) \overset{(1)}{x(\xi)d\xi} \\
& +x^T(t)F^T \int_{t-h}^t \Delta S(t-\xi)Fx(\xi)d\xi + x^T(t-h)F^T \int_{t-h}^t \Delta S^T(\xi-t+h)Fx(\xi)d\xi \\
& +x^T(t)Wx(t) - w(x_t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2x^T(t)F^T K_0^T W K_0 F \int_{t-h}^t \underbrace{(\xi \rightarrow t)^{(1)}}_{\blacktriangleright^*} x(\xi) d\xi + 2x^T(t)hF^T K_0^T W K_0 x(t) \\
& - x^T(t)K_0^T W K_0 x(t). \tag{4.64}
\end{aligned}$$

Reescribiendo la ecuación anterior

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\hat{v}(x_t) &= \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right)^T \left([\hat{U}(0) - \hat{U}^T(h) + V^T(h)W K_0] F \right. \\
& + F^T [\hat{U}(0) - \hat{U}^T(h) + V^T(h)W K_0]^T \left. \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right) \right. \\
& + x^T(t)F^T \int_{t-h}^t \Delta S(t-\xi)F x(\xi) d\xi + x^T(t-h)F^T \int_{t-h}^t \Delta S^T(\xi-t+h)F x(\xi) d\xi \\
& \left. - w(x_t) + \underbrace{x^T(t)W x(t) + 2x^T(t)hF^T K_0^T W K_0 x(t) - x^T(t)K_0^T W K_0 x(t)}_{\blacklozenge} \right). \tag{4.65}
\end{aligned}$$

Considere los términos en (\blacklozenge)

$$x^T(t)W x(t) + 2x^T(t)hF^T K_0^T W K_0 x(t) - x^T(t)K_0^T W K_0 x(t),$$

sumando y restando $x^T(t)K_0^T W K_0 x(t)$ a la expresión anterior se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
& x^T(t)W x(t) + 2x^T(t)hF^T K_0^T W K_0 x(t) - 2x^T(t)K_0^T W K_0 x(t) + x^T(t)K_0^T W K_0 x(t) = \\
& = x^T(t)W x(t) - 2x^T(t) \underbrace{(I - hF^T) K_0^T W K_0 x(t)}_I + x^T(t)K_0^T W K_0 x(t) \\
& = x^T(t)K^T(0)W K(0)x(t).
\end{aligned}$$

Finalmente usando la definición para ΔA (4.56) se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\hat{v}(x_t) &= -w(x_t) + \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right)^T \left(\underbrace{[\hat{U}(0) - \hat{U}^T(h) + V^T(h)W K_0]}_{\Delta A} F \right. \\
& \left. + F^T [\hat{U}(0) - \hat{U}^T(h) + V^T(h)W K_0]^T + K^T(0)W K(0) \right) \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right) \\
& + \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right)^T F^T \int_{t-h}^t \Delta S(t-\xi)F x(\xi) d\xi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +x^T(t-h)F^T \int_{t-h}^t \Delta S^T(\xi-t+h)Fx(\xi)d\xi \\
= & -w(x_t) + \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta)d\theta \right)^T \Delta A \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta)d\theta \right) \\
& + \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta)d\theta \right)^T F^T \int_{t-h}^t \Delta S(t-\xi)Fx(\xi)d\xi \\
& +x^T(t-h)F^T \int_{t-h}^t \Delta S^T(\xi-t+h)Fx(\xi)d\xi.
\end{aligned}$$

Por último, haciendo el cambio de variable de integración $\xi = t + \theta$ en la igualdad anterior, la derivada con respecto al tiempo de $\hat{v}(x_t)$ a lo largo de las trayectorias del sistema (3.16) es

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\hat{v}(x_t) = & -w(x_t) + \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta)d\theta \right)^T \Delta A \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta)d\theta \right) \\
& + \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta)d\theta \right)^T F^T \int_{-h}^0 \Delta S(-\theta)Fx(t+\theta)d\theta \\
& +x^T(t-h)F^T \int_{-h}^0 \Delta S^T(\theta+h)Fx(t+\theta)d\theta. \tag{4.66}
\end{aligned}$$

Para evaluar el error de aproximación de la matriz de Lyapunov calculada $\hat{U}(\tau)$ se compara la derivada con respecto al tiempo de la funcional $\hat{v}(x_t)$ con la de la funcional $v(x_t)$.

Para este objetivo, se define

$$\sigma = \max_{\gamma \in [0, h]} \|\Delta S(\gamma)\| \text{ y } \delta = \|\Delta A\|,$$

y se calculan los estimados de los términos en (4.66) involucrando las matrices ΔA y $\Delta S(\tau)$.

Para el término

$$I_1 = \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta)d\theta \right)^T \Delta A \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta)d\theta \right),$$

se tiene que

$$|I_1| \leq \|\Delta A\| \left\| F \int_{-h}^0 x(t+\theta)d\theta \right\|^2 \leq h\delta \|F\|^2 \int_{-h}^0 \|x(t+\theta)\|^2 d\theta.$$

Ahora se estima el término

$$I_2 = \left(F \int_{-h}^0 x(t+\theta)d\theta \right)^T F^T \int_{-h}^0 \Delta S(-\theta)Fx(t+\theta)d\theta,$$

para el cual se satisface

$$|I_2| \leq \sigma h \|F\|^3 \int_{-h}^0 \|x(t+\theta)\|^2 d\theta.$$

Finalmente para el término

$$I_3 = x^T(t-h)F^T \int_{-h}^0 \Delta S^T(\theta+h)Fx(t+\theta)d\theta,$$

se tiene

$$|I_3| \leq \frac{\sigma}{2} \|F\|^2 \left(\|x(t-h)\|^2 + h \int_{-h}^0 \|x(t+\theta)\|^2 d\theta \right).$$

De (4.66) y de los estimados se obtiene

$$\left| \frac{d}{dt} \hat{v}(x_t) - \frac{d}{dt} v(x_t) \right| \leq \alpha \|x(t-h)\|^2 + \gamma \int_{-h}^0 \|x(t+\theta)\|^2 d\theta, \quad (4.67)$$

donde

$$\alpha = \frac{\sigma}{2} \|F\|^2 \text{ y } \gamma = h \|F\|^2 \left(\delta + \sigma \|F\| + \frac{\sigma}{2} \right).$$

Ahora observar que de la igualdad (4.66) y usando los estimados I_j se sigue que

$$\frac{d}{dt} \hat{v}(x_t) \leq \frac{d}{dt} v(x_t) + \alpha \|x(t-h)\|^2 + \gamma \int_{-h}^0 \|x(t+\theta)\|^2 d\theta, \quad (4.68)$$

usando el hecho de que

$$\frac{d}{dt} v(x_t) = -w(x_t) \leq -\lambda_{\min}(W_0) \|x(t-h)\|^2 - \lambda_{\min}(W_1) \int_{-h}^0 \|x(t+\theta)\|^2 d\theta, \quad (4.69)$$

se obtiene para $\frac{d}{dt} \hat{v}(x_t)$ la cota siguiente:

$$\frac{d}{dt} \hat{v}(x_t) \leq (-\lambda_{\min}(W_0) + \alpha) \|x(t-h)\|^2 + (\lambda_{\min}(W_1) + \gamma) \int_{-h}^0 \|x(t+\theta)\|^2 d\theta. \quad (4.70)$$

Entonces si $\lambda_{\min}(W_0) > \alpha$ y $\lambda_{\min}(W_1) > \gamma$ se sigue que $\frac{d}{dt} \hat{v}(x_t)$ se mantiene negativa bajo los errores de aproximación.

Además, si $\sigma, \delta \rightarrow 0$ entonces $\alpha, \gamma \rightarrow 0$ y $\frac{d}{dt}\hat{v}(x_t) \rightarrow \frac{d}{dt}v(x_t)$. Por lo tanto, la cantidad

$$\varepsilon = \max \left\{ \frac{\alpha}{\lambda_{\min}(W_0)}, \frac{\gamma}{\lambda_{\min}(W_1)} \right\},$$

puede usarse como una medida para evaluar la calidad de la aproximación de la matriz de Lyapunov, mientras más pequeño sea ε se tiene una mejor aproximación.

4.6. Ejemplos sobre construcción numérica de matrices de Lyapunov para SIR

Ejemplo 1 Para ilustrar los resultados de construcción de matrices de Lyapunov y el cálculo del error de aproximación del algoritmo numérico, considere el SIR

$$x(t) = F \int_{-h}^0 x(t + \theta) d\theta, \quad (4.71)$$

donde

$$F = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.3 \\ -0.5 & 0.1 \end{bmatrix},$$

y el retardo $h = 1.5$. Dado que para estos valores numéricos los valores propios $\lambda_{1,2} = -0.05 \pm 0.357i$ de la matriz F del SIR (4.71) se encuentran dentro del dominio abierto $\Gamma_{1.5}$ cuya frontera está dada por la expresión en (3.20), esta región de estabilidad se muestra en Fig. 4.1 entonces el SIR (4.71) es exponencialmente estable.

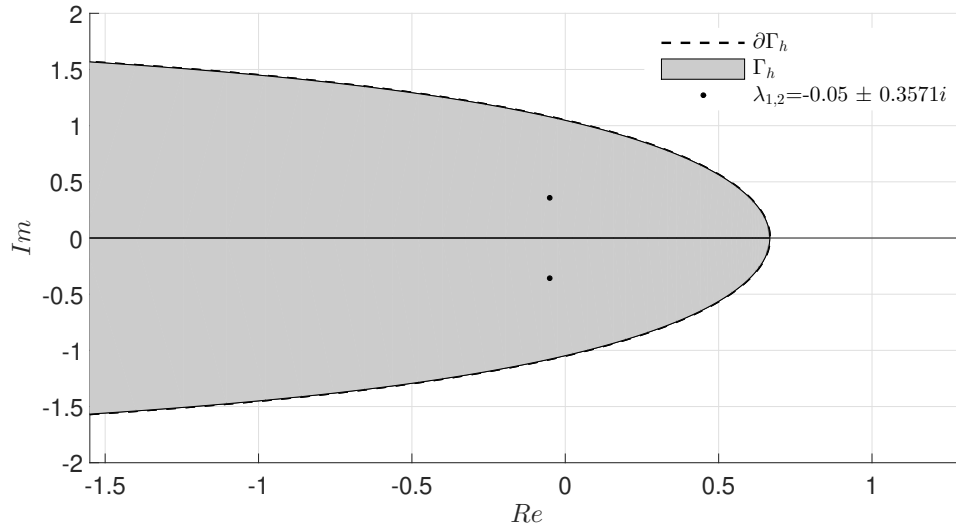


Figura 4.1: Región de estabilidad del SIR (4.71) con $h = 1.5$

Para resolver el sistema de ecuaciones matriciales (4.47)-(4.49) se tienen que calcular las matrices V_j , $j = 1, 2, \dots, N$, definidas por (4.38) y por lo tanto, calcular la matriz fundamental $K(t)$ para $t \in [0, 1.5]$. En la observación I se muestra la solución explícita de la matriz fundamental $K(t)$, para $t \in [0, h]$. Usando esto se calcula $K(t)$ para $t \in [0, 1.5]$, ver Fig. 4.2.

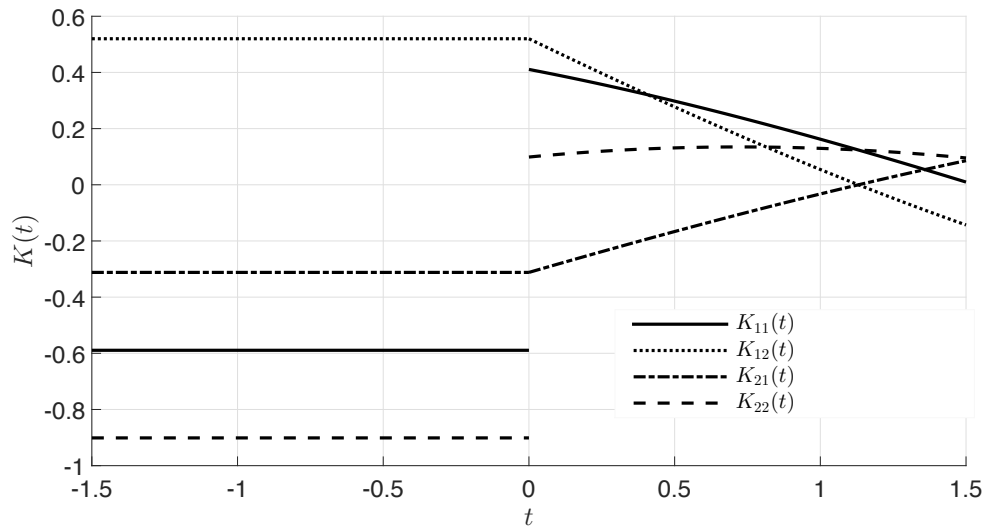


Figura 4.2: Componentes de la matriz fundamental $K(t)$ para el SIR (4.71) con $h=1.5$

Ahora para $W_0 = 0.15I$ y $W_1 = 0.5667I$ lo que lleva a $W = W_0 + hW_1 = I$ y un número de particiones $N = 20$ se usa el algoritmo propuesto para calcular la función inicial aproxima-

da y la solución aproximada correspondiente de la ecuación integral (3.26) asociada al SIR (4.71). La matriz de Lyapunov aproximada $\hat{U}(\tau)$, $\tau \in [-1.5, 1.5]$, se muestra en la Fig. 4.3

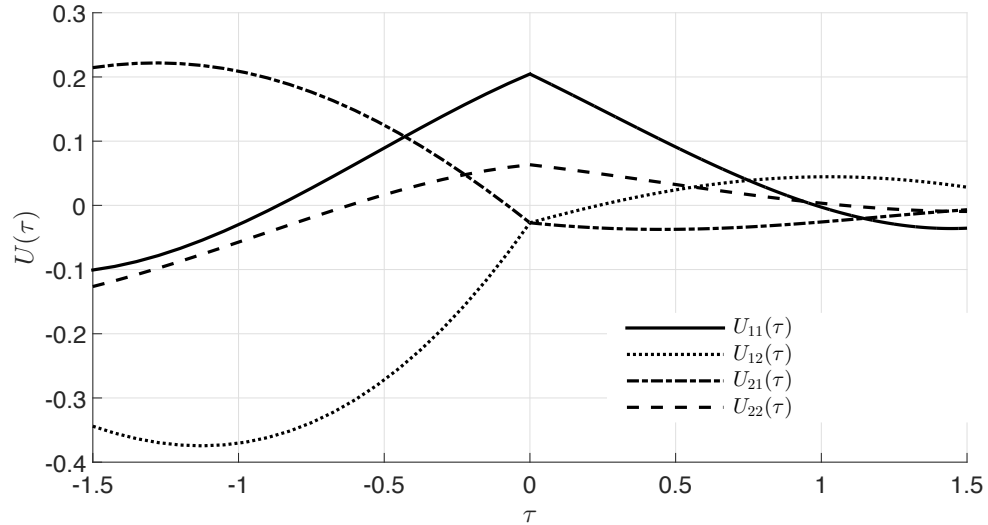


Figura 4.3: Componentes de la Matriz de Lyapunov aproximada $\hat{U}(\tau)$ para el SIR (4.71) con $h=1.5$

Como se puede ver en las Figs. 4.2 y 4.3, la matriz fundamental $K(t)$ presenta una discontinuidad de tipo salto en $t = 0$ mientras que la matriz de Lyapunov es continua para todo $\tau \in [-1.5, 1.5]$ como se esperaba del Lema 9. Para evaluar la calidad de la matriz de Lyapunov aproximada, se seleccionan matrices $W_0 = 0.15I$ y $W_1 = 0.5667I$ entonces $W = W_0 + hW_1 = I$. Cálculos directos muestran que $\sigma = 4.3537 \times 10^{-4}$ y $\delta = 9.3479 \times 10^{-5}$ que conducen a $\alpha = 7.4088 \times 10^{-5}$ y $\gamma = 2.8852 \times 10^{-4}$. Entonces, la medida de la calidad de la aproximación es $\varepsilon = 5.0913 \times 10^{-4}$.

Ahora se muestra una tabla donde se ilustra que entre más fina sea la partición N , el error de aproximación es más pequeño.

	N=5	N=10	N=15	N=20
σ	0.0069	0.0017	7.7381×10^{-4}	4.3537×10^{-4}
δ	0.0018	4.3827×10^{-4}	1.8291×10^{-4}	9.3479×10^{-5}
α	0.0012	2.9595×10^{-4}	1.3168×10^{-4}	7.4088×10^{-5}
γ	0.0047	0.0012	5.2137×10^{-4}	2.8852×10^{-4}
ε	0.0084	0.0021	9.2000×10^{-4}	5.0913×10^{-4}

Tabla 4.1: Error de aproximación para distintos valores de partición N en el ejemplo (4.71) con $h = 1.5$

Como se puede observar en la tabla anterior, mientras más particiones se consideren en la construcción de matrices de Lyapunov para SIR, el error de aproximación va disminuyendo.

Ejemplo 2 Para ilustrar el efecto de la variación del retardo en la construcción de la matriz de Lyapunov, considere el SIR (4.71) del ejemplo anterior pero ahora con retardo $h = 4.5$. Dado que para estos valores numéricos los valores propios $\lambda_{1,2} = -0.05 \pm 0.357i$ de la matriz F del SIR (4.71) se encuentran dentro del dominio abierto $\Gamma_{4.5}$, cuya frontera está dada por la expresión en (3.20), la región de estabilidad se muestra en la Fig. 4.4 se sigue que el SIR (4.71) es exponencialmente estable.

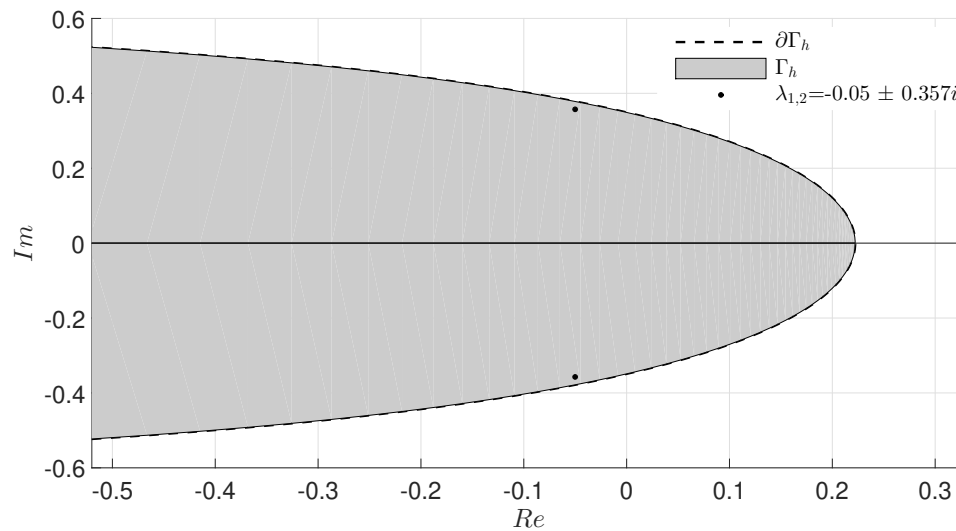


Figura 4.4: Región de estabilidad del SIR (4.71) con $h = 4.5$

El cálculo de $K(t)$ para $t \in [0, 4.5]$, utilizando la observación [1] se muestra en la Fig. 4.5

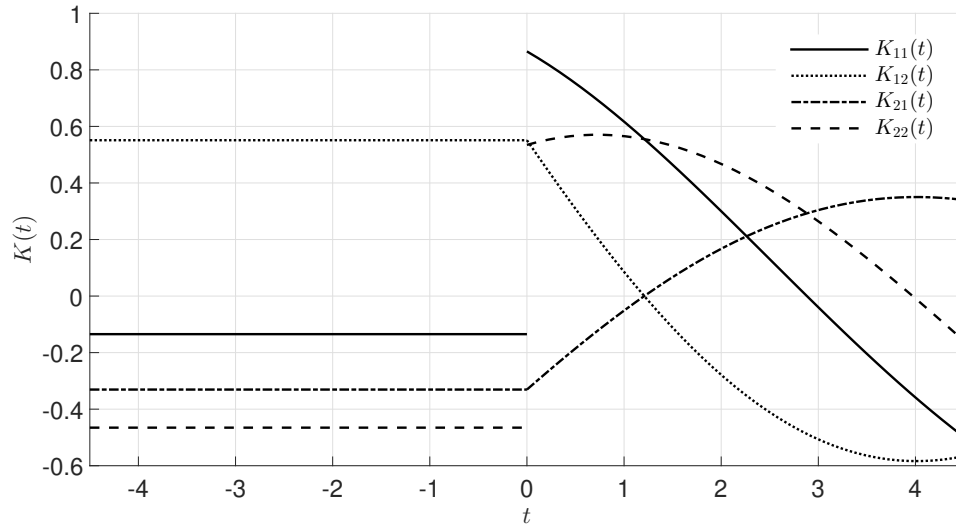


Figura 4.5: Componentes de la matriz fundamental $K(t)$ del SIR (4.71) con $h = 4.5$

Ahora, para $W_0 = 0.015I$ y $W_1 = 0.2188I$ lo que lleva a $W = W_0 + hW_1 = I$ y $N = 20$ se usa el algoritmo propuesto para calcular la función inicial aproximada y la solución aproximada correspondiente de ecuación integral (3.26) asociada al SIR (4.71) con $h = 4.5$. La matriz de Lyapunov aproximada $\hat{U}(\tau)$, $\tau \in [-4.5, 4.5]$, se muestra en la Fig. 4.6

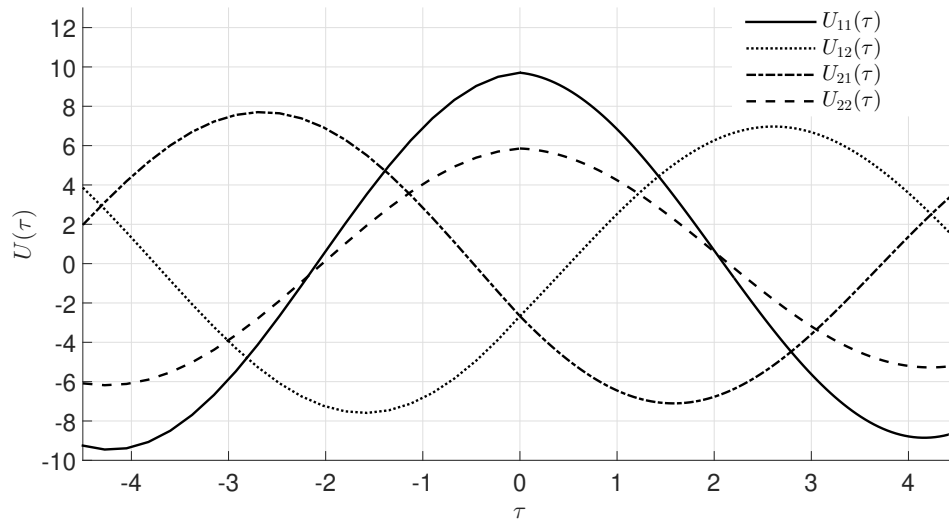


Figura 4.6: Componentes de la Matriz de Lyapunov aproximada $\hat{U}(\tau)$ del SIR (4.71) con $h = 4.5$

Como se puede ver en las Figs. 4.5 y 4.6 variando el retardo a $h = 4.5$ cambia considerablemente el comportamiento de la solución de la matriz fundamental así como el compor-

tamiento de la solución de la matriz de Lyapunov $\hat{a}(\tau)$, las soluciones oscilan a diferencia de las soluciones con retardo $h = 1.5$. Esto se debe a que los valores propios del kernel del SIR (4.71) se acercan a la frontera de estabilidad $\partial\Gamma_h$ cuando se incrementa el retardo de $h = 1.5$ a $h = 4.5$, cabe resaltar que si se sigue aumentando el retardo, el SIR (4.71) pierde su propiedad de estabilidad exponencial.

Para evaluar la calidad de la matriz de Lyapunov aproximada, se seleccionan matrices $W_0 = 0.015I$ y $W_1 = 0.2188I$ entonces $W = W_0 + hW_1 = I$. Cálculos directos muestran que $\sigma = 0.047$ y $\delta = 0.0206$ que conducen a $\alpha = 0.008$ y $\gamma = 0.1095$. Entonces, la medida de la calidad de la aproximación es $\varepsilon = 0.5327$.

Ahora se muestra una tabla donde se ilustra la medida del error para distintos valores de partición N

	N=5	N=10	N=15	N=20
σ	0.4903	0.1745	0.0823	0.047
δ	0.2431	0.0793	0.037	0.0206
α	0.0834	0.0297	0.014	0.008
γ	1.1858	0.411	0.1932	0.1095
ε	5.5622	1.9793	0.9336	0.5327

Tabla 4.2: Error de aproximación para distintos valores de partición N del sistema integral con retardo (4.71) para $h = 4.5$

Comparando los errores de aproximación del SIR (4.71) para retardo $h = 1.5$ en la Tabla 4.1 y $h = 4.5$ en la Tabla 4.2 se puede observar que el error aumenta para retardos más grandes, esto se debe que se están considerando el mismo numero de particiones para dos retardos distintos. Así, si se quiere reducir el error de aproximación al aumentar el retardo se necesita aumentar también el número de partición N .

Ejemplo 3 Para ilustrar el comportamiento de la matriz de Lyapunov cuando se considera un SIR con kernel con valores propios reales, considere el SIR siguiente:

$$x(t) = F \int_{-h}^0 x(t + \theta) d\theta \quad (4.72)$$

donde

$$F = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.3 \\ 0.6 & 0.2 \end{bmatrix},$$

y el retardo $h = 0.5$. Dado que para estos valores numéricos los valores propios $\lambda_1 = -0.6169$ y $\lambda_2 = 0.4196$ de la matriz F del SIR (4.72) se encuentran dentro del dominio abierto $\Gamma_{0.5}$ cuya frontera está dada por la expresión en (3.20), la región de estabilidad se puede ver en la Fig. 4.7, se sigue que el SIR (4.72) es exponencialmente estable.

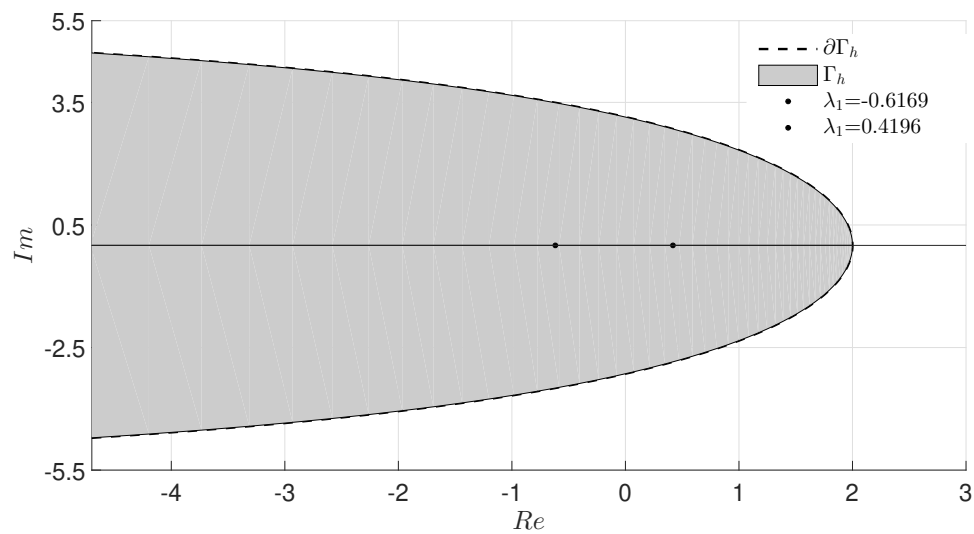


Figura 4.7: Región de estabilidad del SIR (4.72) con $h = 0.5$

Las componentes de la matriz fundamental $K(t)$ para $t \in [0, 0.5]$, utilizando la observación 1, se muestran en la Fig. 4.8

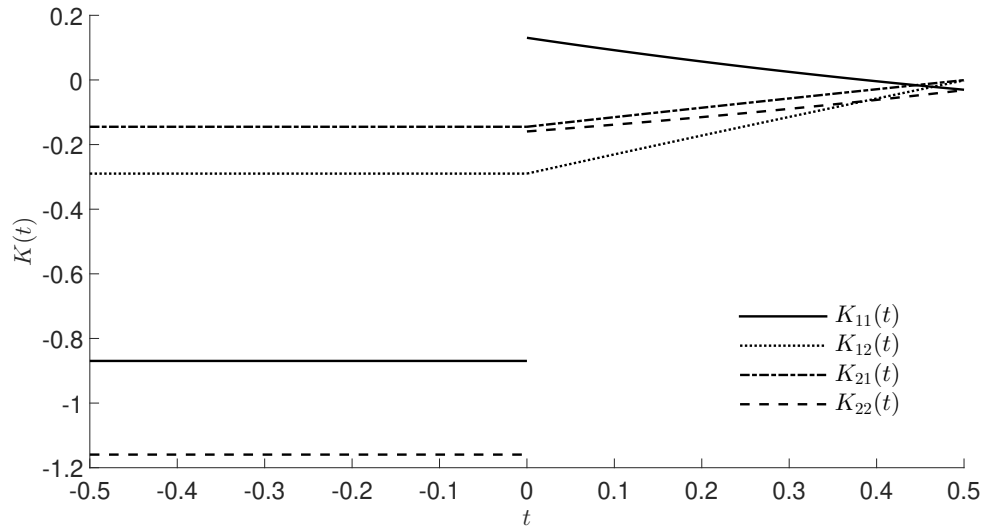


Figura 4.8: Componentes de la matriz fundamental $K(t)$ del SIR (4.72) con $h = 0.5$

Ahora para $W_0 = 0.58I$ y $W_1 = 0.84I$ lo que lleva a $W = W_0 + hW_1 = I$. y $N = 20$ se usa el algoritmo propuesto para calcular la función inicial aproximada y la solución aproximada correspondiente de la ecuación integral (3.26) asociada al SIR (4.72) con $h = 0.5$. Las componentes de la matriz de Lyapunov aproximada $\hat{U}(\tau)$, $\tau \in [-0.5, 0.5]$, se muestran en la Fig. 4.9

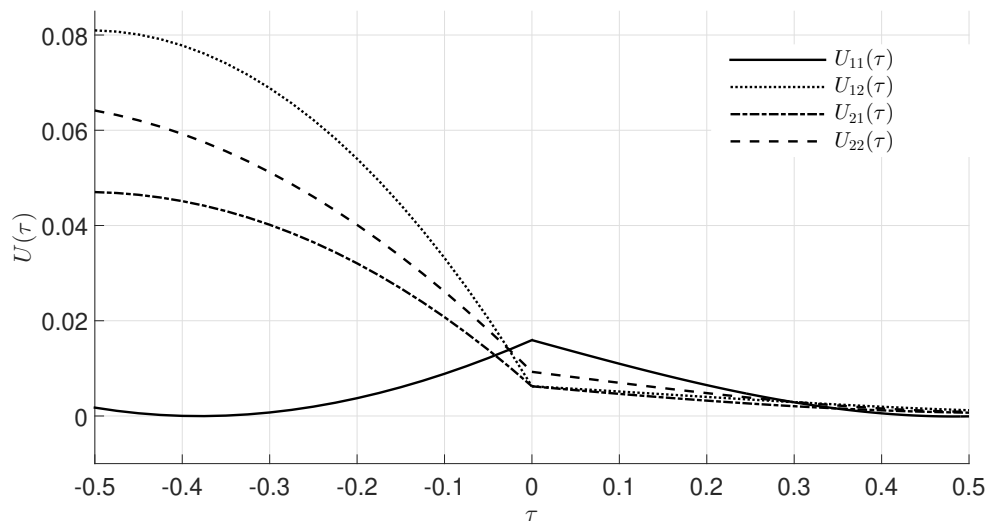


Figura 4.9: Componentes de la Matriz de Lyapunov aproximada $\hat{U}(\tau)$ del SIR (4.72) con $h = 0.5$

Como se puede ver en las Figs. 4.8 y 4.9 tanto las trayectorias solución de la matriz funda-

mental $K(t)$, $t \in [-0.5, 0.5]$ como las trayectorias solución de la matriz de Lyapunov $\hat{U}(\tau)$, $\tau \in [-0.5, 0.5]$ son considerablemente más pequeñas en norma que la función inicial cuando se consideran valores propios reales, a diferencia de cuando se consideran valores propios complejos conjugados, que en este último caso no hay un cambio considerable en norma de la función inicial a las de las trayectorias solución.

Para evaluar la calidad de la matriz de Lyapunov aproximada, se seleccionan matrices $W_0 = 0.58I$ y $W_1 = 0.84I$ entonces $W = W_0 + hW_1 = I$. Cálculos directos muestran que $\sigma = 4.8755 \times 10^{-5}$ y $\delta = 7.5901 \times 10^{-6}$ que conducen a $\alpha = 1.2676 \times 10^{-5}$ y $\gamma = 1.7453 \times 10^{-5}$. Entonces, la medida de la calidad de la aproximación es $\varepsilon = 2.1856 \times 10^{-5}$.

A continuación se muestra una tabla con distintos valores de partición.

	N=5	N=10	N=15	N=20
σ	7.7366×10^{-4}	1.9459×10^{-4}	8.7340×10^{-5}	4.8755×10^{-5}
δ	1.5418×10^{-4}	3.6926×10^{-5}	1.5693×10^{-5}	7.5901×10^{-6}
α	2.0115×10^{-4}	5.0594×10^{-5}	2.2708×10^{-5}	1.2676×10^{-5}
γ	2.8572×10^{-4}	7.1381×10^{-5}	3.1810×10^{-5}	1.7453×10^{-5}
ε	3.4681×10^{-4}	8.7231×10^{-5}	3.9153×10^{-5}	2.1856×10^{-5}

Tabla 4.3: Error de aproximación para distintos valores de partición N de la matriz de Lyapunov del sistema integral con retardo (4.72) con $h = 0.5$, con valores propios reales del kernel

Como se puede observar de las tablas 4.1, 4.2 y 4.3 y comparando los errores de aproximación de los ejemplos 1, 2 y 3, se puede observar que el error de aproximación de la matriz de Lyapunov aproximada $\hat{U}(\tau)$ esta relacionado con la magnitud de retardo h y el número de particiones N .

4.7. Aplicaciones

4.7.1. Estimados exponenciales para soluciones de SIR

En esta sección se muestra como la funcional de tipo completo $v(\varphi)$ dada por la igualdad (3.23) puede ser usada para obtener estimados exponenciales para soluciones de un SIR exponencialmente estable de la forma (3.16).

Es importante resaltar que dicho resultado se obtuvo en [23], a continuación se enuncia el resultado en el lema siguiente:

Lema 14 [23] *Sea el sistema (3.16) exponencialmente estable. Entonces existen constantes $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2$, tal que la funcional (3.23) satisface las desigualdades siguientes:*

$$\alpha_1 \int_{-h}^0 \|\varphi(\theta)\|^2 d\theta \leq v(\varphi) \leq \alpha_2 \int_{-h}^0 \|\varphi(\theta)\|^2 d\theta, \quad \text{para constantes } 0 < \alpha_1 \leq \alpha_2, \quad (4.73)$$

donde las constantes α_1 y α_2 satisfacen las desigualdades siguientes:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &\geq 2hu_0m^2 + \lambda_{\max}(W_0 + hW_1) + (1 + mhe^{mh})h^2 \|K_0\| \|F^T K_0^T W\| \|F\| \\ \alpha_2 &\geq \lambda_{\max}(W_0 + hW_1) \geq \lambda_{\min}(W_0) \geq \alpha_1 > 0, \end{aligned}$$

donde $u_0 = \max_{\tau \in [-h, h]} \|U(\tau)\|$.

Ahora, se tiene que para $\beta = \lambda_{\min}(W_1)$ la funcional anterior admite la cota inferior siguiente:

$$\beta \int_{-h}^0 \|\varphi(\theta)\|^2 d\theta \leq w(\varphi). \quad (4.74)$$

Entonces la funcional $v(\varphi)$ dada por (3.23) y (3.24) satisfacen las condiciones 1 y 2 del Teorema 8. De este Teorema es posible mostrar que

$$\|x_t(\varphi)\|_h \leq \mu \|\varphi\|_h e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0, \quad (4.75)$$

donde $\mu = hm\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}$ y $\alpha = \frac{\beta}{2\alpha_2}$, para toda trayectoria solución $x_t(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{PC}$ del SIR (3.16). Para ilustrar el resultado anterior se usa la matriz de Lyapunov del SIR (4.71) con $h = 1.5$ y matrices $W_0 = 0.15I$ y $W_1 = 0.5667I$.

Para los parámetros considerados se obtienen los valores siguientes: Del cálculo de $U(\tau)$ para $\tau \in [-1.5, 1.5]$, se obtiene $u_0 = 0.3746$, de este modo para $\beta = 0.5667$ la desigualdad (4.74) se satisface. Cálculos directos muestran que para $\alpha_1 = 0.15$ y $\alpha_2 = 3.6714$ la desigualdad (4.73) se satisface.

De este modo, las trayectorias solución del SIR (4.71), con los parámetros considerados anteriormente, satisfacen el estimado exponencial siguiente:

$$\|x_t(\varphi)\|_h \leq \mu \|\varphi\|_h e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0, \quad (4.76)$$

donde

$$\mu \approx 4.3293 \quad \text{y} \quad \alpha \approx 0.0772.$$

Ahora usando este estimado, se procede a calcular una solución del SIR (4.71) con función inicial siguiente:

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in [-0.5, 0).$$

La solución del SIR (4.71) y retardo $h = 1.5$ usando la función inicial anterior se puede ver en la Fig. 4.10.

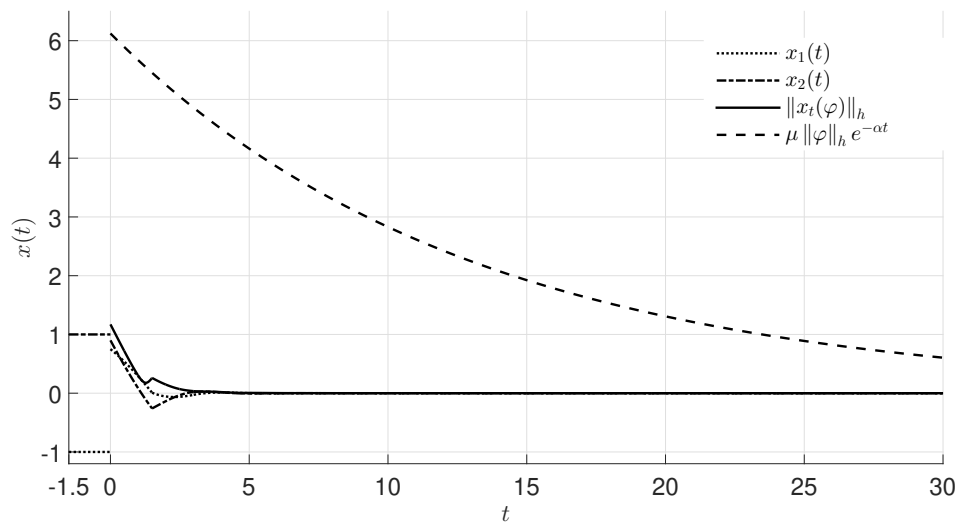


Figura 4.10: Estimado exponencial para una solución del SIR (4.71)

4.7.2. Condiciones de estabilidad robusta

En esta sección se aborda el análisis de estabilidad robusta de SIR perturbados (3.16). Considere el sistema perturbado

$$\hat{x}(t) = (F + \Delta) \int_{-h}^0 \hat{x}(t + \theta) d\theta \quad (4.77)$$

donde $\Delta \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz desconocida que satisface

$$\|\Delta\| \leq \rho. \quad (4.78)$$

El objetivo principal de estabilidad robusta es mostrar como la funcional de Lyapunov-Krasovskii de tipo completo (3.23), con el cálculo previo de la matriz de Lyapunov para el sistema nominal (3.16), ayuda a encontrar una cota superior de ρ tal que el sistema perturbado (4.77) se mantenga exponencialmente estable para todas las perturbaciones que satisfagan (4.78). A continuación se enuncia el resultado principal obtenido en [23] sobre estabilidad robusta de SIR.

Considere la funcional de Lyapunov-Krasovskii de tipo completo $v(\varphi)$ (3.23), es posible mostrar que la derivada de la funcional $v(\varphi)$ a lo largo de las soluciones del SIR perturbado (4.77) satisface la cota superior siguiente

$$\frac{d}{dt} v(\hat{x}_t) \leq -w(\hat{x}_t) + (a\rho^2 + b\rho) \int_{-h}^0 \|\hat{x}(t + \theta)\|^2 d\theta$$

donde

$$a = \|W\| h$$

$$b = 4hu_0m^2 + 2mh \left[\|F^T K_0^T W K_0 h + U(0)F - U(-h)F - K_0^T W\| + \|F^T K_0^T W K_0\| h \right].$$

Teorema 11 [23] *Sea el SIR (3.16) exponencialmente estable. Dadas matrices W_0 y W_1 definidas positivas, el sistema perturbado (4.77) permanece exponencialmente estable para todas las perturbaciones Δ que satisfacen (4.78) si ρ es tal que se mantiene la desigualdad*

siguiente:

$$\lambda_{\min}(W_1) - (a\rho^2 + b\rho) > 0. \quad (4.79)$$

Ahora se procede a ilustrar el resultado anterior, para esto se utiliza la matriz de Lyapunov del SIR (4.72) con $h = 0.5$ y matrices $W_0 = 0.58I$ y $W_1 = 0.84I$.

Del cálculo de $U(\tau)$ para $\tau \in [-0.5, 0.5]$, se obtiene que $u_0 = 0.081$. De la Fig. 4.9 se obtienen los valores siguientes:

$$\begin{aligned} U(0) &= \begin{pmatrix} 0.0159 & 0.0062 \\ 0.0062 & 0.0092 \end{pmatrix}, \\ U(-0.5) &= \begin{pmatrix} 0.0017 & 0.0809 \\ 0.047 & 0.0641 \end{pmatrix}, \\ u_0 &= 0.081. \end{aligned}$$

Cálculos directos en (4.79) muestran que el SIR perturbado (4.77) permanece exponencialmente estables para toda perturbación Δ que satisfaga (4.78) si

$$\rho < 0.6105 \quad \text{para} \quad a = 0.5 \quad b = 1.0708.$$

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

Conclusiones

En esta tesis, se estudian las matrices de Lyapunov para SIR exponencialmente estables. Se tienen las siguientes conclusiones principales:

1. Se presentan nuevas propiedades de la matriz de Lyapunov para SIR.
2. Se demuestra la unicidad de matrices de Lyapunov para SIR exponencialmente estables.
3. Se aborda el problema de construcción de matrices de Lyapunov para SIR. Se presenta un algoritmo numérico para calcular aproximaciones lineales a pedazos así como un procedimiento para medir el error de aproximación de matrices de Lyapunov para SIR.

En la presentación de los resultados, se siguieron y adaptaron ideas principales en [11] para SDR. En este sentido, los resultados son una extensión natural para SIR de algunos resultados conocidos importantes en matrices de Lyapunov para SDR.

Trabajo futuro

1. Encontrar condiciones de existencia de soluciones del sistema de ecuaciones matriciales (4.47)-(4.49).

2. Quitar la restricción de estabilidad exponencial en la construcción de matrices de Lyapunov de SIR.
3. Extender los resultados a múltiples retardos conmensurados y no conmensurados.
4. Extender los resultados a un kernel más general. i.e. $F(\theta)$, $\theta \in [-h, 0]$ una función elemento de \mathcal{PC} .

CAPÍTULO 6

PUBLICACIONES

Revistas indexadas

ARISMENDI-VALLE H. AND MELCHOR-AGUILAR, D. On the Lyapunov matrices for integral delay systems. *Int. J. Syst. Sci.* 47, DOI: [10.1080/00207721.2019.1597943](https://doi.org/10.1080/00207721.2019.1597943)

Congresos

ARISMENDI-VALLE H. AND MELCHOR-AGUILAR, D. Numerical Computation of Lyapunov Matrices for Integral Delay Systems. *IFAC-PapersOnLine 2017*, 50 (1), 13342 – 13347.

ARISMENDI-VALLE H. AND MELCHOR-AGUILAR, D. Cálculo numérico de matrices de Lyapunov de sistemas integrales con retardo. *CLCA 2016*, 148 – 154, Medellin, Colombia.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] BELLMAN, R. E., AND COOKE, K. L. *Differential-difference equations*. Mathematics in Science and Engineering. Academic Press, New York, 1963.
- [2] BELLMAN, R. E., AND DANSKIN, J. M. *A survey of the mathematical theory of time-lag, retarded control, and hereditary processes*. Rand corporation, 1954.
- [3] DELFOUR, M. The linear-quadratic optimal control problem with delays in state and control variables: A state space approach. *SIAM Journal on Control and Optimization* 24, 5 (1986), 835–883.
- [4] ENGELBORGHES, K., DAMBRINE, M., AND ROOSE, D. Limitations of a class of stabilization methods for delay systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on* 46, 2 (Feb 2001), 336–339.
- [5] GU, K., KHARITONOV, V., AND CHEN, J. *Stability of Time-Delay Systems*. Addison-Wesley series in electrical and computer engineering: Control engineering. Birkhäuser Boston, 2003.
- [6] GU, K., AND NICULESCU, S.-I. Additional dynamics in transformed time-delay systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on* 45, 3 (Mar 2000), 572–575.
- [7] GU, K., AND NICULESCU, S.-I. Further remarks on additional dynamics in various model transformations of linear delay systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on* 46, 3 (Mar 2001), 497–500.

- [8] HALE, J. K., AND LUNEL, S. M. V. *Introduction to Functional Differential Equations*, vol. 99 of *Applied Mathematical Science*. Springer-Verlag, 1993.
- [9] HOLMES, M. *Introduction to Perturbation Methods*. Texts in Applied Mathematics. Springer New York, 2013.
- [10] KARAFYLLIS, I., AND KRSTIC, M. On the relation of delay equations to first-order hyperbolic partial differential equations. *ESAIM: COCV 20* (2014), 894–923.
- [11] KHARITONOV, V. *Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices*. Birkhäuser, 2013.
- [12] KHARITONOV, V., AND ZHABKO, A. Lyapunov-krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems. *Automatica 39*, 1 (2003), 15 – 20.
- [13] KHARITONOV, V. L., AND MELCHOR-AGUILAR, D. On delay dependent stability conditions. *Syst. Control. Lett. 40*, 1 (2000), 71 – 76.
- [14] KHARITONOV, V. L., AND MELCHOR-AGUILAR, D. Additional dynamics for general class of time-delay systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on 48*, 6 (June 2003), 1060–1063.
- [15] KOLMANOVSKII, V., AND RICHARD, J. P. Stability of some linear systems with delays. *IEEE T. Automat. Contr. 44*, 5 (May 1999), 984–989.
- [16] KRASOVSKII, N. *Stability of Motion; Applications of Lyapunov's Second Method to Differential Systems and Equations With Delay*. Stanford University Press, 1963.
- [17] KRSTIC, M. *Delay compensation for nonlinear, adaptive and PDE systems*. Birkhäuser, 2009.
- [18] LEVINE, W. *The Control Handbook*. Electrical Engineering Handbook. Taylor & Francis, 1996.
- [19] MANITIUS, A. Feedback controllers for a wind tunnel model involving a delay: Analytical design and numerical simulation. *Automatic Control, IEEE Transactions on 29*, 12 (Dec 1984), 1058–1068.

- [20] MANITUS, A., AND OLBROT, A. Finite spectrum assignment problem for systems with delays. *IEEE T. Automat. Contr.* 24 (1979), 541–553.
- [21] MELCHOR-AGUILAR, D. On stability of integral delay systems. *Appl. Math. Comput.* 217, 7 (2010), 3578 – 3584.
- [22] MELCHOR-AGUILAR, D. New results on robust exponential stability of integral delay systems. *Int. J. Syst. Sci.* 47, 8 (2014), 1905–1916.
- [23] MELCHOR-AGUILAR, D., KHARITONOV, V., AND LOZANO, R. Stability conditions for integral delay systems. *Int. J. Robust. Nonlin.* 20, 1 (2010), 1–15.
- [24] MICHIELS, W., MONDIÉ, S., ROOSE, D., AND DAMBRINE, M. The effect of approximating distributed delay control laws on stability. In *Advances in Time-Delay Systems*, S.-I. Niculescu and K. Gu, Eds., vol. 38 of *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*. Springer Berlin Heidelberg, 2004, pp. 207–222.
- [25] MINORSKY, N. Self-excited oscillations in dynamic systems possessing retarded actions. *J. Appl. Mech.* 9 (1942), 65–71.
- [26] MONDIÉ, S., DAMBRINE, M., AND SANTOS, O. Approximation of control laws with distributed delays: a necessary condition for stability. *Kybernetika* 38, 5 (2002), [541]–551.
- [27] MONDIÉ, S., AND MELCHOR-AGUILAR, D. Exponential stability of integral delay systems with a class of analytic kernels. *IEEE T. Automat. Contr.* 57, 2 (2012), 484–489.
- [28] MYSHKIS, A. D. General theory of differential equations with retarded arguments. *Uspekhi Mat. Nauk* 4, 33 (1949), 99–141.
- [29] OSIPOV, T. S. Stabilization of controlled systems with delay. *Diff. Uravneniya* 1, 5 (May 1965), 887–890.
- [30] VAN ASSCHE, V., DAMBRINE, M., LAFAY, J., AND RICHARD, J. P. Some problems arising in the implementation of distributed-delay control laws. In *Decision and Con-*

trol, 1999. Proceedings of the 38th IEEE Conference on (1999), vol. 5, pp. 4668–4672
vol.5.

- [31] YANUSHEVSKY, R. Lyapunov's functionals and related optimal problems for differential-difference systems. *Computers & Mathematics with Applications* 25, 10/11 (1993), 89 – 101.