

**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

POSGRADO EN CIENCIAS APLICADAS

**Efectos de Fricción en la Dinámica de Terremotos:
Una Caracterización del Comportamiento Oscilatorio
Respecto del Valor Crítico de Nucleación**

Tesis que presenta

M. en C. Valentina Castellanos Rodríguez

Para obtener el grado de

Doctorado en Ciencias Aplicadas

En la opción de

Geociencias Aplicadas

Director de la Tesis:

Dr. Alejandro Ricardo Femat Flores

San Luis Potosí, S.L.P., 05 días del Mes de Febrero 2015



Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Geociencias Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. Alejandro Ricardo Femat Flores.

Durante la realización del trabajo la autora recibió del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) la beca académica número 44731; y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C. apoyo para redacción de tesis y artículos científicos, a través de las Divisiones de Matemáticas Aplicadas y de Geociencias Aplicadas.



Constancia de aprobación de la tesis

La tesis "***Efectos de Fricción en la Dinámica de Terremotos: Una Caracterización del Comportamiento Oscilatorio Respecto del Valor Crítico de Nucleación***" presentada para obtener el Grado de Doctora en Ciencias Aplicadas en la opción de Geociencias Aplicadas fue elaborada por Valentina Castellanos Rodríguez y aprobada el **cinco de febrero del dos mil quince** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Geociencias Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Dr. Alejandro Ricardo Femat Flores
Director de la tesis

Dr. José Noel Carbajal Pérez
Miembro del Comité Tutorial

Dra. Birgit Steinich
Miembro del Comité Tutorial

Dr. Eric Campos Cantón
Miembro del Comité Tutorial

Dr. Javier Salvador González Salas
Miembro del Comité Tutorial

Dedicatoria

A Jehová Elohim-Shaddai

*¿Quién puso la sabiduría en el corazón? ¿O quién dio al espíritu inteligencia?
Job 38:36 De Jehová es toda sabiduría y de su boca viene el conocimiento y la
inteligencia Prov.2:6...y si alguno tiene falta de sabiduría pídale a Dios y le será
dada Sant.1:5*



Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Acta de Examen de Grado

El Secretario Académico del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 001 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Doctorado en Ciencias Aplicadas en la opción de Geociencias Aplicadas está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 5 días del mes de febrero del año 2015, se reunió a las 16:00 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

Dr. José Noel Carbajal Pérez	Presidente	IPICYT
Dr. Alejandro Ricardo Femat Flores	Secretario	IPICYT
Dra. Birgit Steinich	Sinodal	IPICYT
Dr. Eric Campos Cantón	Sinodal	IPICYT
Dr. Javier Salvador González Salas	Sinodal externo	UPSLP

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

**DOCTORA EN CIENCIAS APLICADAS
EN LA OPCIÓN DE GEOCIENCIAS APLICADAS**

sustentó la C.

Valentina Castellanos Rodríguez

sobre la Tesis intitulada:

Efectos de Fricción en la Dinámica de Terremotos: Una Caracterización del Comportamiento Oscilatorio Respecto del Valor Crítico de Nucleación

que se desarrolló bajo la dirección de

Dr. Alejandro Ricardo Femat Flores


El Jurado, después de deliberar, determinó

APROBARLA

Dándose por terminado el acto a las 18:03 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fe el Secretario Académico del Instituto.

A petición de la interesada y para los fines que a la misma convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 5 días del mes de febrero de 2015.


Mtra. Ivonne Lizette Cuevas-Vélez
Jefa del Departamento del Posgrado


Dr. Marcial Bonilla Marín
Secretario Académico



Agradecimientos

A mi Dios porque me dio la fortaleza necesaria para culminar esta etapa de mi vida,

A mi asesor y director de tesis, Dr. Alejandro Ricardo Femat Flores, por darme la oportunidad de desarrollar mi proyecto en IPICYT, y por el apoyo que me brindó a lo largo de 4 años,

Al Dr. José Alfredo Ramos Leal por su gran calidad humana, porque me apoyó en momentos difíciles,

Al Dr. J. Gonzalo Barajas Ramírez, por su orientación, apoyo, sugerencias con incisos, y calidad como ser humano,

Al Dr. Eric Campos Cantón por su apoyo académico constante,

A los integrantes del Seminario de Sistemas Dinámicos No lineales de la DMAP, por sus críticas para mejorar el trabajo,

Al Dr. J. Noel Carbajal por sus aportaciones valiosas al trabajo de investigación,

En general agradezco a todos los que en algún momento estuvieron conmigo para darme ánimos, consejos, sugerencias, y orientación, tanto en el plano académico como en el personal.

A todos Ustedes **GRACIAS**

Resumen

Analizamos un sistema dinámico no lineal del mecanismo cinético entre dos bloques tectónicas en la corteza terrestre continental bajo movimiento *stick slip*, que incluye la ley de fricción dinámica de Dieterich-Ruina; ley que es dependiente de la tasa de desplazamiento y de una variable de estado; complementamos el sistema con otra ley de fricción empírica llamada efecto Stribeck que describe la transición de superficies secas o lubricadas en la frontera a superficies con fluidos entre las conjunturas de asperezas. El sistema es una representación del movimiento de un bloque que se desplaza sobre una superficie rugosa y lubricada en un medio viscoelástico, y es formulado como un sistema de 3er orden de ecuaciones diferenciales ordinarias y se analizan dos casos con el modelo: el desgaste por asperezas (caso continuo) y fracturas (caso conmutado). Consideramos además la presencia de una fuerza externa (vibraciones de fallas vecinas) que perturba al sistema y nos enfocamos en el comportamiento oscilatorio en el entorno del valor crítico que separa las regiones friccionalmente estable de la inestable. Mostramos que el sistema reproduce el comportamiento de la región de oscilaciones autosostenidas que se ha asociado con la ocurrencia de sismos lentos, los cuales se originan en la base de la región de nucleación de grandes sismos y pueden ser disparadores de estos. El sistema nos permite construir un esquema matemático y numérico para esa región en términos de parámetros sísmicos y friccionales.

Abstract

We propose and analyze a nonlinear dynamical system that represents the kinetic mechanism between tectonic plates on the earth's crust undergoing stick-slip movement; the system involves a dynamical friction law of Dieterich-Ruina which is dependent of rate displacement and state variable. The system is complemented by the empirical friction law named Stribeck's effect that describes the transition from dry to viscous surfaces. The system models one slider block over a roughness and lubricated surface and it is formulated as a system of 3rd order differential equation. Two cases are analyzed with the model: wearing down asperities (continuous case) and fractures (switched case). Moreover, we consider an external force (vibrations from neighbor faults) and focus on the oscillatory behavior around the critical value that separates the regions stable and unstable. We show that proposed dynamical system reproduces the behavior of the region of self-sustained oscillations related with slow earthquakes which are originated on the base of nucleation zone of large earthquake and may fast trigger events. The system let us to construct a mathematical and numerical framework for that region in terms of seismic and frictional parameters.

Índice temático

Índice de figuras	XIX
Índice de tablas	XXV
1. Introducción	1
1.1. Modelación de terremotos	1
1.2. Planteamiento del problema	6
1.2.1. Preguntas de investigación	8
1.2.2. Delimitación del problema	9
1.3. Objetivos de la Tesis	9
1.3.1. Objetivo general	9
1.3.2. Objetivos particulares y específicos	10
1.4. Estructura de la tesis	11
2. Preliminares	15
2.1. Marco geológico y sismológico	15
2.1.1. La estructura de la Tierra	15
2.1.2. Génesis de terremotos	19
2.1.3. Física de terremotos	21
2.1.4. Leyes constitutivas de fricción	24
2.2. Preliminares matemáticos	26
2.2.1. Teoría de sistemas dinámicos	26
2.2.2. Estabilidad en sentido de Lyapunov	29
2.2.3. Bifurcaciones	30
2.2.4. Soluciones numéricas	35
3. Sistema Dinámico Propuesto	39
3.1. Modelo conceptual	39
3.2. Lubricación en la zona de falla	41
3.3. Leyes de fricción	42
3.3.1. Efecto Stribeck	42

3.3.2.	Ley de fricción de Dieterich-Ruina	45
3.4.	Sistema dinámico	49
3.4.1.	Sistema adimensional	49
3.5.	Dos casos de estudio	52
4.	Análisis del Sistema para un Caso Continuo	55
4.1.	Sistema continuo homogéneo	55
4.1.1.	Existencia y Unicidad de las soluciones	56
4.1.2.	Análisis de estabilidad	56
4.1.3.	Análisis de Valores propios	58
4.1.4.	Bifurcación de Hopf, Rango Oscilatorio y Región de oscilaciones autosostenidas	62
4.2.	El sistema bajo perturbaciones externas	68
4.2.1.	Diagramas de bifurcación para el sistema perturbado	70
5.	Valor crítico en zonas de nucleación	77
5.1.	Regímenes de estabilidad y temperatura	77
5.1.1.	Tasas friccionales A y $A - B$	77
5.1.2.	Relación: A , $A - B$, y temperatura	78
5.2.	Valor crítico, profundidad, temperatura y esfuerzo	81
5.3.	Comportamiento sísmico	82
5.3.1.	Falla de Laguna Salada	85
6.	Sistema dinámico conmutado (<i>switching</i>)	89
6.1.	Caracterización matemática	90
6.1.1.	El sistema conmutado	90
6.1.2.	Familia de subsistemas	90
6.2.	Estabilidad del sistema conmutado	94
6.2.1.	Método indirecto de Lyapunov	95
6.2.2.	Método directo de Lyapunov	98
6.3.	Sistema perturbado	100
6.3.1.	Comportamiento con variación de ω	100
6.3.2.	Soluciones numéricas	101
7.	Conclusiones y Discusión	105
7.1.	Conclusiones	105
7.2.	Discusión	106
	Bibliografía	110
	Anexos	116

Índice de figuras

1.1.	Número de terremotos por magnitudes, y número de muertes estimadas. Datos de NEIC (National Earthquakes Information Center) [8].	1
1.2.	Sismicidad [10] en México 2006 al 2012. Sismos de magnitudes mayores o iguales a 5 en escala de Richter.	2
1.3.	Daños materiales causados por terremotos [9]. (a) México DF, 1985; (b) Tsunami de Japón 2011; (c) Sismo de Haití 2010, y (d) Sismo en Baja California (México), 2010.	3
1.4.	El modelo de Burridge and Knopoff [20] consiste de N bloques idénticos de masa M , moviéndose sobre una superficie rugosa, y acoplados a través de resortes duros de constante K_p , a una placa que se mueve a velocidad constante v_p , representando el otro lado de la falla, y K_c es el coeficiente del resorte entre los bloques.	4
2.1.	Estructura de la Tierra.	17
2.2.	(a) Composición química de la corteza. (b) El granito es la roca más representativa de la corteza terrestre; está formado fundamentalmente por minerales como cuarzo, plagioclasa, feldespatos alcalinos (ortosa) y biotita. (c) Roca de granito.	18
2.3.	Sismicidad mundial [8] 2005. Los círculos café indican eventos sísmicos.	20
2.4.	Placas tectónicas.	21
2.5.	Tipos de fallas geológicas [57]. (a) Falla Inversa, (b) Falla Normal, y (c) falla transcurrente.	22
2.6.	Escalas para el estudio de terremotos (esquema de Daub y Carlson [42]).	23
2.7.	Leyes constitutivas de fricción para fallas sísmicas (Daub y Carlson [42]).	25
2.8.	Plano de Poincaré [82]. x^* es un punto fijo de P ; i. e., $P(x^*) = x^*$. Una trayectoria que empieza en x^* regresa a x^* después de un tiempo T y es por lo tanto una órbita cerrada para el sistema $\dot{x} = f(x)$	34
2.9.	La curva muestra la solución exacta $x(t)$ y los puntos abiertos sus valores $x(t_n)$ en los tiempos discretos $t_n = t_0 + n\Delta t$. Los puntos negros muestran los valores aproximados dados por el método de Euler. [82]	36

- 3.1. Bloque deslizante de masa M de un grado de libertad, acoplado con un resorte y un amortiguador a una placa móvil, estos representan al medio viscoelástico. La placa móvil y el bloque se mueven a velocidades v_0 y v , respectivamente. La velocidad relativa del bloque está dada por $\dot{u} = \dot{x} - v_0$. Las fuerzas de fricción actúan entre el bloque y la placa fija. 40
- 3.2. Fricción vs. velocidad. (a) Fricción de Coulomb y estática: superficie seca o lubricada en la frontera, (b) fricción viscosa (capa de fluido); y (c) fricción de Stribeck (parcialmente lubricada). 43
- 3.3. Efecto Stribeck. 44
- 3.4. Variación en el esfuerzo friccional τ en un experimento idealizado [33], en la cual la tasa de desplazamiento V cambia frecuentemente. La ley de fricción es descrita en un punto sobre la superficie, definido como una unidad de área de superficie sobre la frontera de un sólido. El esfuerzo friccional τ está determinado por el esfuerzo normal σ_n . El bloque superior se desplaza sobre el bloque inferior y las fuerzas de fricción actúan entre estas, y se oponen al desplazamiento. 45
- 3.5. Respuesta friccional vs. desplazamiento con la ley de fricción de Dieterich-Ruina [15]. cuando v_0 se incrementa instantáneamente Δv , el esfuerzo friccional, inicialmente en τ_0 , se incrementa hasta $\tau_0 + A$, seguido de una velocidad de desplazamiento constante en $v_0 + \Delta v$ donde el esfuerzo friccional decrece exponencialmente B hasta $\tau_0 - (B - A)$, L es la distancia característica requerida para renovar la población de contacto (desde la variable θ hasta un nuevo estado θ_0). 46
- 4.1. Locus of eigenvalores para diferentes valores de ξ y γ . La gráfica muestra la parte real de los valores propios como una función de los parámetros ε , ξ and γ . Para (a) y (b) fijando $\gamma=0.8,10$, respectivamente; (c) y (d) muestran los valores propios para valores fijos $\xi=0.8,1$, respectivamente. 60

4.2. Soluciones estacionarias del sistema (3.4.16). (a) $\Pi=(0.8,1,10)$, y se cumple la condición necesaria $\bar{\sigma}_c^*=1.2491$. Después de una región transitoria en la cual el bloque oscila, su velocidad permanece a tasa constante $\hat{v} = 1$ y se mueve junto con la placa móvil, su posición relativa \hat{u} es $\eta=0.0151$ y la medida de contacto con asperezas $\hat{\theta}$ es cero. El punto de equilibrio es local y asintóticamente estable. (b) El retrato de fase (\hat{u}, \hat{v}) muestra un espiral hacia adentro, y la convergencia a un punto $x^* = (0, \eta, 1)$. Soluciones periódicas del sistema se muestran en (c) donde $\Pi=(0.25,0.8,0.8)$, después de que el bloque pasa una región transitoria en la cual la amplitud de la señal varía, su velocidad oscila alrededor de $\hat{v} = 1$, su posición relativa u alrededor de $\eta=2.3593$ y la medida de contacto con asperezas $\hat{\theta}$ alrededor de cero; (c) el retrato de fase muestra la convergencia a una órbita periódica. El equilibrio es inestable aunque se cumple la condición $\bar{\sigma}_c^*=2.84$ 61

4.3. Bifurcación de Hopf para el sistema homogéneo. Proyección del espacio de fases sobre el plano (\hat{u}, \hat{v}) . (a), (b) y (c) tienen la posición del punto de equilibrio $\hat{u}^* = \eta$ cerca de cero para $\gamma =10$, ξ y el rango de \hat{u} decrecen; (d), (e) y (f), para $\gamma =0.8$ tienen \hat{u}^* y el rango de valores de \hat{u} más grande que el observado en (a)-(c). La dirección de las trayectorias en todos los casos es hacia el punto de equilibrio: espiral hacia adentro. 63

4.4. Regiones de estabilidad local y asintótica, como función de $\Pi = (\varepsilon, \xi, \gamma)$ para valores fijos de ξ . (a) $\xi=0.4$, (b) $\xi=0.8$, y (c) $\xi=1$. Se cumple la condición suficiente $\varepsilon < \varepsilon_{BH}$ 65

4.5. Proyección del espacio de estados sobre el plano (\hat{u}, \hat{v}) y series de tiempo del sistema perturbado (3.4.16). (a), (b) y (c) muestran las proyecciones en el plano (\hat{u}, \hat{v}) para $\omega=\{0.1,1.2,2\}$, respectivamente. (d), (e) y (f) despliegan sus respectivas series de tiempo para $\hat{u}(\hat{t})$ 69

4.6. Soluciones con amortiguamiento α_3 , variable. En (a)-(c) se muestran las proyecciones del espacio de fases para $\omega=0.1$. (a) $\alpha_3 =0.1$ sistema sub-amortiguado, (b) $\alpha_3 =0.2$ sistema amortiguado, and (c) $\alpha_3 =0.4$, sobre amortiguado. (d), (e), y (f) son sus respectivas series de tiempo. 70

4.7. Diagrama de bifurcación. γ versus máximos locales de la serie de tiempo $\hat{u}(t)$. $\Pi=(0.25,0.8,\gamma)$, $\mu = 3$, $\alpha_1=1.4, \alpha_2=0.2$, y $\alpha_3=0.1$, sistema sub-amortiguado. Para los valores de ω : (a) $\omega=0.1$, y (b) $\omega=1.2$, para el último valor existen dos valores aproximados de γ donde se observan bifurcaciones de una órbita de periodo uno a otra de periodo dos: $\gamma=0.66$ y $\gamma=0.765$ 71

4.8. Proyecciones características del espacio de fases sobre el plano (\hat{u}, \hat{v}) para el diagrama de bifurcación correspondiente a $\omega=0.1$. Valores aproximados de γ : (a) $\gamma=0.55$, (b) $\gamma=0.64$, (c) $\gamma=0.8$, y (d) ciclo límite para $\gamma=1.1$ 72

4.9.	Diagrama de bifurcación de las trayectorias. γ versus máximos locales de la serie de tiempo $\hat{u}(t)$. Con $\omega=1.2$, $\Pi=(1,0.8,\gamma)$, $\mu = 3$, $\alpha=(1.4,0.2,0.1)$, sistema sub-amortiguado. (a) Se observan tres tipos de comportamiento para valores aproximados de γ : Tipo I para $\gamma \in(0.6,1.55)$, tipo II para $\gamma \in(1.55,3.2)$, y tipo III para $\gamma \in(3.2, 5.5)$. En (b) se muestra el comportamiento tipo I.	73
4.10.	Proyecciones típicas del espacio de fases sobre el plano (\hat{u}, \hat{v}) del diagrama de bifurcación con $\omega=1.2$, $\varepsilon=1$ y $\xi=0.8$. Valores aproximados: (a) $\gamma=0.63$, (b) $\gamma=1.06$ y (c) $\gamma=1.14$, corresponden al comportamiento tipo I, (d) $\gamma=2.5$ tipo II; y (e) $\gamma=3.85$, y (f) $\gamma=4.61$, para el comportamiento tipo III.	74
4.11.	Diagrama de bifurcación de las trayectorias. Parámetro de bifurcación γ versus máximos locales de $\hat{u}(t)$, para el sistema homogéneo, i.e., $\tau(\hat{t}) = 0$. $\varepsilon=0.25$, $\xi=0.8$	75
4.12.	Figura 4.11 para el parámetro de bifurcación γ ; con $\tau(t) = 0$. $\varepsilon=0.25$, $\xi=0.8$	76
5.1.	dependencia de $A - B$ sobre la temperatura del granito [47, 101].	79
5.2.	Curva de mejor ajuste. Dependencia de $(A - B)$ sobre la temperatura del granito [101](datos aproximados tomados de Scholz [3]); se muestra la curva de mejor ajuste por el método de mínimos cuadrados no lineales, el ajuste da $R^2=0.82$	80
5.3.	Modelo sinóptico del comportamiento sísmico (modificado de [103]), para la Falla de Laguna Salada. La región de oscilaciones autosostenidas ROA, está delimitada por la condición necesaria para estabilidad (no suficiente) $\varepsilon < \xi\psi$ o equivalentemente el valor crítico complementado del sistema propuesto, esta región está entre los 10 y 11 kms de profundidad aproximadamente; dentro de la región inestable.	83
5.4.	Dos tipos de terremotos: pequeños (no acotados) y grandes (acotados) [105].	84
5.5.	Mapa de profundidades de sismos en la falla de Laguna Salada. Magenta ($2 < z < 3$ km), azul ($3,1 < z < 10$), amarillo ($10 < z < 15$ km), círculo rojo ($z > 15$ km); la estrella roja corresponde al evento del 4 de abril del 2010 (magnitud 7.2), con profundidad de 4 kms. Datos de la red sismológica del Noroeste de México (RESNOM [106]), del 01 de enero al 31 de diciembre del 2010, en total 3444 sismos.	86
5.6.	Distribución de la sismicidad [106] en FLS después del sismo del 4/04/2010 (Cucapáh-El Mayor) con magnitud $M=7.2$. En total 3444 datos del 01/01 al 31/12 2010. (a) Profundidad vs. tiempo, (b) Porcentaje de sismos vs. profundidad. Regiones estable, conditionalmente estable, e inestable; y (c) porcentaje de sismos vs. temperatura de nucleación.	87

6.1. Subsistemas y sistema conmutado Homogéneos, i. e., $\tau(\hat{t}) = 0$; $\Pi=(0.1,.8,10)$.
 (a) Retrato de fase de f_1 (verde), f_3 (gris) y f_2 (rojo). (b) *Zoom* de f_2 .
 (c) Proyección del espacio de fases sobre el plano (\hat{u}, \hat{v}) y (d) espacio de
 fases para el sistema conmutado, respectivamente. 91

6.2. Subsistemas y sistema conmutado Homogéneos, i. e., $\tau(t) = 0$; $\Pi=(0.8,.8,10)$
 y $\hat{v} > 0$. (a) Proyección del espacio de fases sobre el plano (\hat{u}, \hat{v}) f_1
 (verde), f_3 (amarillo) and f_2 (rojo). (b) *Zoom* de f_2 . (c) Proyección del
 espacio de fases del sistema conmutado; (d) Espacio de estados para el
 sistema conmutado. 93

6.3. ω vs máximos locales de las series de tiempo de (a) $\hat{u}(t)$ y (b) $\hat{v}(t)$.
 Existencia de ciclos límite y órbitas periódicas para valores de ω caso
 $\Pi=(0.25,.8,.8)$ 101

6.4. Sistema conmutado Forzado, $\omega=1.6$ y $\Pi=(0.25,.8,3)$. (a) y (b) Proyección
 y espacio de fases, respectivamente. (c) Series de tiempo para $x = (\hat{\theta}, \hat{u}, \hat{v})$. 102

6.5. Sistema conmutado Forzado, $\omega=3.5$ y $\Pi=(0.25,.8,3)$. (a) y (b) Proyección
 y espacio de fases, respectivamente. (c) Series de tiempo para $x = (\hat{\theta}, \hat{u}, \hat{v})$. 103

6.6. Sistema conmutado Forzado, $\omega=4.9$ y $\Pi=(0.25,.8,3)$. (a) y (b) Retrato y
 espacio de fases, respectivamente. (c) Series de tiempo para $x = (\hat{\theta}, \hat{u}, \hat{v})$. 104

Índice de tablas

4.1. Relación entre parámetros Π en el rango oscilatorio de las Figuras 4.1 (a) y (b). ε_{BH} : valor de la bifurcación de Hopf; $(\pm\lambda_{1,2})_{BH}$: eigenvalores en el eje imaginario; $\varepsilon_{D=0}$: límite superior del rango oscilatorio; SSO es el intervalo de oscilaciones autosostenidas, y $r'(\Pi_0)$ es la velocidad de cruce de los valores propios.	65
---	----

Capítulo 1

Introducción

1.1. Modelación de terremotos

El estudio de los terremotos es de gran interés social y científico debido a los daños que pueden causar en las poblaciones; a su comportamiento y a sus características complejas, los cuales son observados en la naturaleza [1–7].

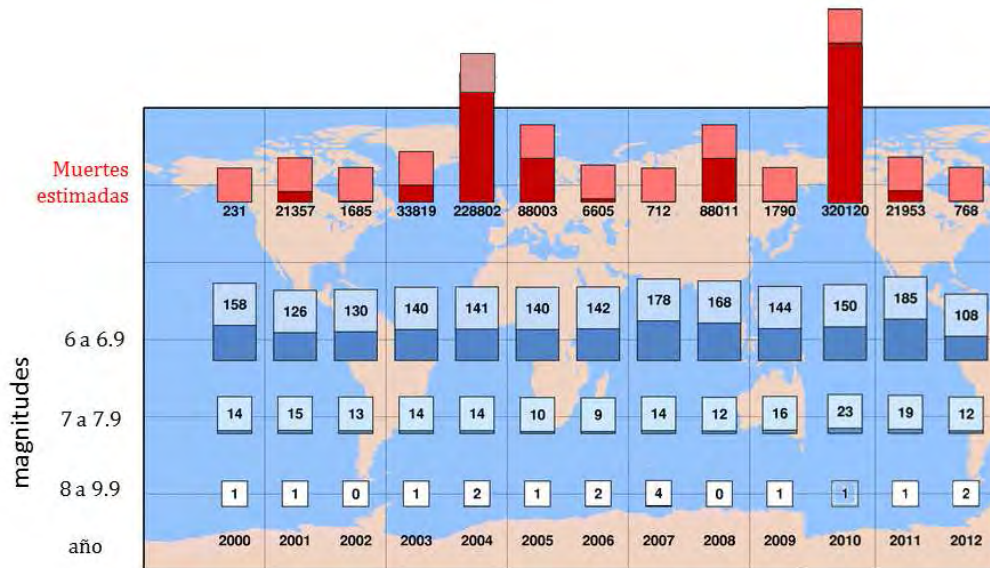


Figura 1.1: Número de terremotos por magnitudes, y número de muertes estimadas. Datos de NEIC (National Earthquakes Information Center) [8].

Cada año se registran en el mundo, en promedio [8], un terremoto de magnitud entre

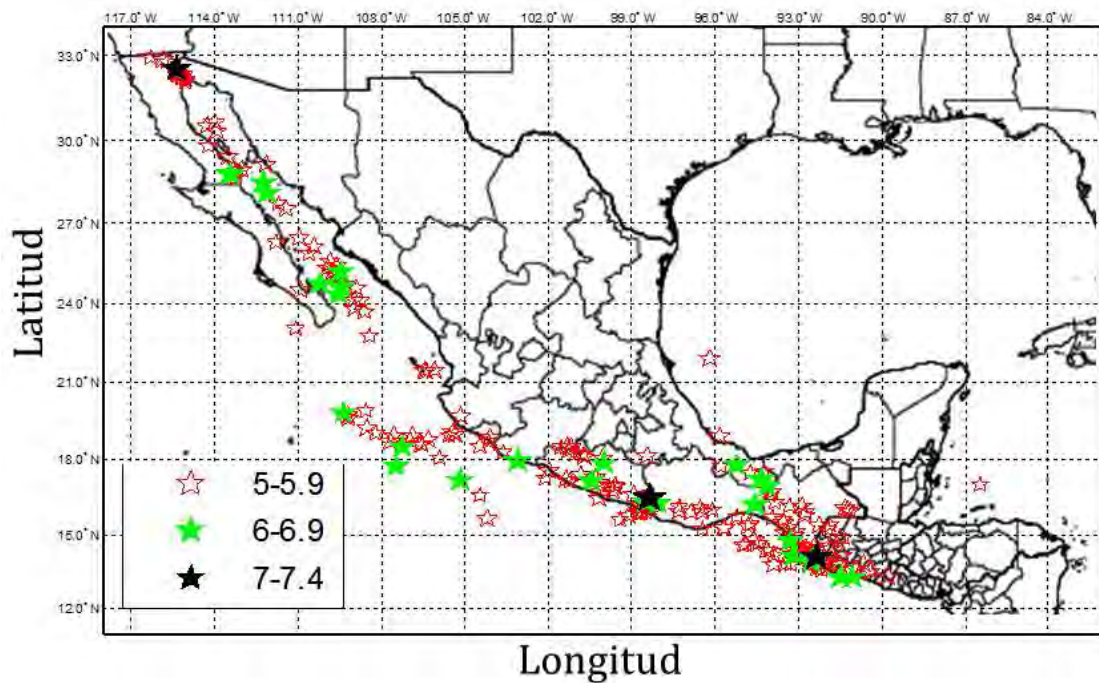


Figura 1.2: Sismicidad [10] en México 2006 al 2012. Sismos de magnitudes mayores o iguales a 5 en escala de Richter.

8.0 y 9.9 en escala de Richter, 15 sismos de magnitudes entre 7.0 y 7.9, y alrededor de 134 de magnitudes entre 6.0 y 6.9, dejando en muchos casos un gran número de muertes (Figura 1.1) y daños materiales [9] (Figura 1.3). México tiene dos regiones sismogénicas [10] por lo que también ha sido afectado en el pasado por grandes sismos, y registra con frecuencia sismos de magnitudes mayores de 5 en escala de Richter (Figura 1.2).

A pesar de que se han dedicado muchos recursos para el estudio de estos fenómenos naturales, todavía nuestro entendimiento sobre el mecanismo físico responsable de la iniciación, propagación y terminación de una ruptura sísmica no permanece claro. Dos de las vías que se se han tomado para entender la física y complejidad de los terremotos son, por un lado, el estudio de fricción de rocas en laboratorio, y por otro lado, la modelación matemática de la dinámica de la falla; se hacen grandes esfuerzos por establecer una conexión entre estas vías, sin embargo, aún no es muy claro cómo los descubrimientos en laboratorios pueden ser mejor aplicados en modelos de fallas sísmi-



Figura 1.3: Daños materiales causados por terremotos [9]. (a) México DF, 1985; (b) Tsunami de Japón 2011; (c) Sismo de Haití 2010, y (d) Sismo en Baja California (México), 2010.

cas.

La complejidad del mecanismo de terremotos surge de la gran cantidad de variables y procesos involucrados en el desplazamiento de las placas tectónicas [11]; su dinámica es considerada un proceso oscilatorio altamente no lineal [5, 12–17], sin embargo, la naturaleza de tal fenómeno sugiere que la fricción está relacionada con el comportamiento complejo no lineal. Típicamente, los terremotos ocurren entre los primeros diez kilómetros de profundidad en la corteza terrestre, llegan como una consecuencia de inestabilidades friccionales (cambios en la fricción) que causan esfuerzo, el cual es acumulado por movimientos a gran escala de las placas tectónicas, sobre periodos de cientos de años, por lo que frecuentes eventos de estancamiento-deslizamiento (*stick-*

slip) son generados mostrando recurrencia con desplazamientos irregulares durante eventos grandes y pronunciadas asperezas en la distribución del desplazamiento [3, 18].

Desde que Brace y Byerlee (1966) [19] propusieron como un posible mecanismo de terremotos el comportamiento estancamiento-deslizamiento, una gran cantidad de modelos bloque-resorte o bloques deslizantes se han propuesto como la más simple analogía para representar el mecanismo de terremotos sobre una falla o una colección de fallas [13, 17, 18, 20–28]. Estos modelos consisten de una cadena de bloques acoplados elásticamente, y moviéndose sobre una superficie áspera y rugosa; en ellos se introducen leyes de fricción, y obedecen las leyes del movimiento de Newton. Desde que Burridge

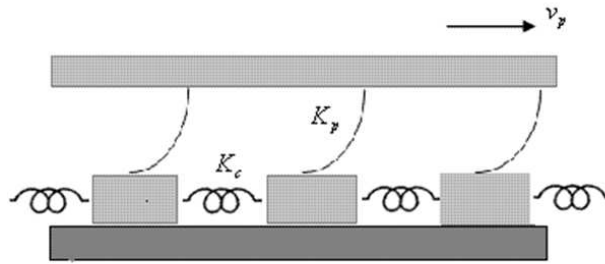


Figura 1.4: El modelo de Burridge and Knopoff [20] consiste de N bloques idénticos de masa M , moviéndose sobre una superficie rugosa, y acoplados a través de resortes duros de constante K_p , a una placa que se mueve a velocidad constante v_p , representando el otro lado de la falla, y K_c es el coeficiente del resorte entre los bloques.

y Knopoff (1967) [20] (Figure 1.4) presentaron el primer modelo, muchos otros han sido propuestos ; e.g., Carlson *et al.* (1994) [18] y Pelletier (2000) [27].

Una aproximación clásica de las leyes de fricción en la mayoría de tales modelos, consiste en agruparlas en un término con características estáticas. Recientemente, Dragoni y Santini (2010) [14], y, Amendola y Dragoni (2013) [12] introdujeron una ley de fricción estática o dinámica para los casos puramente elástico y viscoelástico, respectivamente.

Otro está relacionado con el esquema matemático, el cual está asociado a sistemas dinámicos con condiciones de frontera o iniciales estocásticas.

La naturaleza de las inestabilidades friccionales y de las condiciones bajo las cuales ellas ocurren [29, 30] han sido determinadas en trabajo experimental. Aproximaciones experimentales clásicas han permitido modelar los términos de fricción sin propiedades dinámicas, otras aproximaciones modelan la fricción como un fenómeno dinámico [31–34], de hecho, algunas leyes de fricción son obtenidas directamente de experimentos en mecánica de rocas en laboratorio, las cuales explican inestabilidades en fallas, asociadas a la fricción con características dinámicas [29, 35, 36].

En cuanto a los sistemas dinámicos con condiciones de frontera o iniciales estocásticas; Brown *et al.* (1991) [37] y Nakanishi (1991) [38] usaron una aproximación basada en autómatas celulares con dinámica determinística e incluyeron aleatoriedad en la posición inicial del bloque. Otsuka (1992) [39] asignó valores a las constantes de los resortes y a parámetros friccionales con fluctuaciones estocásticas. Bak y Tang (1989) [1] presentaron un modelo de autómatas celulares basado en dinámica estocástica, Barriere y Turcotte (1991) [40], e Ito y Matsizaki (1990) [41] introdujeron aleatoriedad incrementando el esfuerzo aleatoriamente en el tiempo hasta que algún umbral o cota uniforme era alcanzado, en esos modelos un sitio se escoge aleatoriamente durante cada paso de tiempo y se agrega una unidad de esfuerzo. Cuando un sitio tiene cuatro unidades de esfuerzo acumulado, el sitio se convierte inestable y redistribuye esfuerzo a sus vecinos más cercanos [27].

En contraste con los modelos previos que tienen características estocásticas, y/o que presentan la heterogeneidad estructural sobre la superficie de la falla pero no permiten al modelo que la heterogeneidad sea caracterizada por un parámetro que pueda variarse para estudiar la dependencia del modelo sobre tal característica, nuestra propuesta es el análisis de un sistema dinámico no lineal completamente determinístico [15] complementado con la presencia de fluidos.

Introducimos presencia de fluidos, deformación, asperezas, en la matriz de roca en el entorno de la superficie de la falla, de manera que nos permita estudiar (i) la dependencia del modelo sobre propiedades de las rocas y parámetros sísmicos; y (ii) la presencia de fluidos entre las superficies en contacto, y el esfuerzo friccional (tangencial).

Con respecto al modelo, nuestra principal contribución es la propuesta de complementación y análisis del modelo dinámico [15] que introduce términos asociados al fenómeno

descrito por Dieterich-Ruina [29, 30, 42] y Stribeck [43, 44]; tal análisis involucra que el campo vectorial representando al sistema es híbrido.

El modelo toma en cuenta tres aspectos (i) La evolución del esfuerzo friccional dependiente del grado de contacto con asperezas como una consecuencia de la capa de fluido entre las superficies, (ii) una variable de estado (i.e., la medida de renovación de contacto con asperezas, dada en la ley de fricción de Dieterich-Ruina), y (iii) conmutación (*switching*) en el sistema. Más aún, el sistema complementado considera la presencia de una fuerza externa atribuible a vibraciones de fallas vecinas, la cual perturba al sistema. En acuerdo con Pelletier [27], consideramos que estas características hacen más realista la descripción del movimiento relativo entre bloques tectónicos.

1.2. Planteamiento del problema

La mayoría de los estudios en física de terremotos se han enfocado en la estabilidad e inestabilidad del mecanismo de terremotos, los cuales involucran el análisis del comportamiento alrededor de un valor crítico de nucleación. Este valor divide una región friccionalmente inestable (donde se generan los sismos) de la región estable; además del estudio del comportamiento oscilatorio en la región de la transición estable-inestable que ha sido también de gran interés para la comprensión del mecanismo. Algunas de estas investigaciones [15, 17, 45–47] se han hecho a partir de modelos de bloques deslizantes con un grado de libertad, que previamente han sido aplicados como modelos simples que describen la dinámica del comportamiento de una falla durante el terremoto. Específicamente, los modelos con un bloque y acoplados con la ley de fricción de Dieterich-Ruina (ley de fricción empírica formulada a partir de experimentos en laboratorio con mecánica de rocas [33, 48]), han sido utilizados para investigar los detalles del comportamiento y estabilidad en el sistema concerniente a cada uno de ellos [15, 17, 45, 46].

En estas investigaciones se encontró un comportamiento oscilatorio sinusoidal característico del entorno del valor crítico, que además se presenta como cambiante cuando se varía algún parámetro relacionado con ese valor. Sin embargo, estas investigaciones no fueron concluyentes respecto a las causas que producen este comportamiento ni

establecen límites en términos de parámetros sísmicos y/o friccionales.

Por otro lado, Scholz (1998) [47] da una explicación física dentro del contexto de nucleación de terremotos acerca de lo que pasa en la región cercana al valor crítico, enfocándose en tal comportamiento dentro de la región estable. Determinó que en la frontera de la transición estable/inestable existe una región en la cual ocurre movimiento oscilatorio autosostenido. Estas oscilaciones están dentro de la región condicionalmente estable, la cual es la región donde se pueden propagar los sismos grandes (rompen la superficie). En la región de oscilaciones autosostenidas se genera una especie de sismos lentos (movimientos asísmicos), que son raros en fallas de la corteza terrestre, como el caso de una región que forma parte del sistema de fallas de San Andrés, en California [3]. Aún queda por descubrir los mecanismos físicos que los producen, entre los que se cree que puede estar la entrada y difusión de algún tipo de líquido en las fallas.

Los desplazamientos lentos forman parte del espectro del comportamiento de una falla entre el *creep* (zona de bajo arrastre) estable y terremotos destructivos [49, 50]; estos desplazamientos ocurren cerca de las fronteras de zonas de ruptura de grandes terremotos [51, 52], y algunas veces los desencadenan más rápido [50]. Ocurren a muy bajas frecuencias [49] y producen registros similares a aquellos que son de terremotos normales excepto que la escala de tiempo para el proceso de ruptura es considerablemente largo. Los sismos lentos proveen un mecanismo para la redistribución de esfuerzo antes de un terremoto normal. La concentración de esfuerzo puede tomar lugar sólo horas o días antes de un terremoto; si es así, esto podría afectar la capacidad de predicción [53–55], de aquí la importancia del estudio y comprensión del comportamiento oscilatorio en la región de oscilaciones autosostenidas en función de parámetros sísmicos, que es el punto central de estudio en este trabajo. En la literatura no se ha reportado este comportamiento analíticamente ni se han determinado límites para esta región en términos de parámetros sísmicos. Este análisis y descripción se hace a partir del análisis del sistema dinámico en cuestión.

El comportamiento oscilatorio en la vecindad de un valor crítico aún no es claro y es importante conocer algunos aspectos de este como consecuencia de efectos de fricción y de fluidos.

1.2.1. Preguntas de investigación

Algunas preguntas de investigación son las siguientes:

1. El sistema dinámico complementado ¿exhibe estas oscilaciones autosostenidas dentro de la región friccionalmente inestable?
2. ¿Es posible delimitar la región de oscilaciones autosostenidas con relaciones matemáticas y numéricas en función de parámetros sísmicos?, si es así, ¿Cuál es la relación de este comportamiento con las propiedades del medio?
3. Dado que el sistema es naturalmente disipativo, ¿cómo se relacionan los parámetros sísmicos del modelo con la disipatividad del sistema?
4. ¿Cuál es el efecto de fuerzas externas en la dinámica del sistema?
5. ¿Cómo influye la presencia de fluidos, así como coeficientes friccionales de sistemas mecánicos en la dinámica del sistema?
6. ¿Cómo se relacionan la temperatura, presión y profundidad con la dinámica del terremoto en función de valores críticos de nucleación?
7. ¿Cuáles son las principales diferencias en la dinámica del sistema homogéneo y del forzado, para los casos continuo y conmutado?

Partimos de la hipótesis de que la región de oscilaciones autosostenidas está en la vecindad del valor crítico o punto de bifurcación tanto en la zona estable como en la inestable; y que es posible determinar un esquema matemático y numérico en función de parámetros sísmicos y propiedades friccionales derivado de la propuesta del sistema dinámico complementado (detalles en Capítulo 3), en presencia o en ausencia de fuerzas periódicas externas.

Suponemos también que el sistema conmutado presenta comportamiento más complejo que el sistema homogéneo (en ausencia de fuerzas externas) pero que comparten algunos aspectos relacionados con el comportamiento oscilatorio.

1.2.2. Delimitación del problema

El problema se plantea como un problema de análisis; el cual queda limitado al comportamiento de sismos en la corteza terrestre continental, a escala de falla, en fallas preexistentes y dentro del contexto del campo de estudio de la Física de terremotos, basados en estudios dentro del campo teórico y numérico, así como de conclusiones hechas a partir de datos experimentales en mecánica de rocas.

Consideramos también, el medio homogéneo (las propiedades de la corteza son las mismas a lo largo del desplazamiento), e isótropo bajo el supuesto de que la corteza terrestre es una gran capa que está conformada mayormente por rocas de granito; y basados en los resultados experimentales de Byerlee [31] que muestran que a altas presiones y temperaturas el mecanismo de terremotos es independiente del tipo de roca.

Aunque consideramos importante la cinemática de la fuente sísmica, en este trabajo nos enfocamos en la dinámica del mecanismo específicamente lo concerniente al desplazamiento y la fricción. Analizamos el desplazamiento correspondiente a la disipación del esfuerzo. Interpretaciones de algunos de los resultados se ponen en el contexto de datos de la falla de Laguna Salada, en Baja California.

Fundamentamos el análisis del sistema dinámico en la teoría de sistemas dinámicos y estabilidad de Lyapunov.

1.3. Objetivos de la Tesis

Para responder las preguntas de investigación nos planteamos algunos objetivos, que se describen a continuación.

1.3.1. Objetivo general

Analizar el comportamiento oscilatorio de un sistema dinámico a partir de un modelo conceptual de terremotos en fallas tectónicas de la corteza terrestre continental, que incluya propiedades reológicas de la falla y las leyes de fricción empíricas de Dieterich-Ruina y del efecto Stribeck, para comprender y describir el comportamiento sísmico

oscilatorio en el entorno del valor crítico de nucleación en función de parámetros relacionados con propiedades de las rocas a profundidades de nucleación de sismos.

1.3.2. Objetivos particulares y específicos

1. Complementar un sistema dinámico de terremotos con la ley de fricción del efecto Stribeck; y presentarlo como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) a partir de un modelo conceptual con un bloque deslizante de un grado de libertad.
 - Identificar y explicar los parámetros sísmicos de interés que surjan en el modelo.
2. Analizar el comportamiento oscilatorio del sistema para un caso continuo, a través del análisis de estabilidad por el método indirecto de Lyapunov, del análisis de sus valores propios, y análisis de bifurcación.
 - Describir el comportamiento del sistema en función de sus valores propios y de los parámetros del modelo.
 - Determinar un valor crítico de nucleación.
 - Establecer la equivalencia de estabilidad en el sentido de Lyapunov con estabilidad friccional en sismos.
 - Analizar computacionalmente el comportamiento del sistema bajo la acción de una fuerza externa, determinística, y periódica, en función de las condiciones necesarias para estabilidad, y variando la frecuencia angular.
 - Determinar condiciones, en términos de parámetros sísmicos, bajo las cuales el sistema es disipativo.
3. Mostrar matemática y/o numéricamente la presencia y los límites de la región oscilatoria autosostenida, en presencia y en ausencia de fuerzas periódicas externas.
4. Analizar y describir el comportamiento oscilatorio del sistema para un caso conmutado en términos de parámetros sísmicos; numéricamente a través de diagramas de bifurcación, para los casos homogéneo y forzado.
 - Explicar el sistema físicamente en contexto de sismología.
 - Caracterizar matemáticamente el sistema conmutado.
 - Describir el comportamiento oscilatorio

5. Describir y explicar el comportamiento sísmico a profundidad y temperatura , a partir de resultados experimentales y teóricos sobre mecanismos de deformación en rocas de zona de fallas, y de los resultados obtenidos con el modelo propuesto.

1.4. Estructura de la tesis

La tesis está estructurada de la siguiente manera. En el Capítulo 2 se presentan preliminares tanto del área de Ciencias de la Tierra (marco geológico-sismológico) como del área de Matemáticas (en el marco de sistemas dinámicos). Dentro del marco geológico-sismológico abordamos propiedades de la corteza terrestre continental, explicamos cómo se originan los sismos, hacemos una clasificación y explicación de los principales tipos de fallas; así también damos un contexto general de lo que aborda la Física de terremotos y de las leyes constitutivas (leyes de fricción) que se han utilizado en la modelación de terremotos.

Por otro lado, dentro del marco matemático, explicamos lo que es un sistema determinístico y un sistema dinámico no lineal en términos conceptuales y matemáticos, definición de estabilidad en sentido de Lyapunov, también damos una introducción a la teoría de bifurcaciones, específicamente de la bifurcación de Hopf y el plano de Poincaré; finalmente, damos un marco general de las soluciones numéricas del sistema dinámico y particularmente del método que será utilizado en este trabajo: método de Runge-Kutta de cuarto orden.

En general, en este Capítulo se abordan conceptos importantes para la comprensión y análisis del sistema propuesto así como para interpretaciones en términos de la Física del terremoto.

El Capítulo 3 comprende una explicación del sistema dinámico complementado a partir del modelo conceptual y de las variables y parámetros que se incluyen en el sistema. Hacemos énfasis en las leyes de fricción que se introducen en el modelo: Dieterich-Ruina y efecto Stribeck. Se presenta el modelo matemático a partir de la ecuación de movimiento de Newton, como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias; se plantea como un sistema de tercer orden en forma adimensional.

En el Capítulo 4 se analiza el sistema para un caso continuo, donde se considera la presencia de una fuerza externa, determinística y periódica que perturba al sistema, así como el caso donde esta fuerza perturbadora está ausente. Se aborda la estabilidad del sistema en sentido de Lyapunov con el método indirecto (linealización) y se explora el comportamiento oscilatorio en la vecindad de un valor crítico de nucleación de sismos, a través del análisis de los valores propios del Jacobiano de la transformación. Por medio de diagramas de bifurcación de las trayectorias, se describe el comportamiento oscilatorio en la cercanía del valor crítico. En este Capítulo se establece la relación entre la estabilidad en el sentido de Lyapunov y la estabilidad friccional en terremotos, en sentido de Scholz, y condiciones para la disipatividad del sistema.

En el Capítulo 5 se establecen relaciones entre los principales resultados obtenidos en el análisis del sistema con la teoría de estabilidad de Lyapunov y en general de sistemas dinámicos, con propiedades de la corteza en zonas de fallas. Además se hace una interpretación del comportamiento sísmico en función de la geología, tasas friccionales, profundidades de nucleación, temperatura y presión, y específicamente en la falla de Laguna Salada en Baja California.

En el Capítulo 6, se presenta el análisis del caso conmutado (*switching*) donde se explora su estabilidad en sentido de Lyapunov así como el comportamiento oscilatorio bajo la acción de una fuerza externa que perturba al sistema. Se da una interpretación Física en el contexto de terremotos.

Finalmente, en el Capítulo 7 se presentan las conclusiones de la tesis y una breve discusión sobre la validación de modelos con sistema masa-resorte en física de terremotos, así como una propuesta para la validación del modelo analizado en este trabajo.

Al final del manuscrito se anexa la producción científica derivada de la tesis. En el artículo titulado *Oscillatory Behavior of Nonlinear Dynamical model of earthquakes through Hopf Bifurcation* se resumen los principales resultados ob-

tenidos en los Capítulos 3 y 4; mientras que en el artículo *Estructura-Evolución de un Modelo de Sistema Dinámico de Terremotos: Análisis de Correlaciones Ocultas de Largo Alcance* se presenta una propuesta para la validación del modelo, resumido en el Capítulo 7.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Marco geológico y sismológico

2.1.1. La estructura de la Tierra

La tierra está estructurada [56] en capas más o menos concéntricas, debido a que sus características son variables a medida que se profundiza en su interior, no habiendo apenas variaciones laterales, salvo en la corteza.

Se puede determinar cómo está estructurada mediante el estudio de las ondas sísmicas, ya a que la velocidad de propagación de dichas ondas en el interior de la tierra varía en relación con la composición de los materiales por donde se propagan y de su estado físico.

Los cambios en la velocidad de propagación se llaman discontinuidades y son fundamentalmente las siguientes:

- Discontinuidad de Mohorovicic (Moho). Separa la corteza del manto.
- Discontinuidad de Gutenberg. Separa el manto del núcleo.
- Discontinuidad de Lehman. Permite diferenciar el núcleo externo (fundido) del núcleo interno, que es sólido.

Se han propuesto dos modelos para describir la estructura de la tierra: modelo estático o geoquímico y modelo dinámico; estos se explican en las siguientes secciones [56].

Modelo estático o geoquímico

Está basado en la variación de la composición química de los materiales de la tierra a distintas profundidades. De acuerdo con este criterio se han establecido las siguientes capas (Figura 2.1):

1. Corteza: Es la capa más externa y delgada. Se extiende desde la superficie de la tierra hasta la discontinuidad de Mohorovicic y puede ser continental, con un espesor de hasta 70 kilómetros u oceánica, más delgada, alcanzando como máximo los 10 kilómetros.
2. Manto: Es la capa comprendida entre la discontinuidad de Mohorovicic y la de Gutenberg. Llega hasta una profundidad de 2900 kilómetros y alberga el 83 por ciento del volumen total de la tierra. Se diferencia en dos subcapas en función de la densidad que tienen: el manto superior, con una densidad de 3.3 g/cm^3 y el inferior de 5.5 g/cm^3 . La densidad mayor del manto inferior es debida a que este último soporta una mayor presión, ya que los dos están constituidos por peridotita.
3. Núcleo: Abarca desde la discontinuidad de Gutenberg hasta el centro de la tierra. Tiene una densidad muy alta: de 10 a 13 g/cm^3 y está compuesto por hierro y níquel.

Composición geoquímica de la corteza terrestre

La corteza es la capa de menor volumen y la más superficial, siendo la más importante para nosotros puesto que en ella se manifiestan todos los fenómenos geológicos. La corteza presenta en la vertical tres capas (Figura 2.1):

- Capa sedimentaria, formada por materiales sedimentarios más o menos transformados y con espesores variables que pueden llegar a los 3,000 m.
- Capa granítica, formada por materiales cuya composición es fundamentalmente de silicatos de aluminio, por lo que también se le llama sial. Las rocas predominantes son las de la familia de los granitos, así como rocas metamórficas.

- Capa basáltica. La composición de los materiales de esta capa es fundamentalmente de silicatos de magnesio, por lo que también se le llama sima. Las rocas predominantes son basaltos, gabros y dioritas.

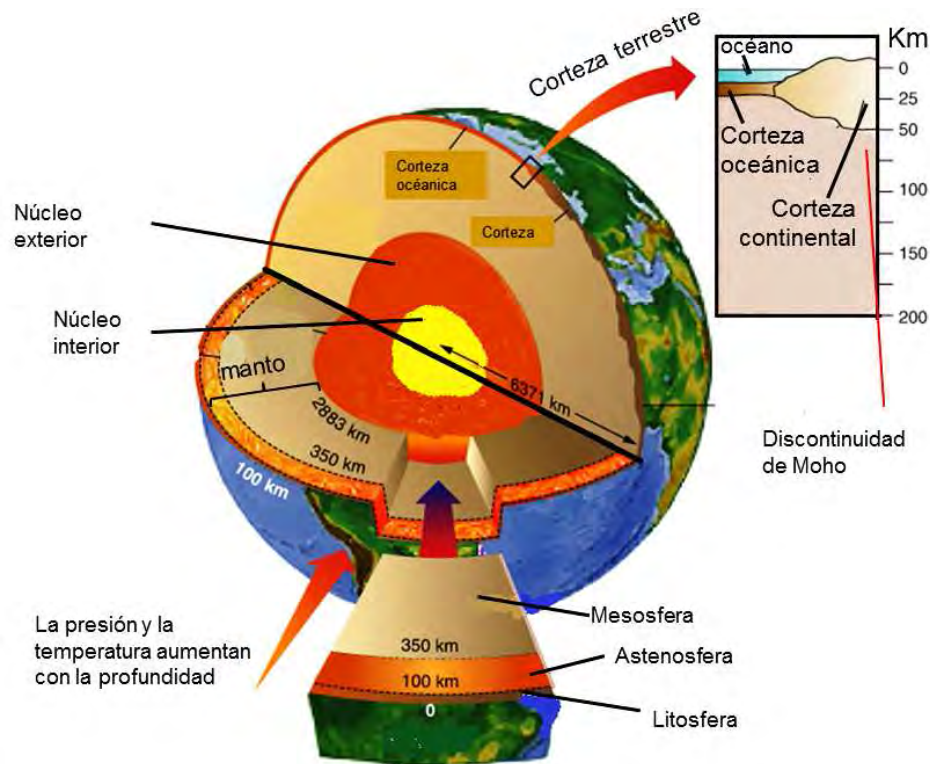


Figura 2.1: Estructura de la Tierra.

En la corteza terrestre se encuentran, prácticamente, todos los elementos de la tabla periódica aunque en muy diferente porcentaje. Existen una serie de elementos que abundan más del 1 por ciento y que se denominan elementos geoquímicos. Estos elementos son oxígeno, silicio, aluminio, hierro, calcio, sodio, potasio y magnesio; de ellos, el más abundante es el oxígeno, que llega casi al 50 por ciento. Estos elementos no se encuentran aislados sino que se combinan entre sí. Como el más abundante es el oxígeno y además tiene mayor afinidad química, los compuestos que más fácilmente se formarán serán óxidos de los distintos elementos, preferentemente de silicio. Estos óxidos podrán combinarse formando compuestos más complejos que son los minerales. Si los más abundantes son los que contienen silicio, los más abundantes serán los silicatos.

Siempre que exista sílice se formarán silicatos; cuando no esté presente se formarán los demás compuestos (Figura 2.2).

Los minerales se agrupan de modo natural originando las rocas que son las unidades estructurales de la corteza. Las rocas son agregados naturales de dos o más minerales, sustancias homogéneas que tienen una composición química definida, es decir, pueden representarse mediante una fórmula química. Los minerales están formados por elementos químicos, pero algunos se componen sólo por un elemento químico; por ejemplo, el cobre, el azufre y el carbono.

El granito es la roca representativa de la corteza terrestre. El granito está formado fundamentalmente por minerales como cuarzo, plagioclasa, feldespato alcalino (ortosa) y biotita (Figura 2.2).

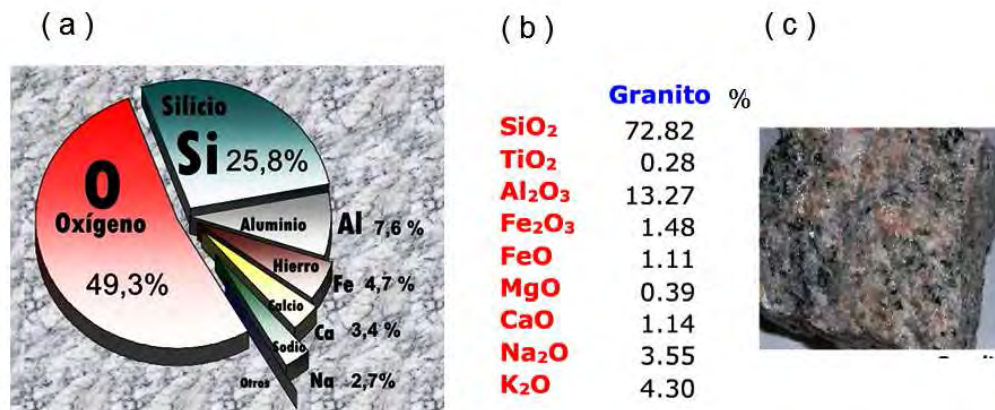


Figura 2.2: (a) Composición química de la corteza. (b) El granito es la roca más representativa de la corteza terrestre; está formado fundamentalmente por minerales como cuarzo, plagioclasa, feldespato alcalino (ortosa) y biotita. (c) Roca de granito.

Modelo dinámico

Además, del modelo estructural o modelo estático, podemos considerar la existencia de un modelo dinámico [56]. Este se basa en las propiedades físicas de los materiales que constituyen el interior de la tierra, tales como el comportamiento mecánico y el estado físico. Según este modelo se diferencian las siguientes capas (Ver Figura 2.1):

1. Litosfera: Es la capa más externa, es rígida y fría, y corresponde, en el modelo geoquímico, con la corteza y parte del manto superior. Es más gruesa la continental (de 100 a 300 kilómetros) que la oceánica (de 50 a 100 kilómetros).
2. Astenosfera: Es una capa plástica, débil y caliente, corresponde con parte del manto. Aunque la roca que la constituye es sólida, existen ciertas corrientes de convección muy lentas, de 1 a 12 cm por año que determinan la unión y división de los continentes y la formación de cordilleras.
3. Mesosfera: Corresponde al resto del manto hasta el núcleo. Los materiales de la mesosfera están sometidos a corrientes de convección debido a la diferencia de temperaturas. En la parte más profunda se encuentra la capa formada por los materiales de mayor densidad del manto que se han sedimentado.
4. Endosfera: Comprende el núcleo exterior e interior. (a) Núcleo externo: se encuentra debajo del manto y llega hasta los 5,150 kilómetros de profundidad. Es líquido, agitado por corrientes de convección. Núcleo interno: Es la parte más profunda del planeta. Está formado por hierro sólido, ya que al liberar el núcleo el calor a través del manto, el hierro cristaliza y se acumula en el fondo, por lo que aumenta de tamaño a razón de unas décimas de milímetro al año.

2.1.2. Génesis de terremotos

Un sismo o terremoto es un movimiento de la tierra originado por el movimiento relativo de las placas tectónicas, este movimiento relativo es causado por las celdas o corrientes de convección que se generan en el manto (plástico y caliente) por la diferencia de presiones y temperaturas. Estas corrientes de convección afectan a la litosfera que es rígida y fría, y entonces se genera el desplazamiento relativo de las placas tectónicas afectando a la superficie de la corteza terrestre originando fallas.

Los epicentros de los temblores que ocurren a nivel mundial no se distribuyen aleatoriamente sobre la superficie de la Tierra, como puede observarse en la Figura 2.3, sino que existe definitivamente un orden bien definido en la actividad sísmica global. Esta sismicidad se concentra en bandas o zonas estrechas, continuas y sinuosas, las cuales

definen las fronteras de alrededor de las veinte o más placas que constituyen la parte más superficial de la Tierra (Figura 2.4).

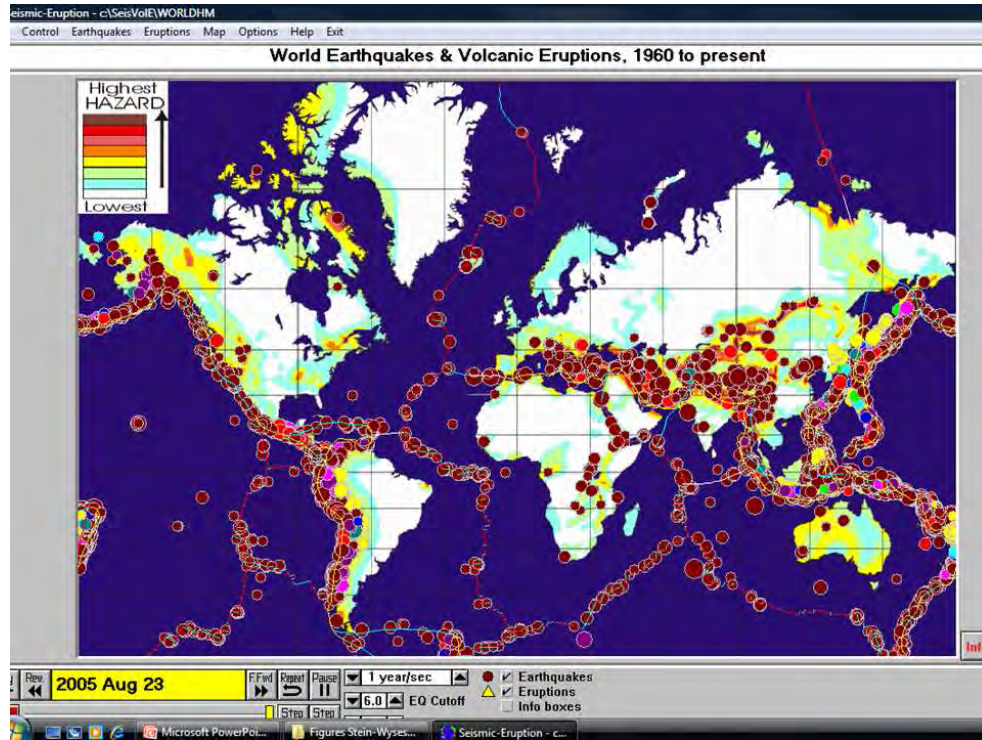


Figura 2.3: Sismicidad mundial [8] 2005. Los círculos cafés indican eventos sísmicos.

La configuración geométrica de esta estructura de mosaicos no es simétrica ni simple, y se caracteriza por un continuo movimiento relativo de sus elementos. Estas placas colisionan en algunas zonas y se separan en otras, desplazándose con velocidad de movimiento relativo entre ellas de entre menos de 1 cm y unos 10 cm por año. Aún cuando estas velocidades parecen bajas, es posible que las placas se desplacen unos 75 km en sólo un millón de años, un intervalo corto geológicamente. Donde dos o más placas interactúan se generan importantes procesos geológicos. A medida que estas se mueven, se acumula tensión. Con el tiempo, las fallas existentes a lo largo de los bordes de las placas o cerca de ellos se desplazan abruptamente y se producen terremotos. A partir de ahí se inicia nuevamente el ciclo de recarga de tensión que da lugar a sismos futuros. Debido a esta interacción global entre placas existe una actividad sísmica continua en nuestro planeta.

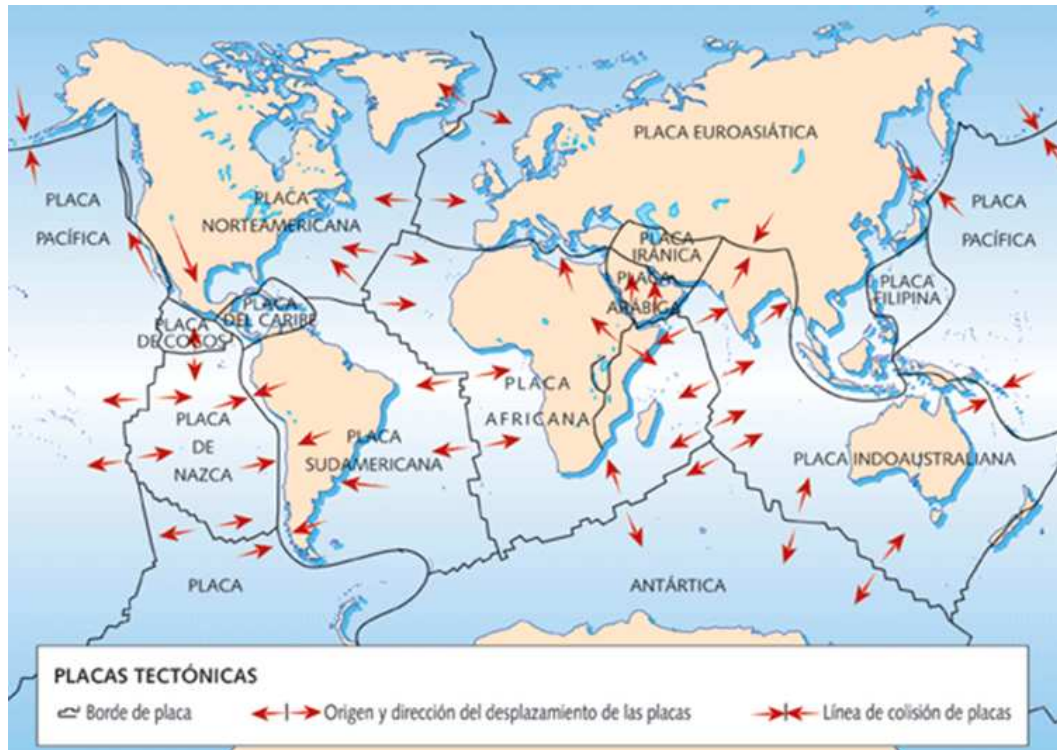


Figura 2.4: Placas tectónicas.

Tipos de Fallas geológicas

Las fallas geológicas son superficies en la corteza terrestre, sobre las que tiene lugar el desplazamiento relativo entre bloques. Las fallas tectónicas pueden ser básicamente de tres tipos: a) Inversas: un bloque está fijo y el otro se desplaza hacia arriba, b) Normales: uno de los bloques se desliza hacia abajo en relación a uno fijo; y c) Transcurrentes (desplazamiento horizontal), las cuales son esquematizadas y mostradas con fotografías en la Figura 2.5.

Nos enfocaremos en el estudio de la dinámica de fallas transcurrentes, como las que se encuentran en el Sistema de Fallas de San Andrés, en California, USA.

2.1.3. Física de terremotos

En el contexto de la Física de terremotos, estos ocurren debido a una inestabilidad en la deformación de las rocas en la corteza terrestre. Una ilustración esquemática de una

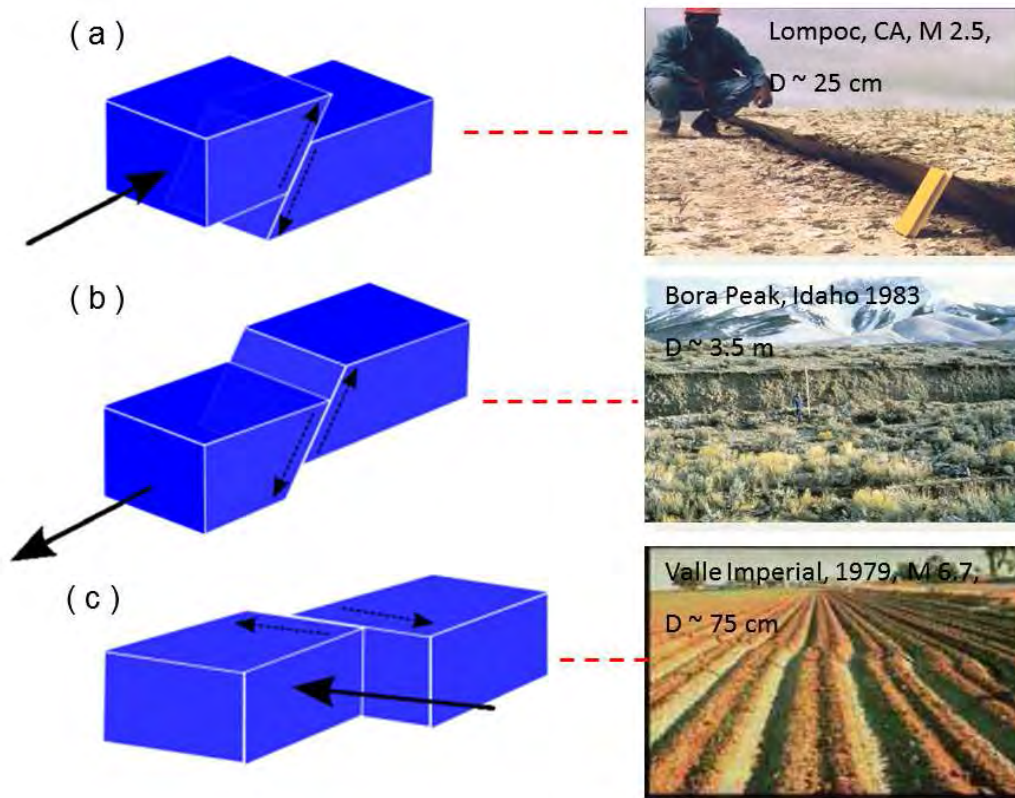


Figura 2.5: Tipos de fallas geológicas [57]. (a) Falla Inversa, (b) Falla Normal, y (c) falla transcurrente.

falla se muestra en la Figura 2.6 (a), los dos lados de la falla se mueven lateralmente, en direcciones opuestas, característica de las fallas transformantes o transcurrentes.

Debido a grandes temperaturas y presiones, las rocas en lo profundo de la tierra fluyen a tasas del orden de cm/año, como un fluido altamente viscoso, impulsando el movimiento de las placas tectónicas que se encuentran en la corteza terrestre. A profundidades de entre 0-15 km (Figura 2.6 (a)), conocida como zona sismogénica, las rocas resisten el movimiento de las placas, y se mantienen bloqueadas hasta que la fuerza se vuelve lo suficientemente grande para que el material falle, y la falla se desliza rápidamente en un orden de metros/segundos durante un terremoto. Las fallas son más complejas que simples superficies planas donde las rocas se deslizan unas sobre otras. La interfase de la falla se llena con pedazos molidos de roca, llamado *gouge*, y la interacción básica

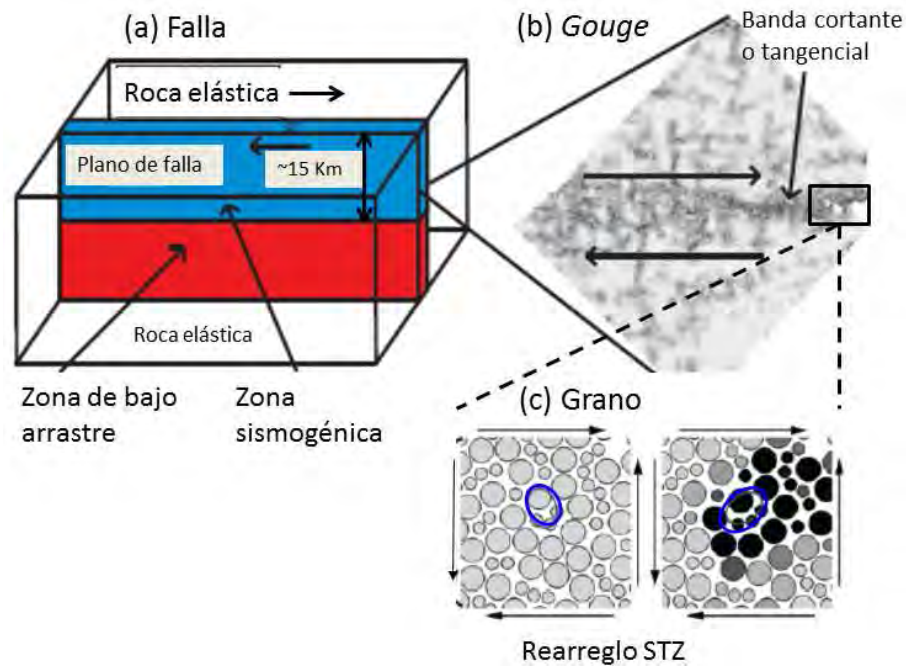


Figura 2.6: Escalas para el estudio de terremotos (esquema de Daub y Carlson [42]).

de contacto entre las partículas dicta cómo se deforma el *gouge* en respuesta a los grandes esfuerzos tectónicos. La deformación del *gouge* (Figure 2.6 (c)) determina las propiedades friccionales de la interfase (Figure 2.6 (b)), la cual controla la propagación de ruptura a lo largo de la falla (Figure 2.6 (a)).

Debido a que los terremotos ocurren en lo profundo de la corteza, las propiedades físicas y dinámicas de las fallas, como el esfuerzo, deformación, fricción, geometría, velocidad de desplazamiento y velocidades de propagación de la ruptura, no pueden ser observadas directamente [2, 28, 30, 42].

Los científicos confían en una variedad métodos complementarios, incluidas las observaciones geológicas, sísmicas y geodésicas, experimentos con fallas a escala de laboratorio y los estudios teóricos y numéricos derivados de modelación y simulación. Juntos, estos métodos proporcionan una base para el análisis de los terremotos individuales después de que se producen, así como el modelado para predicción (a menudo en entornos simplificados) para identificar relaciones de causa y efecto, y relaciones entre la fricción, propiedades de los materiales, y la dinámica resultante, que puede ayudar a limitar las

estimaciones de la amplia gama del comportamiento que puede ocurrir en un futuro. En este último enfoque se define el campo interdisciplinario de la física del terremoto, que tiene como objetivo conectar la geofísica, la ciencia de los materiales, estudios de laboratorio y observaciones sísmicas para reducir las incertidumbres en peligrosidad sísmica (por ejemplo, la magnitud del sismo, la frecuencia, el movimiento del suelo, y la atenuación) basado en la comprensión de la física de la fuente.

En esta tesis, nos centramos principalmente en resultados teóricos y numéricos de la dinámica de un terremoto a escala de fallas. Los resultados de la modelización capturan fenómenos que son observados en el laboratorio y en la tierra; por ejemplo, el comportamiento oscilatorio, el desplazamiento en función de parámetros sísmicos, entre otros (y hablamos de cómo las simulaciones numéricas con los parámetros de fricción físicos se refieren a los resultados importantes de sísmica y observaciones de laboratorio de terremotos y de fallas).

2.1.4. Leyes constitutivas de fricción

La modelación de la dinámica de terremotos a múltiples escalas requiere nuevas herramientas que incorporen la física esencial en cada escala. A escala de falla esto incluye la respuesta elástica de las rocas y las propiedades de variación en la estructura de la velocidad. Uno de los desafíos es tomar en cuenta los procesos físicos en una escala pequeña y que se mantenga a la vez la resolución a la escala de falla. Tradicionalmente esto se consigue con una ley de fricción. Estas relaciones conocidas como leyes constitutivas, frecuentemente son motivadas por experimentos en laboratorio y determinan el esfuerzo friccional sobre la falla. El esfuerzo friccional, τ , dividido por el esfuerzo normal, σ , define el coeficiente de fricción de la falla [31, 58]:

$$\mu = \frac{\tau}{\sigma}. \quad (2.1.1)$$

Usualmente el esfuerzo friccional se representa en función de cantidades tales como el desplazamiento, la tasa de desplazamiento u otras variables dinámicas que cuantifican el estado interno [42, 59], y que se han observado en experimentos. Los terremotos ocurren en condiciones físicas extremas, incluyendo altas presiones y temperaturas, generando grandes cantidades de desplazamiento a altas tasas de desplazamiento. Los datos actuales experimentales abarcan al menos un aspecto de la física de la fuente.

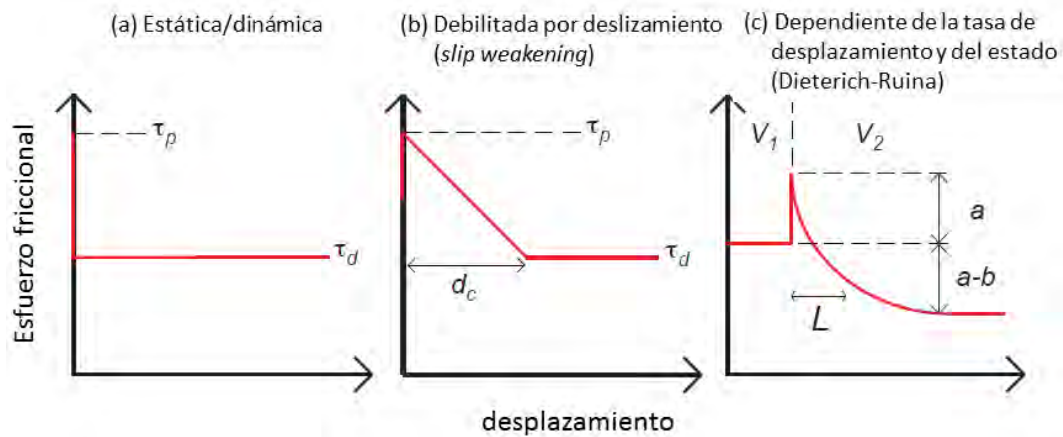


Figura 2.7: Leyes constitutivas de fricción para fallas sísmicas (Daub y Carlson [42]).

Algunas leyes constitutivas que se han usado para modelar la física del terremoto se describen a continuación. El ejemplo más simple de una ley de fricción es la fricción estática/dinámica, la cual se ilustra en la Figura 2.7 (a). El esfuerzo friccional $\tau = \sigma\mu$, es proporcional al esfuerzo normal σ , y la constante de proporcionalidad es μ (el coeficiente de fricción estática μ_s o dinámica μ_d). Aquí el cambio instantáneo en el esfuerzo desde un valor pico hasta el valor de deslizamiento, no tiene una explicación física. Se han propuesto muchas modificaciones para explicar este comportamiento, sin resultados concluyentes.

Otra ley constitutiva es la ley de fricción de debilitamiento por desplazamiento, o mejor conocida como *slip-weakening* (SW) [29, 42, 60], ha sido usada extensivamente para estudiar la dinámica de ruptura [61–63]. El esfuerzo friccional, τ , es una función decreciente del desplazamiento, u , hasta alguna distancia crítica d_c , tras la cual se prescribe un esfuerzo constante. La forma más común es lineal por partes. La falla está inicialmente bloqueada. El esfuerzo friccional se incrementa hasta un valor pico, τ_p , antes de iniciar el desplazamiento, y entonces se debilita cuando hay desplazamiento en la falla (Figura 2.7 (b)). Debido a que τ_d es constante, la falla no puede recuperar o incrementar la fuerza una vez que se rompe. Muchos de los experimentos en ingeniería utilizan una ley de fricción *velocity-weakening*, es decir, la fricción disminuye con los cambios en la velocidad, tal es el caso del efecto Stribeck [44].

Las leyes de fricción *slip-weakening* y *velocity-weakening* dependen de una sola cantidad. Estas fallan en capturar la caída de esfuerzo requerida para la propagación de la ruptura dinámica, o la dependencia de k de observaciones en laboratorio de la transición de comportamiento estancamiento-deslizamiento (*stick-slip*) a desplazamiento estable [64]. Estas leyes de fricción entran en una categoría llamada leyes de fricción estáticas [65].

Por otro lado, las leyes de fricción dinámicas establecen un cambio en la fricción en función de la evolución de una o más variables de estado, de tal forma que se pueden expresar como un sistema dinámico [65], i. e., sistema de ecuaciones diferenciales; tal es el caso de la ley de fricción de rocas, Dieterich-Ruina [33,66] (deformación y fractura en rocas de granito). Esta ley depende de la tasa de desplazamiento y de una variable de estado, dando lugar a una longitud característica de desplazamiento, L , y tasas friccionales a, b que son propiedades del material. La ley de Dieterich-Ruina es mejor conocida como ley de fricción dependiente de la tasa y del estado; como se muestra en la Figura 2.7 (c), misma que se abordará con más detalle en el Capítulo 3.

2.2. Preliminares matemáticos

2.2.1. Teoría de sistemas dinámicos

La teoría de sistemas dinámicos no lineales tienen un rol importante en casi todas las áreas de la ciencia debido a que los fenómenos del mundo real son en la mayoría de los casos no lineales. La teoría de sistemas dinámicos determinísticos es particularmente de gran apoyo en el estudio de comportamiento complejo, como es el caso del mecanismo de terremotos.

Un sistema físico es determinista si, dadas las mismas condiciones experimentales, repite siempre la misma conducta. En forma más precisa, su conducta es una sucesión de valores de un conjunto de variables dinámicas que aparecen en el transcurso del tiempo y que especifican el estado del sistema en cada instante t . Si el conjunto inicial de estas variables dinámicas es el mismo cada vez, el sistema bajo estudio experimental pasará siempre por la misma sucesión de valores (evolución temporal). En términos

matemáticos, se le puede asociar al sistema un espacio de estados y la evolución temporal es una curva si la variación ocurre de manera continua, o de puntos cuando los cambios son discretos.

Concepto de sistema dinámico

Un sistema dinámico es un conjunto de variables que interaccionan entre sí por medio de una regla o relación y que evolucionan con respecto a una variable, generalmente en el tiempo. Se representan por medio de un conjunto de ecuaciones diferenciales que describen la evolución del sistema.

Sea

$$\dot{x} = f(x, \Pi), \quad x \in R^n, \quad \Pi \in R^p, \quad (2.2.2)$$

un sistema dinámico tal que $f : R^n \rightarrow R^n$, localmente Lipchitz (continua y acotada). x es el vector de estados (variables del sistema) y Π el conjunto de parámetros del sistema, $x(t)$ es solución con condición inicial en t_0 y $x(t_0) = x_0$. Asume además que el punto de equilibrio del sistema $f(x^*) = 0$.

Si f es continuamente diferenciable, diremos que el sistema (2.2.2) es *continuo*, en cambio, si f presenta algún tipo de discontinuidad, i. e., no es continuamente diferenciable en algún valor o conjunto de valores de su dominio, diremos que el sistema es *Discontinuo*. La teoría requerida para sistemas dinámicos continuos se presenta en el Capítulo 4.

Los sistemas dinámicos que son descritos por una interacción entre dinámica continua y discreta son usualmente llamados *sistemas híbridos*. Un ejemplo de sistemas híbridos son los sistemas conmutados (SC), estos se manejan en muchas aplicaciones en ingeniería, en sistemas mecánicos [67–69] así como en otras áreas [68–74], todos estos sistemas son analizados por medio de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Típicamente, un SC está definido como sigue: dada la familia de campos vectoriales suaves $\{f_p : R^n \rightarrow R^n : p \in \mathcal{P}\}$ parametrizados por el conjunto indexado $\mathcal{P} = \{1, \dots, k\}$; consideramos el sistema conmutado no lineal asociado:

$$\dot{x} = f_s(x) \quad (2.2.3)$$

con $x \in R^n$ y donde $s : [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{P}$ es una señal de conmutación, i.e., una función constante por pedazos la cual define un específico subsistema que es activado durante un cierto intervalo de tiempo. Denotamos por S la familia de todas las señales de conmutación del sistema conmutado no lineal (2.2.3).

Un sistema conmutado no lineal puede tener la propiedad de que la conmutación (*switching*) depende de una de los estados, si cada subsistema está definido sobre una partición del espacio de estados, entonces ocurre una conmutación (*switching*) donde las trayectorias del sistema alcanzan la frontera de esas particiones, también conocidas como superficie de *switched*.

El estudio de las condiciones para la existencia y unicidad de las soluciones del sistema conmutado no lineal, y su estabilidad (relacionada con la disipación de energía del sistema), son el tema central [70–72, 74–79] en este tipo de sistemas, esto por el hecho de que los sistemas conmutados pueden ser mejor descritos y analizados por metodologías matemáticas debido a la naturaleza híbrida de su operación [74].

Existencia de soluciones en el sentido de Caratheodory

Muchas preguntas fundamentales vienen cuando la dinámica del sistema es discontinua. Para un campo vectorial discontinuo, la existencia de una solución clásica, es decir, continuamente diferenciable, i. e., la existencia de una curva suave cuya derivada siempre siga la dirección del campo vectorial no está garantizada.

La presencia de discontinuidades en sistemas con fricción, atribuibles a la definición de la función *signo*(\cdot), generalmente, o términos que inducen no diferenciabilidad en el campo vectorial, pueden inducir oscilaciones que son características en los sistemas no lineales conmutados, con comportamiento caótico. La existencia y unicidad se cumple cuando el campo vectorial del sistema $\dot{x} = f_s(x)$ es continuo por pedazos en t , lo cual requiere la noción de solución absolutamente continua en el sentido de Caratheodory.

Definition 2.2.1. [80] Sea $I = [a, b]$ un intervalo cerrado de la recta real \mathbf{R} . Una función $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ es absolutamente continua en I si para cada número positivo ϵ , existe un número positivo δ tal que si cualquier sucesión finita de parejas de sub-

intervalos disjuntos (a_k, b_k) de I satisfacen:

$$\sum_k |b_k - a_k| < \delta, \quad (2.2.4)$$

entonces

$$\sum_k |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon. \quad (2.2.5)$$

Equivalentemente [81], f es absolutamente continua si existe una función integrable de Lebesgue $\kappa: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ tal que

$$f(t) = f(a) + \int_{[a,t]} \kappa(s) ds, \quad t \in [a, b]. \quad (2.2.6)$$

Cada función absolutamente continua es continua. Las soluciones de Caratheódory son una generalización de las soluciones clásicas, es decir, son curvas absolutamente continuas que satisfacen la versión integral (2.2.6) de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$ como se establece en la siguiente definición:

Definition 2.2.2. [72] Una solución de Caratheódory definida sobre $[t_0, t_1] \subset R$ es un mapeo absolutamente continuo $x: [t_0, t_1] \rightarrow R^n$ que satisface (2.2.6) para casi todo $t \in [t_0, t_1]$.

En otras palabras, una solución de Caratheódory sigue la dirección especificada por el campo vectorial excepto para un conjunto de instantes de tiempo que tienen medida cero.

2.2.2. Estabilidad en sentido de Lyapunov

Sea $\dot{x} = f(x, \Pi)$ un sistema dinámico, $x(t_0) = x_0$, $t_0 = 0$ y $x^* = 0$ el punto de equilibrio del sistema. Se dice que el punto de equilibrio del sistema (2.2.2) es *estable* en el sentido de Lyapunov, si $\forall \epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que

$$\|x_0\| \leq \delta \Rightarrow \|x(t)\| \leq \epsilon \quad \forall t \geq 0. \quad (2.2.7)$$

Simplificamos diciendo que el sistema (2.2.2) es estable. Una convención similar aplicará para otros conceptos de estabilidad. El sistema (2.2.2) se dice que es *asintóticamente estable* si es estable y δ se puede escoger de tal forma que

$$\|x_0\| \leq \delta(t) \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.2.8)$$

El conjunto de todos los estados iniciales desde los cuales las trayectorias convergen al origen es llamado *región de atracción*. Si se cumple la condición anterior para todo δ , es decir, si el origen es un punto de equilibrio estable y su región de atracción es todo el espacio de estados, entonces el sistema (2.2.2) es llamado *globalmente asintóticamente estable*.

El sistema (2.2.2) es llamado *exponencialmente estable* si existen constantes positivas δ , c , y λ tal que todas las soluciones de (2.2.2) con $\|x(0)\| \leq \delta$ satisfacen la desigualdad

$$\|x(t)\| \leq c\|x(0)\|e^{-\lambda t} \quad \forall t \geq 0. \quad (2.2.9)$$

Si se estima que este decaimiento exponencial se cumple para toda δ , se dice que el sistema es *globalmente, exponencialmente estable*.

Para el caso del sistema conmutado (2.2.3), cuando se hace referencia al término *uniformemente*, se refiere a que es uniforme sobre el conjunto de todas las señales de conmutación o *switcheo*. Para ver más conceptos de estabilidad concernientes al sistema conmutado se puede consultar en Liberzon (2003) [75].

2.2.3. Bifurcaciones

Los cambios cualitativos en la dinámica del sistema son llamados bifurcaciones, y los valores de los parámetros en los cuales ocurren se llaman puntos de bifurcación. Las bifurcaciones son importantes científicamente ya que proveen modelos de transiciones e inestabilidades cuando se varía algún parámetro de control. La bifurcación de Hopf, es un tipo de bifurcación que presentan algunos sistemas de tal manera que al variar el valor del parámetro de bifurcación, el sistema puede sufrir un cambio en la estabilidad del punto crítico o en las trayectorias en estudio, dando origen o desapareciendo órbitas periódicas y/o ciclos límite.

Una órbita periódica representa soluciones periódicas y se observan cuando $x(t+T) = x(t) \forall t$, y algún $T > 0$. Un ciclo límite es una trayectoria cerrada en el plano de fase tal que otras trayectorias no cerradas tienden en espiral hacia ella, desde el interior o desde el exterior, cuando $t \rightarrow \infty$. Si todas las trayectorias vecinas se aproximan al ciclo límite decimos que es estable o atractor. Los ciclos límite estables son muy importantes

científicamente ya que modelan sistemas que exhiben oscilaciones autosostenidas, es decir, estos sistemas oscilan aún en ausencia de perturbaciones periódicas externas [82].

Bifurcación de Hopf

Para que ocurra una bifurcación de Hopf se deben cumplir algunas condiciones. Considere el sistema

$$\dot{x} = f(x, \Pi), \quad (2.2.10)$$

con vector de variables de estado $x \in R^n$ y vector de parámetros $\Pi \in R^p$. Supongamos que existe un punto (x_0, Π_0) tal que se cumple lo siguiente: (i) es un punto de equilibrio del sistema, i. e., $f(x_0, \Pi_0) = 0$, (ii) La matriz Jacobiana $D_x f(x_0, \Pi_0)$ posee un par de valores propios en el eje imaginario, i. e., $Re\{\lambda_{1,2}\} = 0$ y $Im\{\lambda_{1,2}\} \neq 0$, por último (iii) $\frac{d}{d\Pi}(Re\{\lambda(\Pi)\})|_{\Pi=\Pi_0} \neq 0$, i. e., que la rapidez de cruce de los valores propios sea diferente de cero, para asegurar que cruzan el eje imaginario; $\lambda(\Pi)$ es un valor propio de $D_x f(x_0, \Pi)$.

La rapidez de cruce de los valores propios a través del eje imaginario

$$r'(\Pi_0) = \frac{d}{d\Pi}(Re\{\lambda(\Pi)\})|_{\Pi=\Pi_0} \neq 0.$$

Para cualquier sistema en R^3 está dada en términos de la derivada del campo vectorial. El desarrollo se presenta a continuación (Detalles en [83]).

Considere el sistema (2.2.10), $x \in R^3$ y $\Pi \in R^p$; supóngase que existe (x_0, Π_0) tal que

$$f(x_0, \Pi_0) = 0,$$

y supóngase, además, la similaridad de matrices

$$D_x f(x_0, \Pi_0) \sim \begin{pmatrix} 0 & -b_0 & 0 \\ b_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

con $\lambda_0 < 0$ y $b_0 > 0$. Si $\Pi \approx \Pi_0$, dos de los valores propios, $\lambda_{\{1,2\}} \in C$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= r(\Pi) + i\beta(\Pi) \\ \lambda_2 &= r(\Pi) - i\beta(\Pi) \end{aligned}$$

donde

$$r(\Pi_0) = 0, \quad \beta(\Pi_0) = b_0.$$

Para $\Pi \approx \Pi_0$ la matriz jacobiana está dada por

$$D_x f(x_0, \Pi) \sim \begin{pmatrix} r(\Pi) & -\beta(\Pi) & 0 \\ \beta(\Pi) & r(\Pi) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^*(\Pi) \end{pmatrix} = J_\Pi.$$

El polinomio característico asociado a J_Π

$$P_{J_\Pi}(\lambda) = \det(\lambda I - J_\Pi) = \lambda^3 + a_1(\Pi)\lambda^2 + a_2(\Pi)\lambda + a_3 \quad (2.2.11)$$

donde

$$a_1(\Pi) = -(2r(\Pi) + \lambda^*(\Pi)) \quad (2.2.12)$$

$$a_2(\Pi) = 2r(\Pi)\lambda^*(\Pi) + r^2(\Pi) + \beta^2(\Pi) \quad (2.2.13)$$

$$a_3(\Pi) = -\lambda^*(\Pi)(r^2(\Pi) + \beta^2(\Pi)) \quad (2.2.14)$$

Resolviendo para r ; de (2.2.14)

$$r^2(\Pi) + \beta^2(\Pi) = -\frac{a_3(\Pi)}{\lambda^*(\Pi)} \quad (2.2.15)$$

sustituimos lo anterior en (2.2.13)

$$a_2(\Pi) = 2r(\Pi)\lambda^*(\Pi) - \frac{a_3(\Pi)}{\lambda^*(\Pi)} \quad (2.2.16)$$

despejamos $\lambda^*(\Pi)$ de (2.2.12) y la sustituimos en (2.2.16)

$$\lambda^*(\Pi) = -2r(\Pi) - a_1(\Pi)$$

entonces

$$a_2(\Pi) = -2r(\Pi)(2r(\Pi) + a_1(\Pi)) + \frac{a_3(\Pi)}{2r(\Pi) + a_1(\Pi)}$$

lo cual implica

$$a_2(\Pi)(2r(\Pi) + a_1(\Pi)) = -2r(\Pi)(2r(\Pi) + a_1(\Pi))^2 + a_3(\Pi)$$

igualando a cero y desarrollando la expresión anterior

$$8r^3(\Pi) + 8r^2(\Pi)a_1(\Pi) + (2a_1^2(\Pi) + 2a_2(\Pi))r(\Pi) + a_1(\Pi)a_2(\Pi) - a_3(\Pi) = 0$$

derivando implícitamente

$$0 = 24r^2(\Pi)r'(\Pi) + 8[a_1(\Pi)(2r(\Pi))r'(\Pi) + r^2(\Pi)a_1'(\Pi)] + \\ 2[(a_1^2(\Pi) + a_2(\Pi))r'(\Pi) + r(\Pi)(2a_1(\Pi)a_1'(\Pi) + a_2'(\Pi))] + \\ a_1(\Pi)a_2'(\Pi) + a_1'(\Pi)a_2(\Pi) - a_3'(\Pi).$$

Si $\Pi = \Pi_0$

$$2(a_1^2(\Pi_0) + a_2(\Pi_0))r'(\Pi_0) = a_3'(\Pi_0) - a_1'(\Pi_0)a_2(\Pi_0) - a_1(\Pi_0)a_2'(\Pi_0)$$

despejando $r'(\Pi_0)$ y tomando en cuenta que $a_1(\Pi_0) = -\lambda_0$ y $a_2(\Pi_0) = b^2$

$$r'(\Pi_0) = \frac{a_3'(\Pi_0) - b^2 a_1'(\Pi_0) + \lambda_0 a_2'(\Pi_0)}{2(\lambda_0^2 + b^2)} \quad (2.2.17)$$

que es la ecuación de la rapidez de cruce de los valores propios a través del eje imaginario.

Para Obtener las raíces en el eje imaginario consideremos la ecuación cúbica

$$\lambda^3 + a_1(\Pi)\lambda^2 + a_2(\Pi)\lambda + a_3 = 0. \quad (2.2.18)$$

Deseamos encontrar valores de Π para tener un par de valores propios en el eje imaginario. Sea $\lambda = ib_0$ una solución imaginaria; sustituyendo en (2.2.18) y agrupando términos

$$ib_0(a_2(\Pi) - b_0^2) + (a_3(\Pi) - a_1 b_0^2) = 0$$

por lo tanto

$$a_2(\Pi) - b_0^2 = 0, \quad a_3(\Pi) - a_1 b_0^2 = 0$$

de donde se obtiene

$$a_2(\Pi) = b_0^2 = \frac{a_3(\Pi)}{a_1(\Pi)}$$

y entonces la ecuación (2.2.18) tiene un par de raíces imaginarias si existe Π tal que se cumplen las siguientes dos condiciones:

$$a_3(\Pi) = a_1(\Pi)a_2(\Pi), \quad a_2(\Pi) > 0. \quad (2.2.19)$$

Sea $\Pi = \Pi_0$ tal que satisface (2.2.19) y, las raíces complejas conjugadas con parte real cero están dadas por

$$\lambda_{1,2} = \pm ib_0 \quad b_0 = \sqrt{a_2(\Pi)}, \quad (2.2.20)$$

además se debe cumplir que

$$(\lambda - ib_0)(\lambda + ib_0)(\lambda - \lambda_0) = 0$$

de ahí, la tercera raíz (2.2.18), $\lambda_3 = \lambda_0$

$$\lambda_0 = -\frac{a_3(\Pi_0)}{a_2(\Pi_0)}. \quad (2.2.21)$$

Plano de Poincaré

Los planos de Poincaré son de mucha utilidad en el estudio de las órbitas periódicas, ya que ayudan a probar la existencia de estas, y a estudiar los flujos que se encuentran cerca de las órbitas periódicas. Usando un plano de Poincaré, un sistema de tiempo continuo puede ser visto como un sistema en tiempo discreto. Los mapas de Poincaré tienen ventajas en muchos aspectos cuando se estudian ecuaciones diferenciales en el tiempo. No sólo reducen la dimensión del problema, sino que también otros aspectos de la

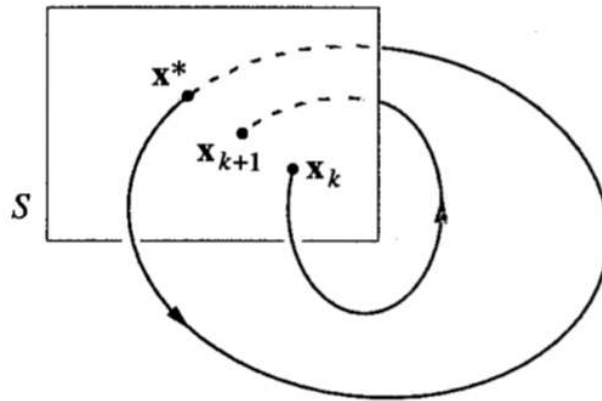


Figura 2.8: Plano de Poincaré [82]. x^* es un punto fijo de P ; i. e., $P(x^*) = x^*$. Una trayectoria que empieza en x^* regresa a x^* después de un tiempo T y es por lo tanto una órbita cerrada para el sistema $\dot{x} = f(x)$.

dinámica global del sistema. Esos planos son particularmente útiles ya que nos permiten deducir las propiedades de estabilidad de las órbitas periódicas [82]. Considere una solución periódica en el espacio de fases n -dimensional. Sea S una sección local $(n-1)$ -dimensional de una solución periódica la cual es transversa al flujo. En otras palabras,

el flujo corre a través de S , y no paralelo a S . Estamos interesados en los puntos en los cuales el flujo de trayectorias intersecta S . El plano de Poincaré P , es un mapeo de S a sí mismo, definido por $x_{k+1} = P(x_k)$, donde $x_k \in S$ es la k th intersección, como se muestra en la Figura 2.8. Un punto fijo de P corresponde a una órbita de periodo uno en el espacio fase. Las órbitas de periodo dos producirán dos puntos en P , y en general, una órbita de periodo p aparecerá como p puntos en el plano de Poincaré. Los puntos distribuidos aleatoriamente representarán órbitas caóticas. Mientras que los planos de Poincaré son usuales, es difícil o seguido imposible encontrar una fórmula para P .

2.2.4. Soluciones numéricas

En los problemas lineales y estacionarios es posible encontrar una expresión analítica para la solución de (2.2.10). No ocurre lo mismo en el caso no lineal, donde es difícil o casi imposible encontrar la solución por métodos analíticos y debe recurrirse a métodos numéricos. Sin embargo, aún en el caso lineal, es de interés disponer de métodos que permitan calcular de manera rápida y eficiente la solución de (2.2.10), principalmente en problemas de gran magnitud.

Discutiremos aquí la solución de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO's) a través de la aplicación de métodos numéricos en el contexto de la integración numérica de $\dot{x} = f(x)$.

El problema, en general, consiste en lo siguiente: Dada la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$ sujeta a la condición $x = x_0$ en $t = t_0$, encontrar una forma sistemática para aproximar la solución $x(t)$. Los métodos numéricos que consideraremos, son el método de Euler y el de Runge-Kutta. Estos son métodos de un paso, en el sentido de que para obtener x_{n+1} sólo se requiere el conocimiento de x_n .

Método de Euler

El método de Euler es el más simple de todos los métodos numéricos de resolución de ecuaciones diferenciales. En la práctica no es utilizado, sin embargo, por su simplicidad y por contener la mayor parte de las ideas en las que se fundamentan el resto de los

métodos utilizados, sirve como introducción a la resolución numérica de ecuaciones diferenciales.

En $t = t_0$ y x_0 la función es $f(x_0)$, por simplicidad, vamos a suponer que los nodos x_i

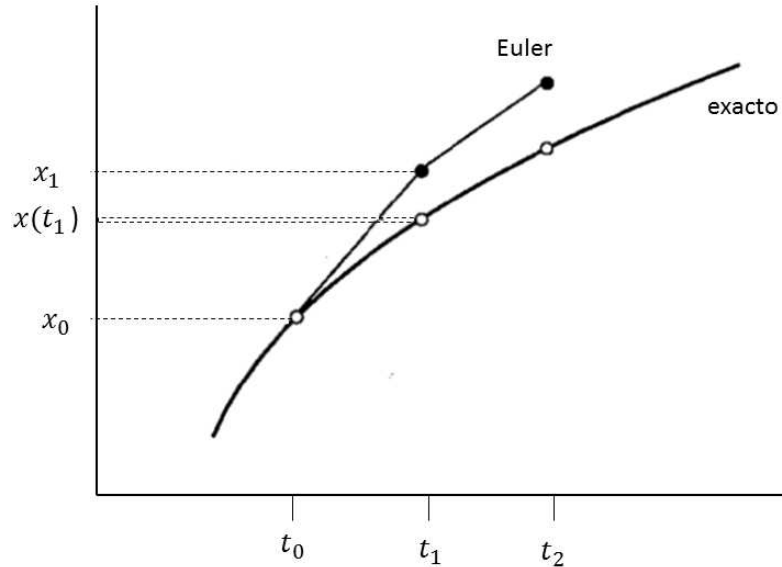


Figura 2.9: La curva muestra la solución exacta $x(t)$ y los puntos abiertos sus valores $x(t_n)$ en los tiempos discretos $t_n = t_0 + n\Delta t$. Los puntos negros muestran los valores aproximados dados por el método de Euler. [82]

están equiespaciados, entonces después de un periodo corto de tiempo Δt , usando la aproximación de Taylor

$$x(t_0 + \Delta t) \approx x_1 = x_0 + f(x_0)\Delta t. \quad (2.2.22)$$

Iterando, $x_2 = x_1 + f(x_1)\Delta t$, y así sucesivamente, de manera que el método de Euler se define como:

$$x_{n+1} = x_n + f(x_n)\Delta t. \quad (2.2.23)$$

Esta expresión se puede obtener geoméricamente, aproximando la función por su tangente como se muestra en la Figura 2.9 donde se observa que la aproximación se hace menos precisa a menos que Δt sea extremadamente pequeño.

Una aproximación más sensible sería usar la derivada promedio en el intervalo $[t_n, t_{n+1}]$, que es la idea del método mejorado de Euler [82]. Primero se toma un paso de prueba

a través del intervalo, utilizando el método de Euler. Esto produce un valor de prueba $\tilde{x}_{n+1} = x_n + f(x_n)\Delta t$, la tilde indica que este es un paso tentativo, que se utiliza sólo como una prueba inicial. Una vez que se ha estimado la derivada en ambos extremos del intervalo, se promedian $f(x_n)$ y $f(\tilde{x}_{n+1})$, y se usa para dar el paso real en el intervalo. Así, el método mejorado de Euler es

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{n+1} &= x_n + f(x_n)\Delta t \\ x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{2}[f(x_n) + f(\tilde{x}_{n+1})]\Delta t.\end{aligned}\tag{2.2.24}$$

Este método es más preciso que el método de Euler, en el sentido de que tiende a hacer el error más pequeño $E = |x(t_n) - x_n|$ para un paso de tamaño Δt dado. En ambos casos, el error $E \rightarrow 0$ cuando $\Delta t \rightarrow 0$, pero el error disminuye más rápido para el método mejorado de Euler. $E \propto \Delta t$ para el método de Euler (de primer orden), pero $E \propto (\Delta t)^2$ para el método mejorado de Euler (de segundo orden).

Método de Runge Kutta de cuarto orden

Como ya hemos comentado, el método de Euler consiste en quedarse con el primer término del desarrollo de Taylor de la solución. Este método es fácilmente generalizable a órdenes mayores simplemente tomando más términos en el desarrollo de Taylor. De esta manera se pueden conseguir métodos cuyo error vaya como $O(h^2)$, $O(h^3)$, etc. El problema de estos métodos es que requieren calcular derivadas de órdenes superiores de la función $f(x)$. Los métodos de Runge-Kutta substituyen el cálculo de las derivadas de $f(x)$ por la evaluación de esta función en puntos intermedios, de manera que sigan manteniendo el mismo error que el método de Taylor correspondiente. Resultan así unos métodos muy compactos y sencillos de programar. La idea general para estos métodos es substituir en el método de Euler el valor de la pendiente $f(x_n)$, que es exacta sólo en x_n , por una especie de valor promedio para el intervalo $[x_n, x_{n+1}]$, $F(x_n; h)$. La forma de estos métodos es:

$$x_{n+1} = x_n + hF(x_n; h).\tag{2.2.25}$$

Para el método de orden 2. Supongamos que F es de la forma $F(x; h) = \gamma_1 f(x) + \gamma_2 f(x + \alpha h)$, donde las constantes $\gamma_1, \gamma_2, \alpha$ se determinan de manera que al substituir la solución exacta en (2.2.25) se tenga un error de truncamiento similar al del método de Taylor de orden 2, es decir, orden $O(h^3)$. Esto conduce a unas ecuaciones que

relacionan estos parámetros, dando lugar a una familia uniparamétrica de métodos de Runge-Kutta de orden 2. El error para la solución de estos métodos es de orden $O(h^2)$.

Los métodos de orden mayor requieren más cálculos y evaluaciones de funciones, así que existe un costo computacional asociado con ellos. Un buen equilibrio se obtiene por el método de Runge-Kutta de cuarto orden:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (2.2.26)$$

donde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n)\Delta t \\ k_2 &= f(x_n + \frac{1}{2}k_1)\Delta t \\ k_3 &= f(x_n + \frac{1}{2}k_2)\Delta t \\ k_4 &= f(x_n + k_3)\Delta t. \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

Este método resulta ser de cuarto orden, y el error en la solución es $O(h^4)$. En capítulos subsecuentes se utilizará el método de Runge-Kutta de cuarto orden para soluciones numéricas con programación MatLab®.

Capítulo 3

Sistema Dinámico Propuesto

La física de los terremotos es usualmente investigada a través de simples modelos minimalísticos que puntualizan la física que produce resultados comparables con la naturaleza sin ser sobrepasados por la complejidad del problema [2], como los modelos de bloques deslizantes. Un modelo constituye una representación abstracta de un cierto aspecto de la realidad. En su estructura intervienen, por una parte, los elementos que caracterizan la realidad modelizada (leyes físicas) y por otra parte, las relaciones existentes entre ellos (variables y funciones).

En este capítulo se presenta un modelo conceptual y matemático del mecanismo de terremotos del cual derivamos un sistema dinámico completamente determinístico. El modelo se construye a partir del movimiento de un bloque deslizante y se presenta como un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias, cuyas variables y parámetros están relacionados con la física del terremoto.

Introducimos la presencia de fluidos entre las superficies tectónicas en contacto, la deformación del medio a través de un parámetro en el modelo; y términos de fricción asociados con sistemas mecánicos y con esfuerzo en rocas de granito; ambas leyes de fricción son empíricas, resultantes de experimentos en laboratorio.

3.1. Modelo conceptual

Para modelar el movimiento relativo de los bloques tectónicos, con esfuerzo normal constante a través del tiempo, se considera un sistema de bloque deslizante con un

grado de libertad. El bloque se desliza sobre una superficie sólida, rugosa y lubricada, con desplazamiento friccional. Este sistema está representado por un bloque deslizante

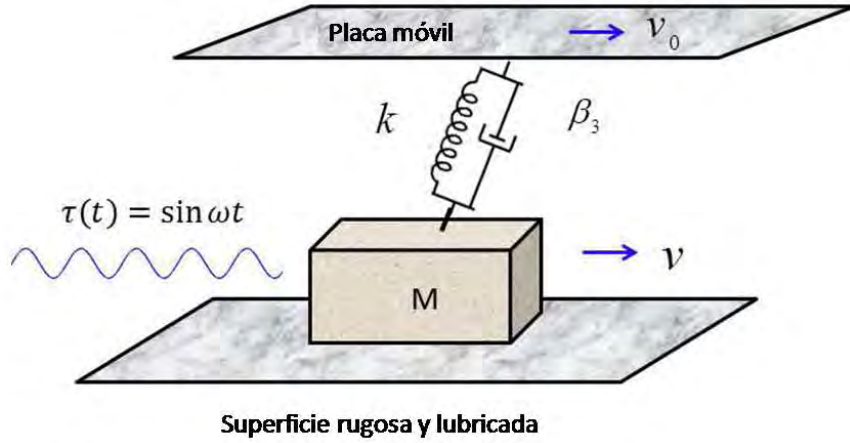


Figura 3.1: Bloque deslizante de masa M de un grado de libertad, acoplado con un resorte y un amortiguador a una placa móvil, estos representan al medio viscoelástico. La placa móvil y el bloque se mueven a velocidades v_0 y v , respectivamente. La velocidad relativa del bloque está dada por $\dot{u} = \dot{x} - v_0$. Las fuerzas de fricción actúan entre el bloque y la placa fija.

de masa M , el cual se desplaza con velocidad v , está conectado a una placa que se mueve con velocidad constante v_0 , se conecta con un resorte cuya constante de deformación es k , este corresponde a las propiedades elásticas en el entorno de la falla; también se conecta con un amortiguador cuyo coeficiente de viscosidad dinámica es β_3 , por otro lado, el bloque se acopla con una placa fija por medio de propiedades friccionales, es decir, se desplaza bajo una ley de fricción correspondiente a: Dieterich-Ruina y efecto Stribeck [43, 44], fuerzas que se oponen al desplazamiento del oscilador con respecto a la placa fija (Figure 3.1).

La ecuación de movimiento del sistema es la siguiente:

$$M\ddot{u} + F(\dot{u}, \theta) + ku = \tau(t), \quad (3.1.1)$$

donde $u \in R$ denota el desplazamiento relativo definido por $u = x - v_0 t \Rightarrow \dot{u} = \dot{x} - v_0$, $\ddot{u} = \ddot{x}$, y θ representa efectos de la historia de desplazamientos [47, 66]. Si asumimos

por simplicidad que el desplazamiento relativo del bloque en profundidad es igual al desplazamiento en superficie, entonces u puede ser medida en la superficie de la corteza por medio de datos del Sistema de Posicionamiento Global (GPS) [84]. $\tau(t)$ representa las fuerzas externas al sistema las cuales son incorporadas para capturar efectos de otros bloques yuxtapuestos. El término $F(\dot{u}, \theta) = F(v, \theta)$ incluye todos los efectos de fricción que afectan el movimiento del bloque deslizante. Aunque las fuerzas de fricción $F(v, \theta)$ en las placas son desconocidas durante un evento sísmico, algunos modelos se han derivado de experimentos en laboratorio [19, 29, 31, 85] los cuales nos permiten hacernos una idea de esas fuerzas contrarias al movimiento de las placas en contacto. En la siguiente sección serán discutidos detalles de $F(v, \theta)$.

3.2. Lubricación en la zona de falla

Se considera que la corteza se comporta como un medio saturado de fluido; eso explica la gran variedad de fenómenos hidrológicos que ocurren en la corteza; además en las zonas de nucleación la presión impulsa gases (vea [86]) que se comportan de manera similar a los fluidos incompresibles.

Piombo *et al.* [87] por medio del análisis de esfuerzos de Coulomb concluyen que este mecanismo explica la relación entre la presencia de fluidos con la caída de esfuerzo y deformación como un disparador de réplicas [87–90].

Por otro lado, Faulkner *et al.* [91] hicieron una revisión concentrada en avances de los últimos 10 años aproximadamente y en zonas de fallas de la corteza continental; acerca del rol que tienen fallas con respecto al desarrollo de la corteza, cuya función principal es controlar las propiedades mecánicas y el flujo de fluidos en dichas zonas, además de su análisis deducen que existe fluido entre las fracturas de la falla en el entorno de la zona de cizalla.

Di Toro *et al.* [86] hicieron una revisión exhaustiva de experimentos publicados y no publicados acerca de las tasas de desplazamiento con respecto a la fricción; encontraron un significativo decrecimiento en la fricción atribuida a términos de lubricación, para rocas cohesivas y no cohesivas típicas de las fuentes sismogénicas de la corteza. El trabajo mecánico y la temperatura asociada se observan en la zona de desplazamiento,

además un número de procesos físico-químicos se desencadenan, cuyos productos son responsables por la lubricación de la falla. Deducen que las fallas están lubricadas independientemente de la composición de las rocas y del mecanismo de debilitamiento friccional involucrado.

Algunos experimentos han capturado cuantitativamente características específicas asociadas con la lubricación en la frontera entre dos superficies planas, que hace diferente las propiedades friccionales de este régimen cuando se consideran lubricantes en el volumen e interfases secas [92, 93].

La similitud entre (i) productos de la falla, naturales y experimentales y, (ii) medidas del trabajo mecánico resultante de esos experimentos en laboratorio y estimaciones sismológicas; sugieren que es razonable extrapolar datos experimentales a condiciones típicas de profundidades de nucleación de terremotos (entre 7 y 15 km) [86].

3.3. Leyes de fricción

3.3.1. Efecto Stribeck

Modelos de fricción han sido ampliamente estudiados y los efectos dinámicos en el sistema han sido reportados (para ejemplos vea [43–45] y las referencias en ellos). Un modelo basado en un bloque deslizante de masa M es esencialmente una representación mecánica. Nuestro análisis incluye, entre otros, los componentes de fricción en sistemas mecánicos, los cuales son una función de la velocidad. Aunque hay controversia en cuanto al carácter de la funcionalidad de las fuerzas de fricción con la velocidad, experimentos han confirmado que, para velocidades moderadas y relativamente bajas, interesantes componentes son causados por los fenómenos siguientes, en presencia de fluidos (superficies lubricadas) (ver Figura 3.2):

1. Coulomb y estática. La fricción de Coulomb, $F_c(v)$, es debida a los efectos del estancamiento. Existe un torque friccional constante que se opone al movimiento cuando la velocidad es diferente de cero. Cuando la velocidad es cero, la fricción estática se opone a todos los movimientos, siempre y cuando las fuerzas sean más pequeñas en magnitud que la fricción estática. Esta ley es para superficies secas o lubricadas en la frontera.

2. Stribeck (curvas hacia abajo), $F_s(v)$. Después de que la fuerza de fricción estática ha sido superada, la fuerza de fricción disminuye exponencialmente, alcanzando un mínimo y luego aumenta proporcionalmente con la velocidad. Estas curvas se producen a velocidades cercanas a cero. Este fenómeno de fricción es debido a una lubricación parcial, donde la velocidad es adecuada para arrastrar algo de líquido en la unión, pero no lo suficiente como para separar completamente las superficies.
3. Fricción viscosa, $F_v(v)$. Estas fuerzas aparecen a una velocidad distinta de cero debido a la disipación de energía en el fluido lubricante contenido entre las superficies móviles. Aquí las superficies son totalmente separados por una capa de fluido.

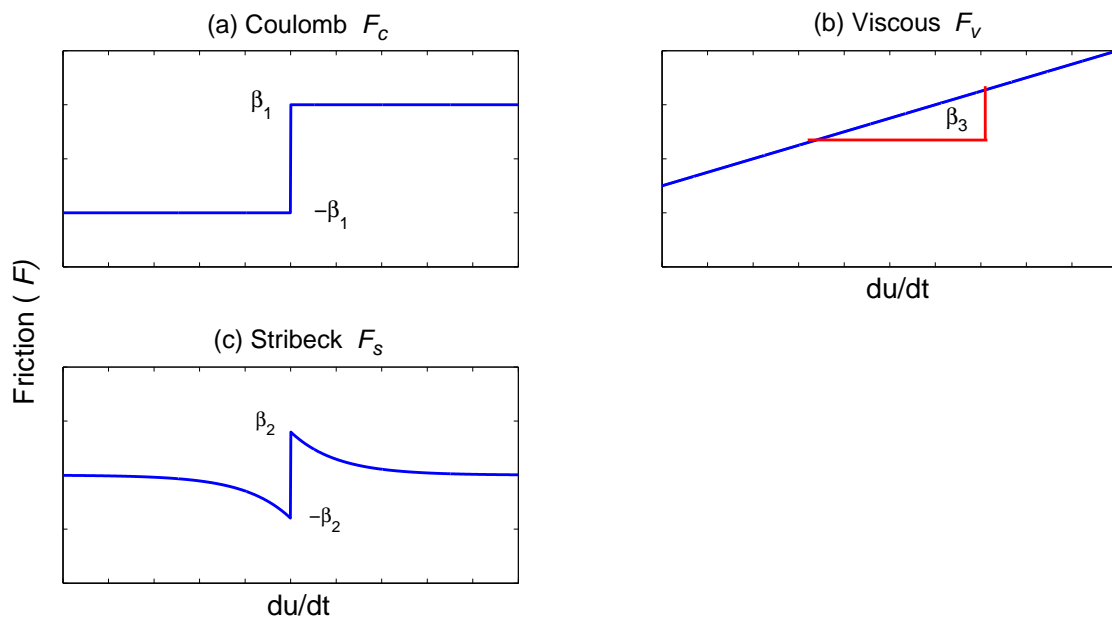


Figura 3.2: Fricción vs. velocidad. (a) Fricción de Coulomb y estática: superficie seca o lubricada en la frontera, (b) fricción viscosa (capa de fluido); y (c) fricción de Stribeck (parcialmente lubricada).

Cuando la dirección del movimiento cambia, las fuerzas de fricción F_c y F_s cambian de signo y son definidas para todas las velocidades excepto para cero. Las fuerzas de

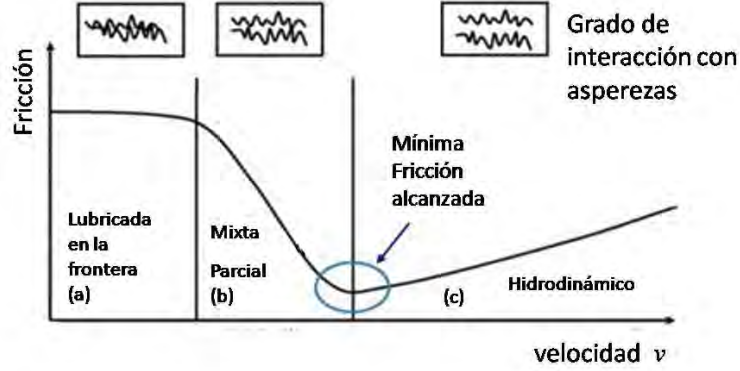


Figura 3.3: Efecto Stribeck.

fricción (1)-(3) son representadas como sigue:

$$F_c(v) = \beta_1 \text{sign}(v - v_0) \quad F_s(v) = \beta_2 e^{-\mu/v} \text{sign}(v - v_0) \quad F_v(v) = \beta_3 v. \quad (3.3.2)$$

donde $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \mu \in R > 0$. β_1 representa el producto de la fuerza normal y el coeficiente friccional dinámico del granito; $\beta_2 = F_{max} - \beta_1$ (F_{max} límite superior dado por la fuerza estática); β_3 representa el coeficiente de viscosidad dinámica del fluido entre las placas, y μ denota una constante de desplazamiento. Note que u es la posición del bloque deslizante relativa a la velocidad de la placa; por lo que suponemos que la dirección está dada por el signo de $v - v_0$, de tal forma que la dirección es negativa cuando $v < v_0$, cero cuando $v = v_0$ y positiva de otra forma. Por lo tanto, la función $\text{sign} : R \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ en la ecuación 3.3.2 está definida por

$$\text{sign}(\dot{u}) = \begin{cases} -1, & \text{if } v - v_0 < 0, \\ 0, & \text{if } v - v_0 = 0, \\ 1, & \text{if } v - v_0 > 0. \end{cases} \quad (3.3.3)$$

La fricción de Coulomb, F_c , es independiente de la velocidad (Figura 3.2 (a)), la fuerza de fricción F_v (Figura 3.2(b)) muestra dependencia lineal sobre la velocidad, mientras que en la fricción de Stribeck F_s , el comportamiento es no lineal con respecto a la velocidad (Figura 3.2 (c)). En la Figura 3.2 se muestra el comportamiento de las fricciones F_c , F_s y F_v por separado, sin embargo el efecto Stribeck muestra la transición de superficies secas a lubricadas y es una combinación de las tres fuerzas como muestra la Figura 3.3.

3.3.2. Ley de fricción de Dieterich-Ruina

Un componente adicional puede encontrarse en sistemas sísmicos concernientes con el esfuerzo friccional. Este esfuerzo aparece como consecuencia del contacto entre placas tectónicas a bajas velocidades cuya resistencia es sobrepasada, provocando deformación de los bloques de granito y fracturas.

Investigaciones extensivas sobre el fenómeno *stick slip* en rocas han sido aplicadas debido a su relevancia dentro del mecanismo de terremotos en la corteza. Tales investigaciones han dado a conocer que la fricción depende de los efectos de la historia de los desplazamientos. Esta característica es exhibida por rocas y denotada por θ en el campo de las ciencias de la tierra; θ se interpreta como una medida del tiempo promedio de contacto con asperezas bajo presión entre las superficies deslizantes [47, 66].

Para capturar tales efectos históricos en los términos de fricción, se incluyó la de-

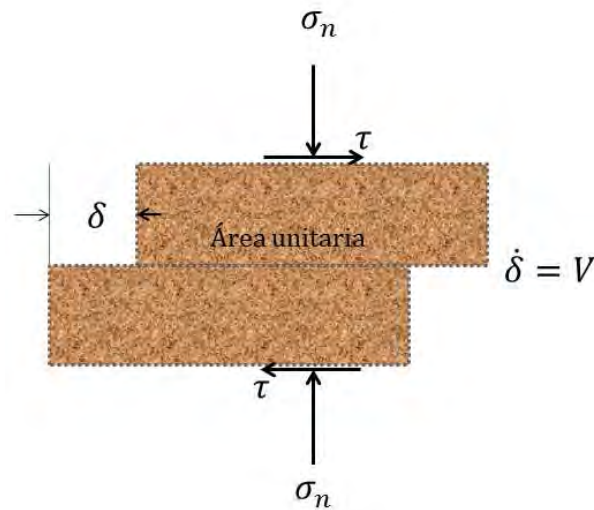


Figura 3.4: Variación en el esfuerzo friccional τ en un experimento idealizado [33], en la cual la tasa de desplazamiento V cambia frecuentemente. La ley de fricción es descrita en un punto sobre la superficie, definido como una unidad de área de superficie sobre la frontera de un sólido. El esfuerzo friccional τ está determinado por el esfuerzo normal σ_n . El bloque superior se desplaza sobre el bloque inferior y las fuerzas de fricción actúan entre estas, y se oponen al desplazamiento.

pendencia sobre la tasa de desplazamiento y el estado de las relaciones friccionales

constitutivas, denotada por $F_{dr}(v, \theta)$, para el bloque deslizante de un grado de libertad (Figure 3.1). $F_{dr}(v, \theta)$ describe precisamente los resultados experimentales de mecánica de rocas [32, 33] obtenidos sobre un amplio rango de velocidades de desplazamiento v (Figura 3.4).

La fuerza asociada a $F_{dr}(v, \theta)$ es opuesta al desplazamiento de las placas de granito y considera la renovación de asperezas entre ellas; tal consideración no está incluida en los términos de fricción estática, mencionados en la sección anterior. Ahora, $F_{dr}(v, \theta)$

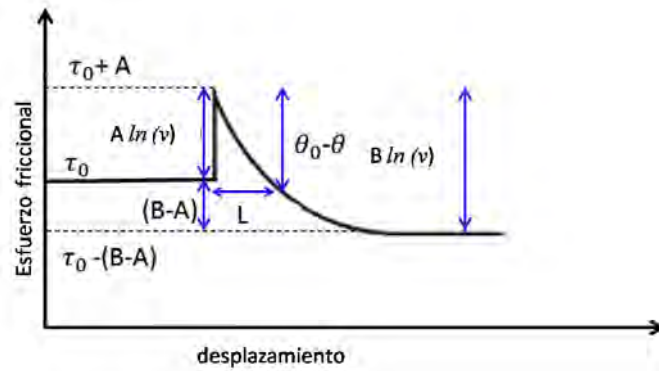


Figura 3.5: Respuesta friccional vs. desplazamiento con la ley de fricción de Dieterich-Ruina [15]. cuando v_0 se incrementa instantáneamente Δv , el esfuerzo friccional, inicialmente en τ_0 , se incrementa hasta $\tau_0 + A$, seguido de una velocidad de desplazamiento constante en $v_0 + \Delta v$ donde el esfuerzo friccional decrece exponencialmente B hasta $\tau_0 - (B - A)$, L es la distancia característica requerida para renovar la población de contacto (desde la variable θ hasta un nuevo estado θ_0).

se muestra en la Figura 2.7(c) y Figura 3.5, y se explica en términos físicos. Marone [29], Daub y Carlson [30], y Scholz [3, 47] hacen un resumen de la Ley de fricción de Dieterich-Ruina, la cual es una ley de fricción fenomenológica introducida para capturar observaciones experimentales de estado estable y fricción transitoria.

La $F_{dr}(v, \theta)$ es una ley de fricción referida como tasa y estado, que asume dependencia sobre una variable de estado dinámica. El esfuerzo friccional τ es una función de la tasa (velocidad de desplazamiento v) y la variable de estado θ . La dependencia es

logarítmica [48]:

$$\tau = \sigma[f_0 + A \ln(v/v_0) + B \ln(\theta v_0/L)] \quad \frac{d\theta}{dt} = 1 - \frac{\theta v}{L}. \quad (3.3.4)$$

Aquí σ es el esfuerzo normal (constante), las constantes A y B son propiedades del material que determinan la dependencia de la tasa y del estado, L es la distancia crítica de desplazamiento requerida para renovar la población de contacto, es decir, la distancia requerida para estabilizar la fricción hasta F después de un cambio en las condiciones de desplazamiento [66]. El coeficiente de fricción f_0 es la fricción en estado estable en $v = v_0$ y θ evoluciona de acuerdo con la segunda ecuación de (3.3.4). La fricción base f_0 , la cual determina la resistencia de la falla, no se considera en esta discusión. La resistencia de la falla no está involucrada en el comportamiento sismogénico de la falla, el cual es determinado solamente por su estabilidad friccional, no por su resistencia. La resistencia de la falla tiene un rol en calor friccional de las fallas, el cual puede producir interesantes efectos [34], pero no serán abordados ni discutidos aquí.

Cuando el bloque se mueve a velocidad constante v_{ss} en estado estable, i. e., cuando $\frac{d\theta}{dt} = 0 \Rightarrow \theta_{ss} = L/v_{ss}$ y el esfuerzo friccional en estado estable es

$$\tau = (A - B) \ln(v_{ss}/v_0). \quad (3.3.5)$$

De acuerdo con Rice (1983) [64]

$$A = \partial\tau/\partial \ln v = v(\partial\tau/\partial v) \quad (3.3.6)$$

es una medida de la dependencia directa de la velocidad (efecto directo), mientras que

$$(A - B) = \partial\tau_{ss}/\partial \ln v_{ss} = v\partial\tau_{ss}/\partial v \quad (3.3.7)$$

es una medida de la dependencia de la velocidad en estado estable. A y B determinan la dependencia de la velocidad de la fricción, y existe una L fija para efectos transitorios.

Las ecuaciones (3.3.4) son las de la ley de fricción de Dieterich, en la última ecuación el estado (θ) evoluciona aún estando en contacto estacionario, esta ley ha sido referida como *aging* [29].

Ruina (1983) [33] propuso una ley de evolución diferente (ver Figura 3.4) en la cual la velocidad y el desplazamiento en lugar del tiempo, fueran de primordial importancia. La ley de fricción de Ruina es la siguiente:

$$\tau = \sigma[f_0 + A \ln(v/v_0) + B \ln(\theta v_0/L)] \quad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{\theta v}{L} \ln(v\theta/L). \quad (3.3.8)$$

El esfuerzo friccional en estado estable es el mismo para la ley de fricción de Ruina y de Dieterich, ya que en ambos casos $\frac{d\theta}{dt} = 0 \Rightarrow \theta_{ss} = L/v_{ss}$.

Mientras que el modelo de Dieterich (3.3.4) captura la fricción primariamente en términos de dependencia del tiempo y fricción estática, el modelo de Ruina (3.3.8) dice que cualquier cambio en la fricción requiere desplazamiento.

Otras formulaciones de la ley de fricción compuesta por Dieterich-Ruina, $F_{dr}(v, \theta)$, se han dado, una de las cuales es la siguiente [15]:

$$F_{dr}(v, \theta) = \theta + A \ln(v/v_0), \quad \dot{\theta} = -(v/L) [\theta + B \ln(v/v_0)]. \quad (3.3.9)$$

Esta ley de fricción es equivalente a las anteriores para el esfuerzo friccional en estado estable, es decir, $\dot{\theta} = -(v/L) [\theta + B \ln(v/v_0)] = 0 \Rightarrow \theta = -B \ln(v/v_0)$ sustituyendo este valor en la primera ecuación de (3.3.9), con $f_0 = 0$ para todos los casos, se obtiene la equivalencia. Esta es la formulación que se utilizará en este trabajo.

En la Figura 3.5 se muestra que el esfuerzo friccional depende aditivamente sobre el término $A \ln(v)$ y la variable de estado θ . El esfuerzo friccional está caracterizado por un cambio desde $A \ln(v)$ hasta el término $B \ln(v)$, donde los escalares A y B dependen de las propiedades del material y determinan el signo de la dependencia con respecto a la velocidad. Las inestabilidades atribuibles al comportamiento *stick slip* se observan solamente en leyes de fricción con debilitamiento de la velocidad en estado estable (*velocity weakening*), i.e., la fricción en estado estable decrece cuando la velocidad del desplazamiento se incrementa [64]. Una suposición es que la relación $B > A > 0$ se cumple (Figuras 2.7 (c) y Figura 3.5).

Aunque $F_{dr}(v, \theta)$ ha sido usada aisladamente para modelar la dinámica de terremotos (confrontar con reportes recientes [15, 16, 46]), la combinación de $F_{dr}(v, \theta)$ y el efecto

Stribeck que involucra $F_c(v)$, $F_s(v)$ y $F_v(v)$, ofrecen un modelo complementario. Tomando en cuenta todas las fuerzas de fricción, la ley de fricción de nuestro sistema se convierte en

$$F(v, \theta) = F_{dr}(v, \theta) + F_c(v) + F_s(v) + F_v(v) \quad (3.3.10)$$

esta ecuación se acopla con la ecuación de segundo orden (3.1.1) para obtener el sistema dinámico complementado correspondiente al modelo del bloque deslizante de un grado de libertad.

3.4. Sistema dinámico

Combinando las ecuaciones (3.1.1), (3.3.9), y el efecto Stribeck (3.3.2) el modelo dinámico para el bloque deslizante de un grado de libertad puede ser formulado como el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= -(v/L)[\theta + B \ln(v/v_0)] \\ \dot{u} &= v - v_0 \\ \dot{v} &= -(1/M)[ku + F_{dr}(v, \theta)] + (\beta_i/M)F_0(v) + \tau(t) \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

donde $F_{dr}(v, \theta)$ está dado en la primera ecuación de (3.3.9).

3.4.1. Sistema adimensional

La versión adimensional del sistema (3.4.11) puede obtenerse definiendo nuevas variables: $\hat{\theta}$, \hat{u} , \hat{v} y \hat{t} como es sugerido por Erickson *et al.* (2008) [15]; o equivalentemente

$$\theta = A\hat{\theta}, \quad v = v_0\hat{v}, \quad u = L\hat{u}, \quad t = (L/v_0)\hat{t}, \quad (3.4.12)$$

de donde $\frac{d\hat{t}}{dt} = v_0/L$; y derivando las ecuaciones (3.4.12) con respecto a t (usamos la regla de la cadena) obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= A \frac{d\hat{\theta}}{d\hat{t}} \frac{d\hat{t}}{dt} = \frac{Av_0}{L} \dot{\hat{\theta}} \\ \dot{u} &= L \frac{d\hat{u}}{d\hat{t}} \frac{d\hat{t}}{dt} = L \frac{v_0}{L} \dot{\hat{u}} = v_0 \dot{\hat{u}} \\ \dot{v} &= v_0 \frac{d\hat{v}}{d\hat{t}} \frac{d\hat{t}}{dt} = v_0 \frac{v_0}{L} \dot{\hat{v}} = \frac{v_0^2}{L} \dot{\hat{v}} \end{aligned}$$

y sustituyendo lo anterior y las ecuaciones (3.4.12) en el sistema (3.4.11):

$$\begin{aligned}
\left(\frac{Av_0}{L}\right) \dot{\hat{\theta}} &= -\left(\frac{v_0\hat{v}}{L}\right) \left[A\hat{\theta} + B \ln\left(\frac{v_0\hat{v}}{v_0}\right)\right] \\
v_0\dot{\hat{u}} &= v_0\hat{v} - v_0 \\
\left(\frac{v_0^2}{L}\right) \dot{\hat{v}} &= -\left(\frac{1}{M}\right) \left[kL\hat{u} + A\hat{\theta} + A \ln\left(\frac{v_0\hat{v}}{v_0}\right)\right] + \left(\frac{\beta_i}{M}\right) [F_0(\hat{v})] + \tau \left(\frac{L}{v_0}\hat{t}\right).
\end{aligned} \tag{3.4.13}$$

Tomamos la primera ecuación de (3.4.13),

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\theta}} &= -\left(\frac{v_0L\hat{v}}{Av_0L}\right) \left[A\hat{\theta} + B \ln\left(\frac{v_0\hat{v}}{v_0}\right)\right] \\
&= -\frac{\hat{v}}{A} [A\hat{\theta} + B \ln(\hat{v})] \\
&= -\hat{v} \left[\hat{\theta} + \frac{B}{A} \ln(\hat{v})\right] \\
&= -\hat{v} \left[\hat{\theta} + \left(\frac{B}{A} + \frac{A}{A} - \frac{A}{A}\right) \ln(\hat{v})\right] \\
&= -\hat{v} \left[\hat{\theta} + \left(1 + \frac{B-A}{A}\right) \ln(\hat{v})\right] \\
&= -\hat{v} [\hat{\theta} + (1 + \varepsilon) \ln(\hat{v})] \\
\varepsilon &= \frac{B-A}{A}
\end{aligned}$$

de manera similar, de la segunda ecuación de (3.4.13)

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{u}} &= \frac{1}{v_0} (v_0\hat{v} - v_0) \\
&= \hat{v} - 1
\end{aligned}$$

y de la tercera ecuación de (3.4.13)

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{v}} &= -\left(\frac{L}{Mv_0^2}\right) \left[kL\hat{u} + A\hat{\theta} + A \ln\left(\frac{v_0\hat{v}}{v_0}\right)\right] + \left(\frac{L\beta_i}{Mv_0^2}\right) [F_0(\hat{v})] + \tau \left(\frac{L}{v_0}\hat{t}\right) \\
&= -\left(\frac{kL^2}{Mv_0^2}\right) \left[\hat{u} + \left(\frac{A}{kL}\right) (\hat{\theta} + \ln(\hat{v}))\right] + \alpha_i [F_0(\hat{v})] + \tau(\hat{t}) \\
&= -\left(\frac{k}{M}\right) \left(\frac{L}{v_0}\right)^2 \left[\hat{u} + \left(\frac{A}{kL}\right) (\hat{\theta} + \ln(\hat{v}))\right] + \alpha_i [F_0(\hat{v})] + \tau(\hat{t}) \\
\dot{\hat{v}} &= -\gamma^2 \left[\hat{u} + \left(\frac{1}{\xi}\right) (\hat{\theta} + \ln(\hat{v}))\right] + \alpha_i [F_0(\hat{v})] + \tau(\hat{t})
\end{aligned}$$

donde

$$\gamma = \sqrt{\frac{k}{M}} \left(\frac{L}{v_0} \right), \quad \xi = \frac{kL}{A}, \quad \alpha_i = \frac{L\beta_i}{Mv_0^2} \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.4.14)$$

y

$$\tau(\hat{t}) := \tau \left(\frac{L}{v_0} \hat{t} \right) \quad (3.4.15)$$

El sistema adimensional está dado por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}} &= -\hat{v}[\hat{\theta} + (1 + \varepsilon) \ln \hat{v}] \\ \dot{\hat{u}} &= \hat{v} - 1 \\ \dot{\hat{v}} &= -\gamma^2[\hat{u} + (1/\xi)(\hat{\theta} + \ln \hat{v})] + \alpha F_0(\hat{v}) + \tau(\hat{t}) \end{aligned} \quad (3.4.16)$$

donde

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (L/Mv_0^2)(\beta_1, \beta_2, v_0\beta_3) \quad (3.4.17)$$

y

$$F_0(\hat{v}) = (\text{sign}(\hat{v} - 1), e^{-\hat{\mu}\hat{v}} \text{sign}(\hat{v} - 1), \hat{v})^T \quad (3.4.18)$$

donde $\hat{\mu} = v_0\mu$, en lo sucesivo sólo lo denotaremos como μ . Los parámetros $\Pi = (\varepsilon, \xi, \gamma) \in \mathbf{R}^3$ están directamente relacionados con la dinámica del terremoto como sigue: $\varepsilon = (A - B)/A \in \mathbf{R}_{>0}$ es una medida relacionada con la sensibilidad de la relajación de la velocidad y está asociado con la caída de esfuerzo durante el terremoto y con el incremento directo del esfuerzo como consecuencia del cambio instantáneo positivo de la velocidad (ver Figura 3.5); $\xi = kL/A \in \mathbf{R}_{>0}$ es la constante adimensional del resorte (deformación del medio); y $\gamma = \sqrt{(k/M)}(L/v_0) \in \mathbf{R}_{>0}$ considera la frecuencia de oscilación adimensional del bloque deslizante.

El sistema (3.4.16) puede ser reescrito de la siguiente manera:

$$\dot{x} = f(x) + \tau(\hat{t}), \quad (3.4.19)$$

donde

$$\tau(\hat{t}) = [0, 0, \tau_i(\hat{t})]^T, \quad i = 1, 2 \quad (3.4.20)$$

i. e., la fuerza externa $\tau_1(\hat{t}) = 0$ o $\tau_2(\hat{t}) = \sin(\omega\hat{t})$, para los casos homogéneo y forzado, respectivamente. $\tau_2(t)$ es determinística y periódica, ω es la frecuencia angular.

Denotamos el vector de estados como $x = (\hat{\theta}, \hat{u}, \hat{v})^T$, tal que $x \in \mathbf{R}^3$, y $\hat{\theta}, \hat{u} \in \mathbf{R}$, $\hat{v} \in \mathbf{R}_{>0}$ y la condición inicial $x(0) = x_0 \in U$.

$f(x)$ está dado por

$$f(x) = \begin{pmatrix} -\hat{v}[\hat{\theta} + (1 + \varepsilon) \ln \hat{v}] \\ \hat{v} - 1 \\ -\gamma^2[\hat{u} + (1/\xi)(\hat{\theta} + \ln \hat{v})] + \alpha F_0(\hat{v}). \end{pmatrix} \quad (3.4.21)$$

El comportamiento del campo vectorial $f(x)$ del sistema (3.4.16) se describe en lo sucesivo para mostrar el comportamiento oscilatorio del sistema.

3.5. Dos casos de estudio

Nuestra propuesta es un sistema acerca del fenómeno sísmico. De hecho, lo concebimos como una representación de terremotos en la corteza terrestre incluyendo fuerzas de fricción y esfuerzo en rocas de granito. Por lo tanto, considerando el modelo (3.4.16) o (3.4.19), podemos aproximar el mecanismo de terremotos por dos alternativas exclusivas para capturar cuando la dinámica es gobernada por (i) campos vectoriales continuos o (ii) campos vectoriales de estructura variable; i.e., conmutado (*switched*) en su dominio.

Estos dos casos son discutidos como sigue:

Caso 1: Continuo. Consideramos todos los efectos de fricción expuestos anteriormente, pero sin considerar el cambio de signo por la dirección del desplazamiento relativo. Se relaja el supuesto de que el campo vectorial captura el comportamiento relacionado con la diferenciabilidad no continua. En términos de sistemas primero investigamos solamente el efecto de la ley de Dieterich-Ruina manteniéndose en la dirección de las fuerzas de fricción. El *caso 1* se estudiará en el Capítulo 4.

Caso 2: estructura variable. En este caso suponemos que las fuerzas actuando sobre el sistema dinámico (3.4.16) son afectadas por la función signo (3.3.3); es decir, la suma de las fuerzas de fricción y esfuerzo en rocas de granito está dada por la ecuación (3.3.10). En este caso investigamos los efectos de cambios en la dirección de las fuerzas de fricción en la dinámica del sistema. Este caso se estudiará en el Capítulo 6.

Para ambos casos, el comportamiento dinámico del sistema (3.4.16) es explorado para los casos homogéneo, $\tau_1(\hat{t}) = 0$, y forzado $\tau_2(\hat{t}) = \sin(\omega\hat{t})$. El estudio de estos casos va dirigido hacia la discusión sobre la complejidad de los efectos de fricción en los terremotos.

Capítulo 4

Análisis del Sistema para un Caso Continuo

Generalmente, el análisis del comportamiento de sistemas no lineales es, al inicio, un análisis dinámico local en el sentido del espacio de estados del sistema (3.4.16), i. e., variables del sistema: velocidad, desplazamiento y contacto con asperezas. Tal análisis local nos permite enfocar la discusión, como un primer paso, a simplificar el sistema mientras que sus propiedades cualitativas se preserven. El comportamiento del sistema es primeramente analizado para el caso homogéneo (en ausencia de perturbaciones externas o vibraciones provenientes de fallas vecinas), $\tau_1(\hat{t})=0$ para todo t y después bajo condiciones de forzamiento $\tau_2(\hat{t}) = \sin(\omega\hat{t})$ para todo t para mostrar el comportamiento complejo, específicamente el comportamiento oscilatorio.

4.1. Sistema continuo homogéneo

Suponemos que la suma de las fuerzas de fricción está dada por

$$F(\hat{v}, \theta) = F_{dr}(\hat{v}, \theta) + \alpha_1 + \alpha_2 e^{-\mu\hat{v}} + \alpha_3 \hat{v}. \quad (4.1.1)$$

es decir, suponemos que (3.4.21) es continuamente diferenciable. Consideramos además $\tau_1(\hat{t}) = 0$ para todo t .

4.1.1. Existencia y Unicidad de las soluciones

Por lo anterior, $f : U \rightarrow R^3$ es una función suave de clase C^1 en un conjunto $U \subset R^3$. El campo vectorial $f(x)$ genera un flujo $\Phi_t : U \rightarrow R^n$, donde $\Phi_t = \Phi(x, t)$ es una función suave definida para toda $x \in U$ y $t \in I = (a, b) \subseteq R$. Φ_t es solución de $\dot{x} = f(x)$ en el sentido de que satisface la ecuación (3.4.16). Entonces, los siguientes resultados se cumplen para el sistema $\dot{x} = f(x)$, por el teorema de existencia y unicidad de Guckenheimer y Holmes [95]:

Theorem 4.1.1. *Sean $U \subset R^n$ un conjunto abierto del espacio real euclideo, $f : U \rightarrow R^n$ una función diferenciable (C^1), y un punto $x_0 \in U$. Entonces, existen un escalar real $c > 0$ y una única solución $\phi : (-c, c) \rightarrow U$ tal que ϕ satisface la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$ con condición inicial $x(0) = x_0$ y para todo $t \in (-c, c)$.*

De hecho, sólo se requiere que f sea localmente Lypchitz para la existencia y unicidad de $x(t)$, i e., $\|f(y) - f(x)\| \leq K \|x - y\|$ para alguna constante real $K < \infty$. La existencia y unicidad del punto de equilibrio x^* , perteneciente al dominio del campo vectorial (3.4.21), son necesarias para el análisis del comportamiento estable del bloque deslizante. Un punto $x = x^*$ en el espacio de estados se define como punto de equilibrio de un campo vectorial si $f(x^*) = 0$ para todo t . Por lo tanto, dado el valor del parámetro Π , encontramos que el campo vectorial (3.4.21) tiene un único punto de equilibrio cuyas componentes están en

$$x^* = (\hat{\theta}^*, \hat{u}^*, \hat{v}^*) = (0, \eta, 1), \quad (4.1.2)$$

donde la segunda componente depende del parámetro γ y de coeficientes friccionales de Stribeck como sigue:

$$\eta = (\alpha_1 + \alpha_2 e^{-\mu} + \alpha_3) / \gamma^2. \quad (4.1.3)$$

Note que η es una función biyectiva de γ implicando que no existe multiplicidad. La segunda componente, $\hat{u}^* = \eta$, corresponde a la posición relativa del bloque deslizante. Esto significa que $x^* \rightarrow (0, 0, 1)$ cuando $\gamma \rightarrow \infty$.

4.1.2. Análisis de estabilidad

La estabilidad de x^* se analiza con el método indirecto de Lyapunov establecido en el siguiente teorema [96]:

Theorem 4.1.2. *Sea x^* un punto de equilibrio en el sistema no lineal $\dot{x} = f(x)$, donde $f : D \rightarrow R^n$, con $D \subset R^n$, es continuamente diferenciable y D es un entorno de x^* . Denotamos la matriz Jacobiana como $D_f^* = (\partial f_i(x)/\partial x_j) |_{x^*}$, con $i, j = 1, 2, 3$, y sea λ_i los valores propios de D_f^* . Se sigue que el punto de equilibrio x^* es localmente asintóticamente estable si la parte real de todos los valores propios es negativa, i.e., $Re(\lambda_i) < 0$, y, por el contrario, es inestable si $Re(\lambda_i) \geq 0$ para uno o más valores propios de D_f^* .*

Ahora, definiendo un cambio de variable $y = x - x^*$, el sistema (3.4.16) es aproximado por

$$\dot{y} = D_f(x^*)y \quad (4.1.4)$$

en la vecindad de x^* , por la aproximación de Taylor. Para la forma específica del campo vectorial dado por la Ecuación (4.1.4), la matriz jacobiana se convierte en

$$D_f = \begin{pmatrix} -\hat{v} & 0 & -\hat{\theta} - (1 + \varepsilon)(1 + \ln \hat{v}) \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\gamma^2}{\xi} & -\gamma^2 & -\frac{\gamma^2}{\xi} \frac{1}{\hat{v}} + \alpha \frac{\partial F_0(\hat{v})}{\partial \hat{v}} \end{pmatrix} \quad (4.1.5)$$

donde $\alpha \partial F_0(\hat{v})/\partial \hat{v} = -\alpha_2 \mu e^{-\mu \hat{v}} + \alpha_3$; y $\alpha \partial F_0(\hat{v})/\partial \hat{v} |_{x^*} = -\phi$; con $\phi = \alpha_2 \mu e^{-\mu} - \alpha_3$.

Evaluando en el punto de equilibrio $x^* = (\hat{\theta}^*, \hat{u}^*, \hat{v}^*) = (0, \eta, 1)$, D_f toma la forma

$$D_f^* = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -(1 + \varepsilon) \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\gamma^2}{\xi} & -\gamma^2 & -\frac{\gamma^2}{\xi} - \phi \end{pmatrix} \quad (4.1.6)$$

El polinomio característico de (4.1.6) es

$$P(\lambda) = a_0 \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 \quad (4.1.7)$$

cuyos los coeficientes

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1 + \gamma^2/\xi + \phi, \quad a_2 = \gamma^2(1 - \varepsilon/\xi) + \phi, \quad a_3 = \gamma^2, \quad (4.1.8)$$

están expresados en términos de parámetros sísmicos Π , y de coeficientes friccionales α y μ .

Note que $a_1 = -\text{traza}(D_f^*)$, $a_3 = -\det(D_f^*)$. Suponemos que el sistema (4.1.4) es naturalmente disipativo, i.e., $\text{traza}(D_f^*) = \sum \lambda_i < 0$. Por consiguiente, por definición,

$\xi = kL/A > 0$ y $\gamma^2 = (k/M)(L/v_0)^2 > 0$, entonces $1 + \gamma^2/\xi = (Mv_0^2 + LA)/Mv_0^2 > 0$, además, $\phi = \alpha_2\mu e^{-\mu} - \alpha_3 = (L\beta_2/Mv_0^2)\mu e^{-\mu} - L\beta_3/Mv_0^2$. En consecuencia, $1 + \gamma^2/\xi + \phi = (Mv_0^2 + LA)/Mv_0^2 + (L\beta_2/Mv_0^2)\mu e^{-\mu} - L\beta_3/Mv_0^2 \Rightarrow \text{traza}(D_f^*) = -(1 + \gamma^2/\xi + \phi) < 0$ if $L(A + \beta_2\mu e^{-\mu} - \beta_3) + Mv_0^2 > 0$; como una consecuencia, el sistema es disipativo en la vecindad de x^* en el sentido de que la suma de todos los valores propios es estrictamente negativa cuando se satisface la condición

$$L(A + \beta_2\mu e^{-\mu}) + Mv_0^2 > \beta_3L. \quad (4.1.9)$$

La condición (4.1.9) puede ser interpretada como necesaria para que el sistema sea sub-amortiguado y entonces se puedan observar las oscilaciones.

Complementariamente, $\det(D_f^*) = -\gamma^2 = -(k/M)(L/v_0)^2 < 0$. Como una consecuencia de que la $\text{traza}(D_f^*) < 0$ y el $\det(D_f^*) < 0$, x^* es disipativo e hiperbólico si $Mv_0^2 + LA + L\beta_2\mu e^{-\mu} > \beta_3L$. La interpretación física es como sigue Como (i) el valor del parámetro de decaimiento μ para superficies con lubricación mixta está dentro del intervalo $1 < \mu < 5$ (vea referencias desde [43,44]), (ii) α_2, α_3 son constantes cuya magnitud adimensional es del orden de 10^{-2} ; de donde $|\phi| < 1$ implicando que $\phi < 1 + \gamma^2/\xi$. Más aún, debe notarse que el modelo analizado permite determinar propiedades matemáticas en términos de coeficientes de fricción como los involucrados en los términos de fricción de Stribeck, i. e., de sistemas mecánicos.

4.1.3. Análisis de Valores propios

La dinámica del sistema linealizado (4.1.4) está caracterizada por el conjunto de valores propios $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} \in \mathbf{C}$. Analizamos la estabilidad de x^* en sentido de Lyapunov. Note que x^* es inestable si al menos uno de los valores propios de la matriz jacobiana (4.1.6) tiene parte real positiva, $Re\{\lambda_k\} > 0$. Para determinar cuántos valores propios de D_f^* , dado por las raíces del polinomio (4.1.7), son reales usamos la regla de los signos de Descartes. Esta regla nos dice que el número de raíces reales positivas es como máximo el número de veces que hay cambio de signo en sus coeficientes. Los signos de los coeficientes del polinomio característico (4.1.7) bajo la condición de disipatividad (4.1.9), son

$$(+, +, \text{sign}(a_2), +). \quad (4.1.10)$$

Si $sign(a_2) > 0$ existen dos posibilidades sobre los valores propios de D_f^* : todos los valores propios son reales negativos, i. e., $Re\{\lambda_i\} < 0, Im\{\lambda_i\} = 0$ o un valor propio es real negativo y los otros dos son complejos conjugados con parte real positiva; i. e., $Re\{\lambda_k\} > 0, Im\{\lambda_k\} \neq 0$; esta última posibilidad corresponde al comportamiento oscilatorio donde el sistema es inestable. De la ecuación (4.1.8) y del hecho $sign(a_2) > 0$, i. e., $\gamma^2(1 - \varepsilon/\xi) + \phi > 0$ deducimos que

$$\varepsilon < \xi\psi \quad \psi = 1 + \phi/\gamma^2, \quad (4.1.11)$$

es una condición necesaria para estabilidad local y asintótica.

Por otro lado, si $sign(a_2) < 0$, existen dos valores propios reales positivos, i.e., $Re\{\lambda_k\} > 0, Im\{\lambda_k\} = 0$ y uno real negativo; para este caso no hay valores propios complejos conjugados, por lo que no se observará comportamiento oscilatorio. Para todos los casos siempre un valor propio es real negativo, $Re\{\lambda_i\} < 0, Im\{\lambda_i\} = 0$, y los otros dos pueden ser complejos conjugados, $Re\{\lambda_k\} > 0, Im\{\lambda_k\} \neq 0$, o reales positivos, $Re\{\lambda_k\} > 0, Im\{\lambda_k\} = 0$.

Estamos interesados en analizar la estabilidad para el caso $\varepsilon > 0$, lo cual significa que la caída de esfuerzo es positiva, $B - A > 0$. Como $\xi > 0$ las condiciones de estabilidad para x^* son tales que $\psi > 0 \Rightarrow \gamma^2 > -\phi$. Es necesario que $kL + \beta_2\mu e^{-\mu} > \beta_3$. En resumen, una condición necesaria para que x^* sea local y asintóticamente estable es que $\varepsilon < \xi\psi$, y al contrario, es inestable si no se cumple esta condición.

La Figura 4.1 muestra el *locus* de la parte real de dos valores propios correspondiente al comportamiento oscilatorio (antes de la ramificación) y del comportamiento no oscilatorio (dos reales positivos), donde se describe la relación entre los parámetros Π . La gráfica del valor propio real negativo se omite porque nos enfocamos en el comportamiento oscilatorio (eigenvalores complejos conjugados) para el caso inestable. El comportamiento oscilatorio está localizado antes de la ramificación, después de la cual, el sistema deja de oscilar. Para $\xi = \{0.4, 0.8, 1\}$ las Figuras 4.1(a) y (b) muestran el comportamiento del sistema para $\gamma = 0.8$ y $\gamma = 10$, respectivamente. El rango de oscilación para ε decrece con el incremento de γ y con el decrecimiento de ξ .

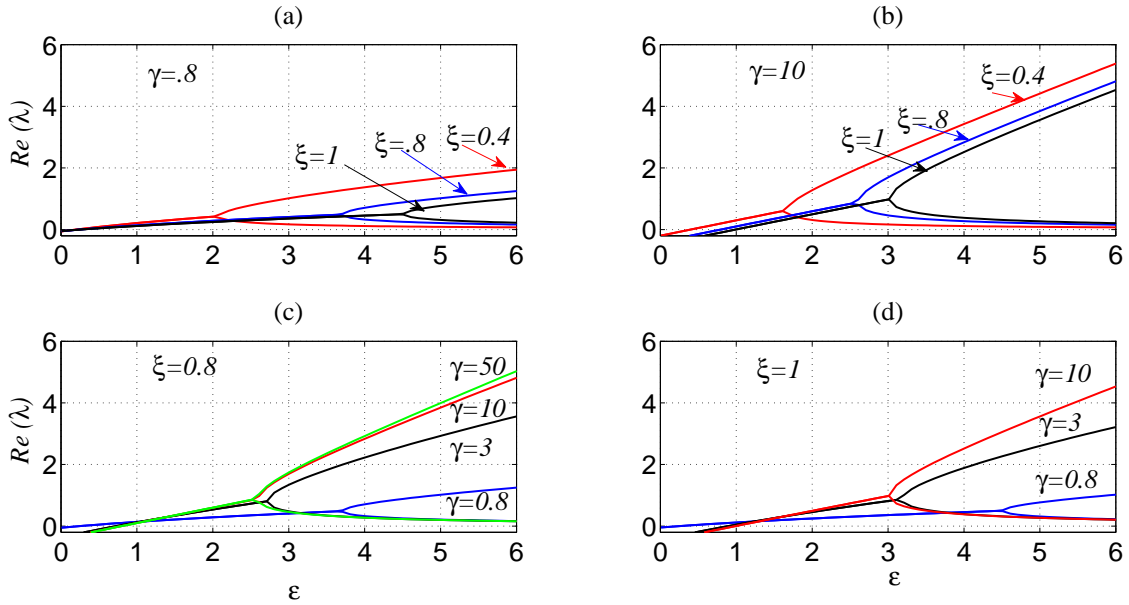


Figura 4.1: Locus of eigenvalores para diferentes valores de ξ y γ . La gráfica muestra la parte real de los valores propios como una función de los parámetros ε , ξ and γ . Para (a) y (b) fijando $\gamma=0.8, 10$, respectivamente; (c) y (d) muestran los valores propios para valores fijos $\xi=0.8, 1$, respectivamente.

Las Figuras 4.1(c) y 4.1(d) describen el mismo comportamiento, y se observa que para valores de $\gamma > 10$ el rango de ε para el comportamiento oscilatorio es casi igual, aunque después del punto de ramificación con el incremento de γ , la parte real de uno de los valores propios se incrementa más rápidamente, esto implica que el sistema es más elástico; la parte real del otro valor propio tiende a cero.

La Figura 4.2(a) muestra la evolución de las variables de estado para un conjunto de parámetros $\Pi=(0.8, 1, 10)$ donde el punto de equilibrio es asintóticamente estable, esto significa que el bloque deslizante oscila y después se estabiliza en $x^* = (0, \eta, 1)$, con η definida en (4.1.3) la cual representa la posición relativa del bloque, su velocidad es la velocidad de la placa móvil, que se mueve en la superficie en ausencia de contacto con asperezas; el retrato de fase (Figure 4.2(b)) muestra que el sistema (4.1.4) converge a un punto haciendo una espiral hacia adentro; por otro lado, para el conjunto $\Pi=(0.25, 0.8, 0.8)$, la matriz jacobiana D_f^* tiene dos de sus valores propios con parte

real nula, tal que el punto de equilibrio es inestable, los valores de las variables oscilan alrededor de los valores que toma el punto de equilibrio x^* (Figures 4.2(c) and (d)). Resumiendo, el punto de equilibrio $x^* = (0, \eta, 1)$, podría ser un sumidero (*sink*) o un

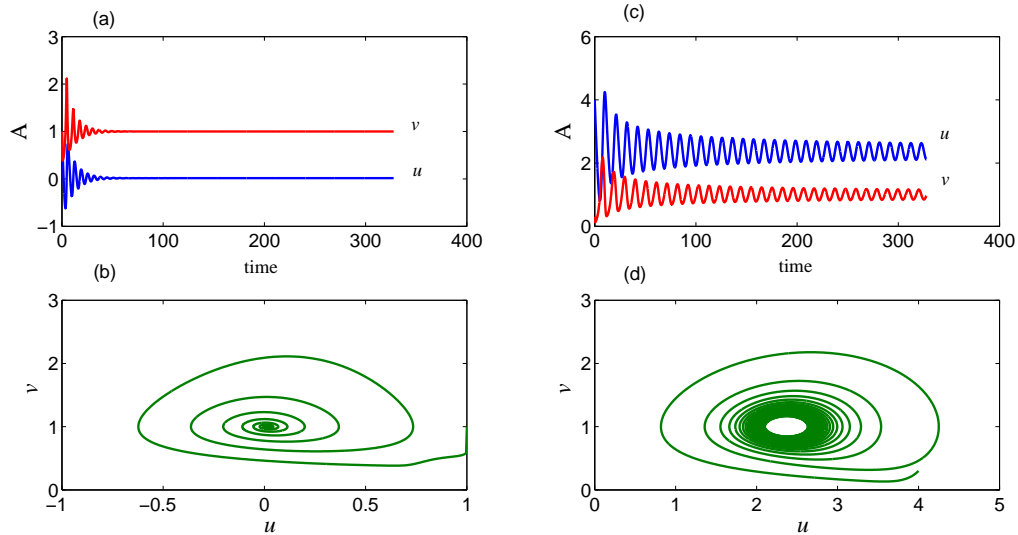


Figura 4.2: Soluciones estacionarias del sistema (3.4.16). (a) $\Pi=(0.8,1,10)$, y se cumple la condición necesaria $\bar{\sigma}_c^*=1.2491$. Después de una región transitoria en la cual el bloque oscila, su velocidad permanece a tasa constante $\hat{v} = 1$ y se mueve junto con la placa móvil, su posición relativa \hat{u} es $\eta=0.0151$ y la medida de contacto con asperezas $\hat{\theta}$ es cero. El punto de equilibrio es local y asintóticamente estable. (b) El retrato de fase (\hat{u}, \hat{v}) muestra un espiral hacia adentro, y la convergencia a un punto $x^* = (0, \eta, 1)$. Soluciones periódicas del sistema se muestran en (c) donde $\Pi=(0.25,0.8,0.8)$, después de que el bloque pasa una región transitoria en la cual la amplitud de la señal varía, su velocidad oscila alrededor de $\hat{v} = 1$, su posición relativa u alrededor de $\eta=2.3593$ y la medida de contacto con asperezas $\hat{\theta}$ alrededor de cero; (c) el retrato de fase muestra la convergencia a una órbita periódica. El equilibrio es inestable aunque se cumple la condición $\bar{\sigma}_c^*=2.84$.

punto silla (*saddle point*) de acuerdo con la definición de Perko (2001) [97]

Definition 4.1.1. *Un punto de equilibrio x^* de (3.4.16) es llamado sumidero (*sink*) si todos los valores propios del jacobiano de la transformación, i. e., la matriz $D_f(x^*)$, tienen parte real negativa; es llamado una fuente (*source*) si todos sus valores propios tienen parte real positiva; es llamado punto silla (*saddle point*) si es un punto de equilibrio hiperbólico en el sentido de que $D_f(x^*)$ tiene al menos un valor propio con*

parte real negativa y al menos un valor propio con parte real positiva, pero no tiene eigenvalores con parte real cero.

En concordancia con resultados previos, considerando que ε_{BH} es el valor de ε en la bifurcación de Hopf (donde los valores propios tienen parte real cero), $x^* = (0, \eta, 1)$ es un sumidero para valores de $\varepsilon < \varepsilon_{HB}$, y es un punto silla (punto de equilibrio hiperbólico) para valores de $\varepsilon > \varepsilon_{HB}$.

Nosotros estamos interesados en el tipo de punto silla que es estable en uno de sus componentes; i.e., $Re\{\lambda_k\} < 0, Im\{\lambda_k\} = 0$, pero inestable u oscilatorio en los otros dos, i.e., $Re\{\lambda_k\} > 0, Im\{\lambda_k\} \neq 0$ [98], debido a que encontramos un conjunto de parámetros dentro del rango oscilatoria (RO) (inestable en sentido de Lyapunov) que satisfacen la condición necesaria (4.1.11) para estabilidad, esta región está cerca de la bifurcación de Hopf y la hemos propuesto como la región de oscilaciones auto-sostenidas (ROA). La ROA está dentro de la región inestable. Esta región será explorada analítica y numéricamente en las siguientes secciones .

4.1.4. Bifurcación de Hopf, Rango Oscilatorio y Región de oscilaciones autosostenidas

La presencia de oscilaciones en sistemas físicos puede ser explicada a través del mecanismo de bifurcación de Hopf (BH). Cuando existen tres valores propios, dos de los cuales son complejos conjugados con parte real cero, y el otro es un número real diferente de cero, ocurre una BH si la parte real de los valores propios complejos cruzan el eje imaginario (Figura 4.3e) dando origen o destruyendo órbitas periódicas o ciclos límite en la vecindad de la BH. Si todas las trayectorias vecinas se acercan al ciclo límite entonces decimos que el ciclo límite es estable o atractor.

Los ciclos límite estables son importantes científicamente porque modelan sistemas que exhiben oscilaciones autosostenidas, i. e., esos sistemas oscilan aún en ausencia de fuerzas externas periódicas [82]. Analizaremos el comportamiento oscilatorio en el entorno de la bifurcación de Hopf. La matriz jacobiana (4.1.6) tiene dos valores propios complejos conjugados con parte real positiva para valores de ε que dependen de los valores fijos de γ y ξ ; esos valores propios corresponden a la región oscilatoria, esto se despliega

en la Figura 4.1.

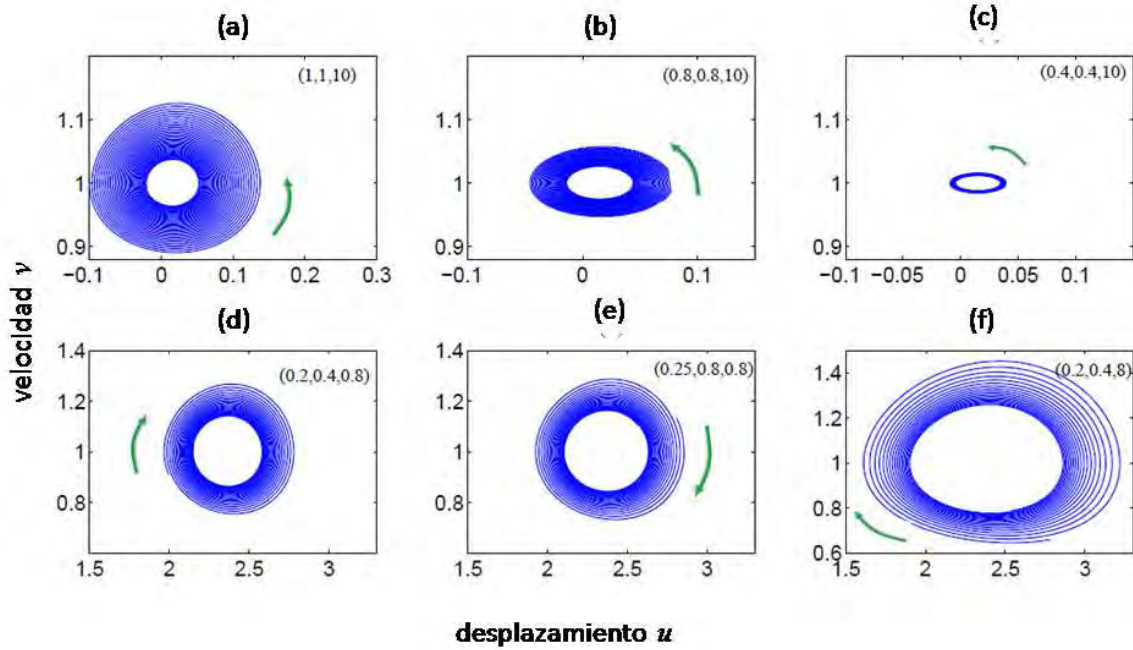


Figura 4.3: Bifurcación de Hopf para el sistema homogéneo. Proyección del espacio de fases sobre el plano (\hat{u}, \hat{v}) . (a), (b) y (c) tienen la posición del punto de equilibrio $\hat{u}^* = \eta$ cerca de cero para $\gamma = 10$, ξ y el rango de \hat{u} decrecen; (d), (e) y (f), para $\gamma = 0.8$ tienen \hat{u}^* y el rango de valores de \hat{u} más grande que el observado en (a)-(c). La dirección de las trayectorias en todos los casos es hacia el punto de equilibrio: espiral hacia adentro.

El rango de valores de Π donde el comportamiento del sistema es oscilatorio e inestable localmente en sentido de Lyapunov (RO) se calcula fijando los valores de ξ y γ y determinando el valor de ε para el cual dos valores propios son complejos conjugados con parte real cero; i. e., $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{a_2(\Pi)}$, es decir, el punto de bifurcación de Hopf; a través de las ecuaciones (4.1.7), (4.1.8) y (2.2.19), determinamos el valor de ε_{BH} , donde $\Pi_0 = (\varepsilon_{BH}, \xi_0, \gamma_0)$:

$$\varepsilon_{BH} = \xi \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{\gamma^2}{\xi} + \phi} + \frac{\phi}{\gamma^2} \right]. \quad (4.1.12)$$

ε_{BH} es el límite inferior del rango oscilatorio (RO), el límite superior es determinado por el siguiente lema:

Lemma 4.1.1. *Sea $a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$ un polinomio de tercer orden. Su discriminante está dado por la siguiente ecuación:*

$$D = \left(\frac{3a_2 - a_1^2}{9} \right)^3 + \left(\frac{9a_1a_2 - 27a_3 - 2a_1^3}{54} \right)^2, \quad (4.1.13)$$

Si $D > 0$ existen dos raíces complejas conjugadas y una real, si $D = 0$ tres reales, dos de las cuales son iguales; y si $D < 0$ tres reales y diferentes.

Nos interesa el caso donde $D = 0$, indicando que el comportamiento oscilatorio termina (no hay raíces complejas conjugadas).

De las ecuaciones (4.1.7) y (4.1.8)

$$D = \left[\frac{3 \left(\gamma^2 - \frac{\gamma^2 \varepsilon_{D=0}}{\xi} + \phi \right) - \left(1 + \frac{\gamma^2}{\xi} + \phi \right)^2}{9} \right]^3 + \left[\frac{9 \left(1 + \frac{\gamma^2}{\xi} + \phi \right) \left(\gamma^2 - \frac{\gamma^2 \varepsilon_{D=0}}{\xi} + \phi \right) - 27\gamma^2 - 2 \left(1 + \frac{\gamma^2}{\xi} + \phi \right)^3}{54} \right]^2 = 0.$$

Resolvemos la ecuación anterior tomando el valor real positivo como solución. El rango oscilatorio (RO) está en el intervalo

$$RO \in (\varepsilon_{BH}, \varepsilon_{D=0}). \quad (4.1.14)$$

De las ecuaciones (4.1.8), (2.2.20), y (2.2.21), los valores propios en Π_0 , están dados por

$$\lambda_{1,2}(\Pi_0) = \pm i \sqrt{\gamma_0^2 - \frac{\gamma_0^2 \varepsilon_{BH}}{\xi_0} + \phi}, \quad \lambda_3(\Pi_0) = -\frac{\gamma_0^2}{\gamma_0^2 - \frac{\gamma_0^2 \varepsilon_{BH}}{\xi_0} + \phi}. \quad (4.1.15)$$

Dentro de RO , la condición necesaria (4.1.11) para estabilidad local y asintótica se cumple para un conjunto de parámetros Π , la región con estas características es la que proponemos como región de oscilaciones autosostenidas (ROA), el sistema no es estable pero al menos satisface la condición necesaria (4.1.11). El intervalo para la ROA está determinado por

$$ROA \in (\varepsilon_{BH}, \xi_0 \psi_0), \quad \psi_0 = 1 + \frac{\phi}{\gamma_0^2}. \quad (4.1.16)$$

γ	ξ	ε_{BH}	$\pm(\lambda_{1,2})_{BH}$	$\varepsilon_{D=0}$	$SSO \in (\varepsilon_{BH}, \xi_0\psi_0)$	$r'_\varepsilon(\Pi_0)$
0.8	0.4	0.1981	0.5030i	2.08177	(0.1981,0.3562)	0.3042
	0.8	0.2499	0.6083i	3.70457	(0.2499,0.7123)	0.2058
	1.0	0.2534	0.6385i	4.50730	(0.2534,0.8904)	0.1749
10	0.4	0.3981	0.6313i	1.66857	(0.3981,0.3997)	0.4981
	0.8	0.7931	0.8911i	2.60124	(0.7931,0.7994)	0.4963
	1.0	0.9894	0.9954i	3.01838	(0.9894,0.9993)	0.4953

Tabla 4.1: Relación entre parámetros Π en el rango oscilatorio de las Figuras 4.1 (a) y (b). ε_{BH} : valor de la bifurcación de Hopf; $(\pm\lambda_{1,2})_{BH}$: eigenvalores en el eje imaginario; $\varepsilon_{D=0}$: límite superior del rango oscilatorio; SSO es el intervalo de oscilaciones autosostenidas, y $r'(\Pi_0)$ es la velocidad de cruce de los valores propios.

Algunos resultados se resumen en la Tabla 4.1. Algunos comentarios y deducciones derivados de los razonamientos anteriores se presentan a continuación. La condición (4.1.11) es necesaria para estabilidad local y asintótica, pero no es suficiente. Una

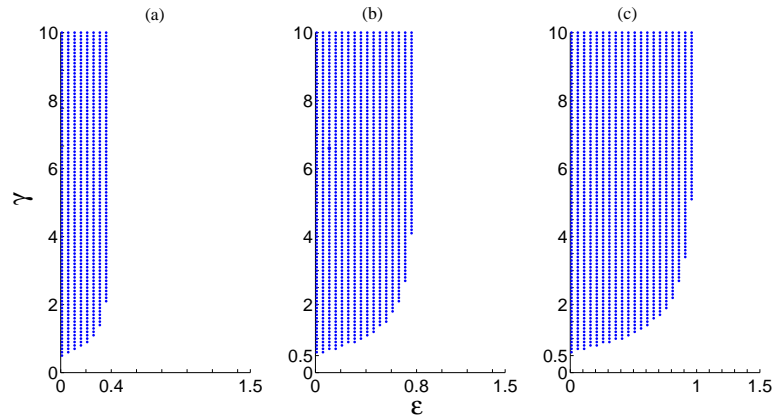


Figura 4.4: Regiones de estabilidad local y asintótica, como función de $\Pi = (\varepsilon, \xi, \gamma)$ ara valores fijos de ξ . (a) $\xi=0.4$, (b) $\xi=0.8$, y (c) $\xi=1$. Se cumple la condición suficiente $\varepsilon < \varepsilon_{BH}$.

condición suficiente para estabilidad local y asintótica se obtiene de la ecuación (4.1.12), i.e., es suficiente que

$$\varepsilon < \varepsilon_{BH}. \tag{4.1.17}$$

La ecuación (4.1.17) es equivalente al criterio de Routh-Hurwitz. Para la región que cumple con esta condición suficiente, todos los valores propios de la matriz jacobiana

(4.1.6) tienen parte real negativa y el punto de equilibrio es un sumidero (*sink*) [97]. La relación entre los parámetros Π asociados con la condición suficiente (4.1.17) está descrita en las Figuras 4.4 (a), (b) y (c), para los valores fijos $\xi = \{0.4, 0.8, 1\}$ respectivamente. Existe un pequeño intervalo de valores ε para la región de estabilidad restringida por ξ . Los resultados numéricos muestran estabilidad solamente para valores de $\gamma > 0.5$.

En el sentido de Lyapunov, la estabilidad local del punto de equilibrio, $x^* = (0, \eta, 1)$, puede ser extrapolada en el sentido de la estabilidad friccional en terremotos. Scholz (2002) [3] determina la estabilidad/inestabilidad friccional con un valor crítico mediante una bifurcación de Hopf:

$$\bar{\sigma}_c = \frac{-kL}{a-b} \quad (4.1.18)$$

el cual depende de las propiedades de las rocas en el entorno de la falla, el punto de nucleación del terremoto y de parámetros friccionales: $a - b$, k , y L . El valor crítico, $\bar{\sigma}_c$ (4.1.18), corresponde al esfuerzo normal efectivo (esfuerzo normal menos presión de poro), y es derivado de la bifurcación de Hopf bajo un modelo de bloque deslizante con un grado de libertad acoplado con la ley de fricción de Dieterich-Ruina, en el medio elástico.

Cuando cualquier esfuerzo normal $\bar{\sigma}$ cumple $\bar{\sigma} \geq \bar{\sigma}_c$, entonces ocurren cambios en las propiedades friccionales tal que, estos cambios causan los terremotos; este fenómeno es llamado inestabilidad friccional.

De acuerdo con Scholz [3, 47], existen tres regímenes de estabilidad: estable, condicionalmente estable, e inestable (con respecto al concepto de inestabilidad friccional, i. e., en sentido de Scholz).

Si $\bar{\sigma} > \bar{\sigma}_c$, el sistema es inestable con respecto al desvanecimiento de la perturbación de velocidad, ΔV , es decir, con respecto a la carga cuasiestática. Este es el campo inestable. Si $\bar{\sigma} < \bar{\sigma}_c$ entonces el régimen es estable pero cerca de la bifurcación de Hopf se requiere de un salto finito en la velocidad para convertirse en inestable.

Por consiguiente, los terremotos pueden nuclearse solamente en el campo inestable, pero pueden propagarse dentro del campo condicionalmente estable. En la frontera de

la transición de estabilidad existe una región en la cual ocurre movimiento oscilatorio autosostenido (dentro de la región condicionalmente estable).

Los tres regímenes de estabilidad tienen las siguientes consecuencias para terremotos. Los terremotos pueden nuclearse solamente en aquellas regiones que están dentro del régimen inestable. Pueden propagarse indefinidamente dentro de la región condicionalmente estable, siempre que sus esfuerzos dinámicos produzcan un salto lo suficientemente grande en la velocidad. Si los terremotos se propagan dentro de una región estable, por otro lado, se producirá una caída de esfuerzo negativa, lo que resultará en un sumidero de energía de gran tamaño que rápidamente frenará la propagación del terremoto. Por otro lado, existe una clase de desplazamientos asísmicos llamados terremotos lentos, esos movimientos están dentro de la región de oscilaciones autosostenidas (más detalles en Scholz [3, 47]).

Las fallas en el campo inestable están caracterizadas por infrecuentes terremotos grandes (que pueden romper la superficie) separado por largos periodos intersísmicos de calma. Por otro lado, las fallas en el régimen condicionalmente estable están caracterizadas por altas tasas de actividad de eventos pequeños (no rompen la superficie) y no de eventos grandes (terremotos que rompen todo el grosor de la capa sismogénica). Esos eventos pequeños contribuyen muy poco en la disipación total de energía. Pequeños eventos ocurren repetidamente con altas tasas de repetición en los mismos lugares, los cuales pueden marcar pequeñas irregularidades geométricas donde el esfuerzo normal es más alto, causando una transición al campo inestable.

Inferimos que el límite superior de la ROA es decir la condición necesaria (4.1.11) que se cumple dentro de la región inestable; corresponde al límite superior del régimen que Scholz llama condicionalmente estable y que en realidad el valor crítico de Scholz (4.1.18) es equivalente a la condición necesaria para estabilidad de nuestro análisis, sin considerar el efecto Stribeck.

La condición necesaria (4.1.11) y el valor crítico de Scholz (4.1.18) están relacionadas como sigue: con $\xi = kL/A$ y $\varepsilon = B - A/A$, $\varepsilon < \xi\psi \Rightarrow 1 < -kL\psi/(A - B)$, don-

de $(A - B) = \sigma(a - b)$, esto implica que $1 < \bar{\sigma}_c \psi$. Si (4.1.11) se cumple, entonces $1 < \bar{\sigma}_c \psi$ es necesaria para estabilidad pero no suficiente, y se deriva un valor crítico complementado:

$$\bar{\sigma}_c^* = \bar{\sigma}_c \psi, \quad (4.1.19)$$

el cual combina parámetros friccionales de la ley de Dieterich-Ruina y del efecto Stribeck. Cuando $\gamma \rightarrow 10$, $\psi \rightarrow 1$ y $\bar{\sigma}_c^* \rightarrow \bar{\sigma}_c$ implicando que el valor crítico es independiente de los parámetros friccionales del efecto Stribeck.

Aunque la condición necesaria se cumpla, no podemos asegurar que no se presentarían inestabilidades friccionales. Bajo la condición necesaria de estabilidad, el sistema podría permanecer estable por un periodo corto porque la sismicidad de una falla es aperiódica y genera terremotos de diferentes magnitudes como una consecuencia de que las fallas no están aisladas, y los esfuerzos transferidos de fallas vecinas sumado a las vibraciones producidas por terremotos, hacen que el sistema se mueva cada vez de un ciclo límite a otro teniendo un patrón de recurrencia diferente [14].

En el modelo de bloque deslizante propuesto, cualquier fuerza perturbadora externa sobre el bloque puede cambiar el comportamiento dinámico del sistema; la falla entrará en un ciclo límite pero no permanecerá mucho tiempo en este debido a la intervención de perturbaciones de esfuerzo.

4.2. El sistema bajo perturbaciones externas

En esta sección exploramos numéricamente el comportamiento del sistema bajo los efectos de una fuerza externa periódica y determinística $\tau(\hat{t}) = \sin(\omega \hat{t})$ actuando sobre el sistema (3.4.16). Esta fuerza externa puede ser originada por vibraciones de fallas vecinas, tales efectos son ilustrados variando la frecuencia angular ω . El conjunto de parámetros que exploramos son $\Pi = (0.25, 0.8, 0.8)$, $\alpha = (1.4, 0.2, 0.1)$, para el sistema sub-amortiguado, y $\mu = 3$, ya que para tales valores encontramos una BH como se muestra en la Tabla 4.1. Este análisis numérico nos ayuda a visualizar patrones en la dinámica del sistema, especialmente aquellos relacionados con el comportamiento

oscilatorio en la frontera de la BH, tales como órbitas periódicas y ciclos límite.

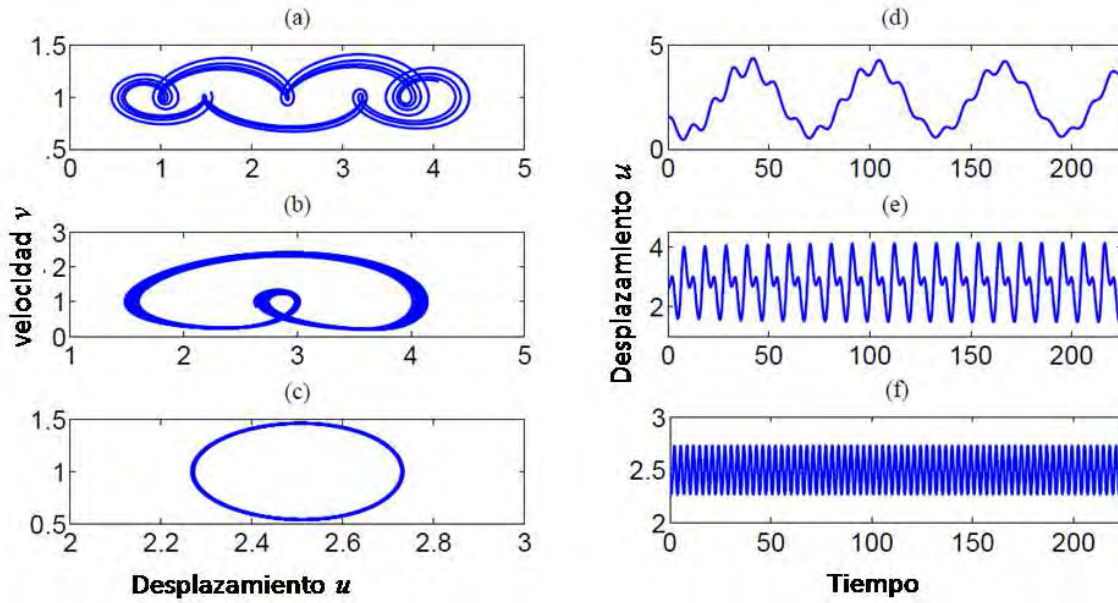


Figura 4.5: Proyección del espacio de estados sobre el plano (\hat{u}, \hat{v}) y series de tiempo del sistema perturbado (3.4.16). (a), (b) y (c) muestran las proyecciones en el plano (\hat{u}, \hat{v}) para $\omega = \{0.1, 1.2, 2\}$, respectivamente. (d), (e) y (f) despliegan sus respectivas series de tiempo para $\hat{u}(t)$.

La Figura 4.5 muestra algunos resultados numéricos de retratos de fase típicos y series de tiempo, generados por (3.4.16). La Figura 4.5 (a) muestra que para $\omega = 0.1$, una clase de comportamiento complejo para bajas frecuencias se observa. Para cualquier valor de $\omega \in [0.8, 1.3)$ se localizan órbitas de periodo dos como se representa en la Figura 4.5 (b); para frecuencias $\omega > 1.3$ las trayectorias del sistema convergen a un ciclo límite, mostrado en la Figura 4.5 (c). Por otro lado, las Figuras 4.5 (d)-(f) describen las series de tiempo de las Figuras 4.5 (a)-(c), respectivamente. Todos los casos en la Figura 4.5 mostraron un periodo inicial transitorio, durante el cual pequeñas inestabilidades introducidas por el desplazamiento inicial fueron amplificadas y entonces, debido a las no linealidades del sistema, se observa el movimiento periódico del bloque deslizando (Figura 3.1), y se enfatiza el hecho de que el campo vectorial (3.4.21) es suave.

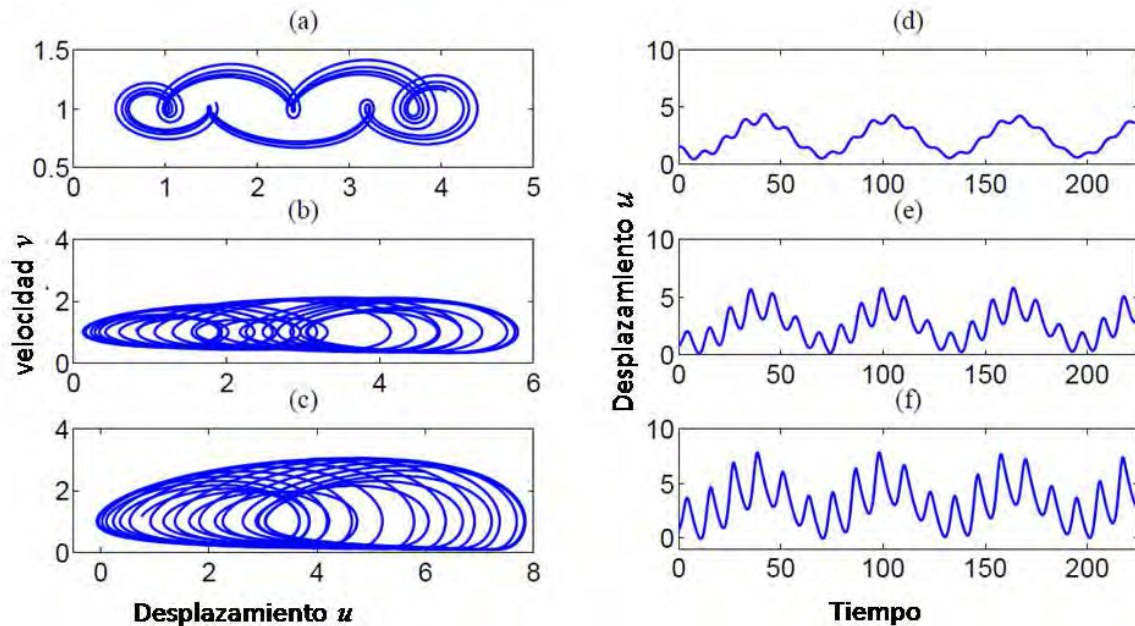


Figura 4.6: Soluciones con amortiguamiento α_3 , variable. En (a)-(c) se muestran las proyecciones del espacio de fases para $\omega=0.1$. (a) $\alpha_3 = 0.1$ sistema sub-amortiguado, (b) $\alpha_3 = 0.2$ sistema amortiguado, and (c) $\alpha_3 = 0.4$, sobre amortiguado. (d), (e), y (f) son sus respectivas series de tiempo.

Por otro lado, si el coeficiente de viscosidad se varía, i.e., α_3 , el rango de valores para \hat{u} se incrementa así como \hat{v} . El comportamiento del caso sub-amortiguado presenta comportamiento más complejo que para el caso sobre amortiguado. El comportamiento del sistema bajo diferentes valores de α_3 para el caso de $\omega = 0,1$ está descrito en la Figura 4.6.

4.2.1. Diagramas de bifurcación para el sistema perturbado

Los cambios cualitativos en la dinámica del sistema son mejor entendidos a través del análisis de bifurcación tal que cuando un parámetro de control es variado las bifurcaciones muestran las transiciones o inestabilidades del sistema. De acuerdo con resultados previos expuestos en este trabajo, consideramos el sistema forzado concentrado en $\omega=0.1$ y $\omega=1.2$, para el valor fijo $\xi=0.8$, y para dos valores de ε . Exploramos los valores de $\varepsilon = \{0.25, 1\}$, bajo el criterio del análisis previo para la bifurcación de

Hopf y la condición necesaria $\varepsilon < \xi\psi$. El valor de $\varepsilon=0.25$ cumple con esta condición necesaria y el segundo, $\varepsilon=1$ no la satisface. El parámetro de bifurcación es el relacionado con la frecuencia de oscilación del bloque deslizante, $\gamma = \sqrt{(k/M)}(L/v_0)$, este parámetro, además está relacionado con la longitud característica de desplazamiento, L , del bloque. En lo sucesivo, llamaremos el caso uno al análisis de bifurcación con el valor fijo $\varepsilon=0.25$, y caso 2 para $\varepsilon=1$; para ambos casos $\xi=0.8$ es fijo. Basamos los diagramas en el concepto del plano de Poincaré (ver Capítulo 2, preliminares matemáticos).

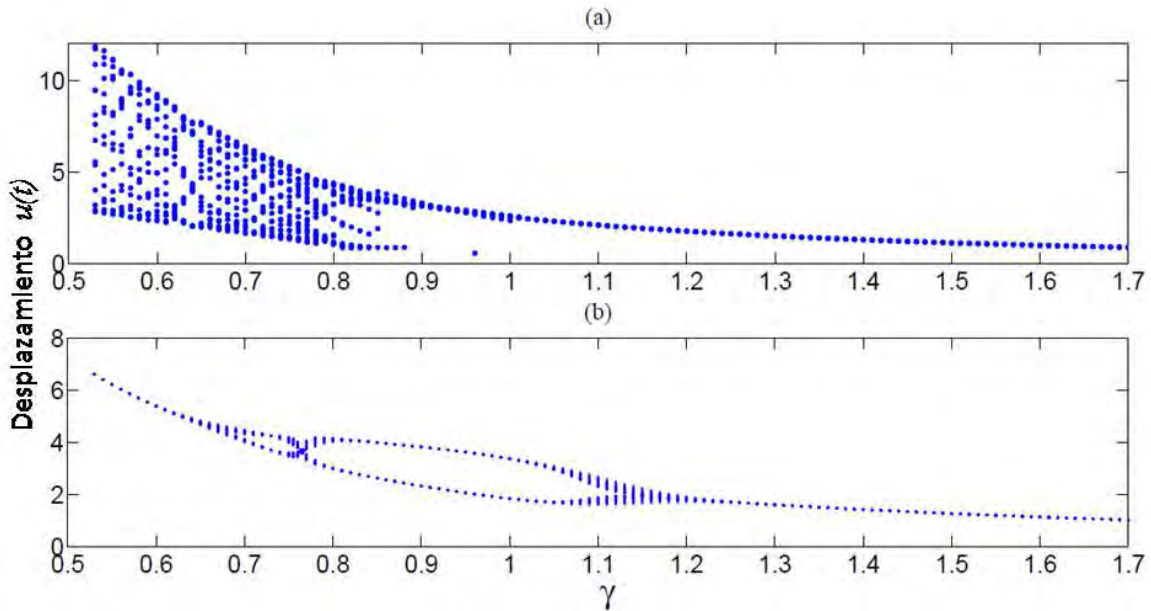


Figura 4.7: Diagrama de bifurcación. γ versus máximos locales de la serie de tiempo $\hat{u}(t)$. $\Pi=(0.25,0.8,\gamma)$, $\mu = 3$, $\alpha_1=1.4,\alpha_2=0.2$, y $\alpha_3=0.1$, sistema sub-amortiguado. Para los valores de ω : (a) $\omega=0.1$, y (b) $\omega=1.2$, para el último valor existen dos valores aproximados de γ donde se observan bifurcaciones de una órbita de periodo uno a otra de periodo dos: $\gamma=0.66$ y $\gamma=0.765$.

Un diagrama de bifurcación de las trayectorias o soluciones del sistema para el caso uno se despliega en la Figura 4.7, la cual muestra el comportamiento cualitativo del sistema, relativo a la serie de tiempo de la variable de la posición \hat{u} (máximos locales) cuando $\gamma \in (0.55, 1.7)$, y de acuerdo con resultados numéricos $\gamma > 0.5$. La Figura 4.7 (a) con $\omega=0.1$ muestra que la mayoría de las órbitas son débilmente atractivas hasta

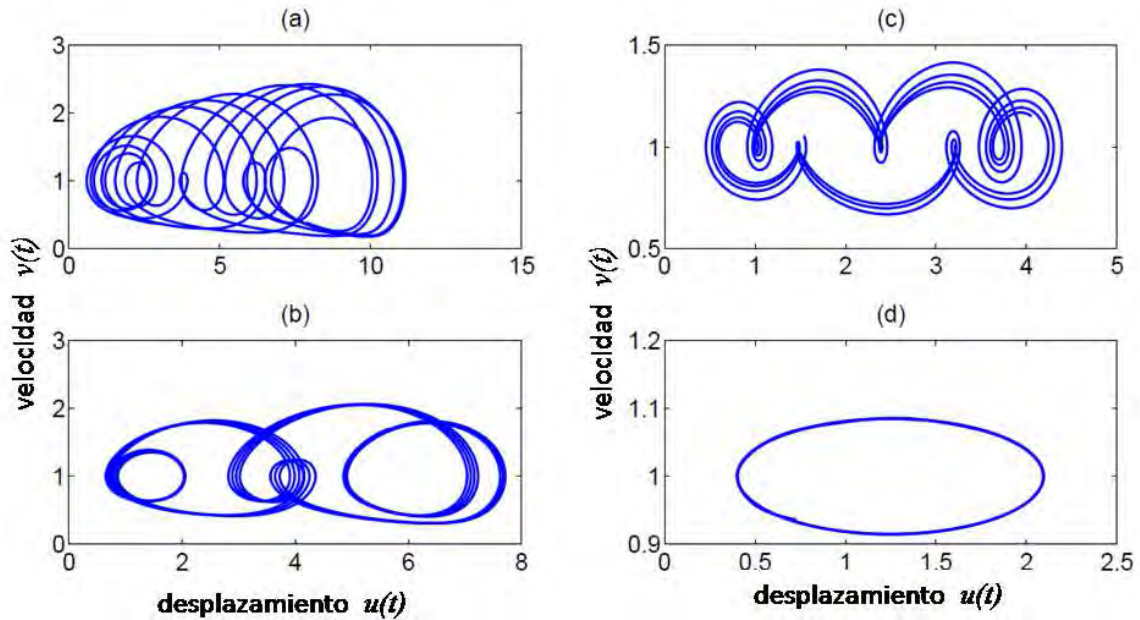


Figura 4.8: Proyecciones características del espacio de fases sobre el plano (\hat{u}, \hat{v}) para el diagrama de bifurcación correspondiente a $\omega=0.1$. Valores aproximados de γ : (a) $\gamma=0.55$, (b) $\gamma=0.64$, (c) $\gamma=0.8$, y (d) ciclo límite para $\gamma=1.1$.

aproximadamente $\gamma > 0.9$ cuando se observan ciclos límite. Para valores de $\gamma < 0.9$, existen órbitas multiperiodicas, pero finalmente las trayectorias del sistema entran en un ciclo límite estándar. En la Figura 4.8 se muestran algunas proyecciones del espacio de fases sobre el plano (\hat{u}, \hat{v}) , característicos.

Por otro lado, la Figura 4.7 (b) con $\omega=1.2$ muestra ciclos límite que son observados para valores aproximados de $\gamma \in [0.55, 0.66)$, para valores cercanos a $\gamma > 1.17$, y $\gamma = .765$; mientras que existen dos puntos de bifurcación donde se observan transiciones de órbitas de periodo uno a órbitas de periodo dos cercanos a $\gamma=0.66$ y $\gamma=0.765$. Las órbitas de periodo dos tienen la forma de la Figura 4.5 (b), y los ciclos límite toman la forma que se muestra en la Figura 4.5 (c); las órbitas parecen atractivas. En relación con la condición necesaria (4.1.11), este es un tipo de comportamiento esperado cuando $\varepsilon < \xi\psi$ se satisface.

El valor de \hat{u} decrece cuando aumenta γ para ambos $\omega=0.1$ y $\omega=1.2$. Después de que γ alcanza los valores 0.9 y 1.17, respectivamente, el sistema cae dentro de un ciclo límite

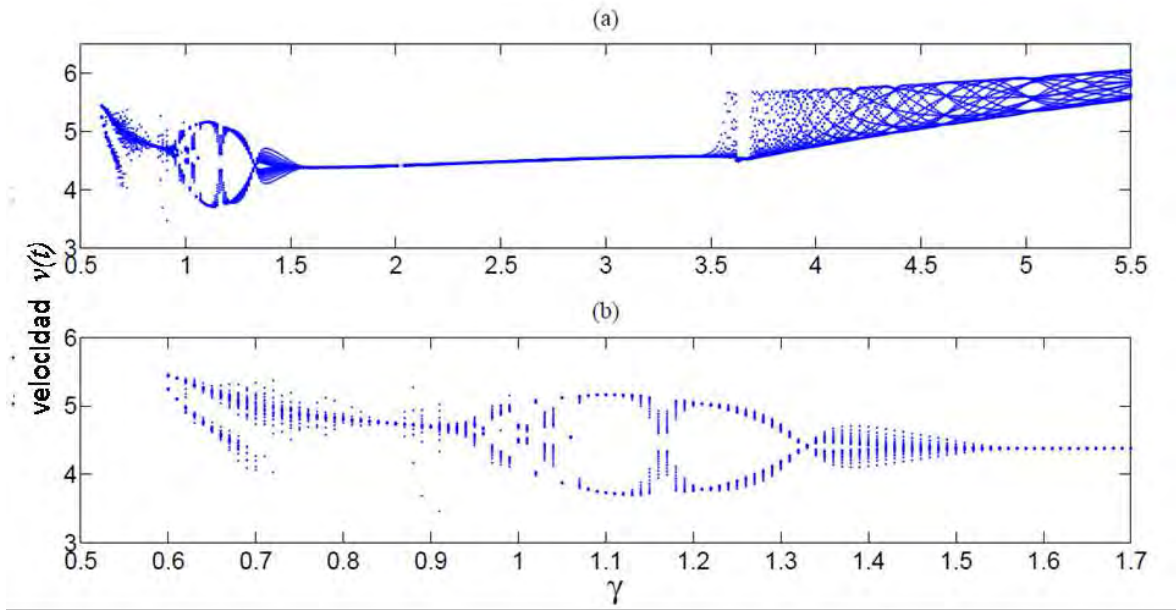


Figura 4.9: Diagrama de bifurcación de las trayectorias. γ versus máximos locales de la serie de tiempo $\hat{u}(t)$. Con $\omega=1.2$, $\Pi=(1,0.8,\gamma)$, $\mu = 3$, $\alpha=(1.4,0.2,0.1)$, sistema sub-amortiguado. (a) Se observan tres tipos de comportamiento para valores aproximados de γ : Tipo I para $\gamma \in(0.6,1.55)$, tipo II para $\gamma \in(1.55,3.2)$, y tipo III para $\gamma \in(3.2, 5.5)$. En (b) se muestra el comportamiento tipo I.

estándar.

El diagrama de bifurcación para el caso dos es desplegado en la Figura 4.9 (a) con $\omega=1.2$. La condición necesaria (4.1.11) no se satisface; $\varepsilon=1$, la dinámica del sistema es más compleja que la del caso uno, se presentan más transiciones para valores pequeños de γ , seguido de ciclos límite, y nuevamente cambia el comportamiento oscilatorio mostrando órbitas multiperiodicas. Aquí se presentan tres tipos de comportamiento, para valores aproximados del parámetro de bifurcación γ :

1. Tipo I (Figure 4.9 (b)) se observa en $\gamma \in(0.6, 1.55)$, y para el intervalo $(0.6, 0.72)$ el comportamiento es desplegado en la Figura 4.10 (a), se observan órbitas de periodo dos, después ocurre una transición a órbitas de periodo uno hasta que aparece de nuevo una bifurcación con órbitas de periodo dos (Figure 4.10 (c)) en $\gamma=0.94$, alternando con ciclos límite cuya forma es mostrada en la Figura 4.10 (b).

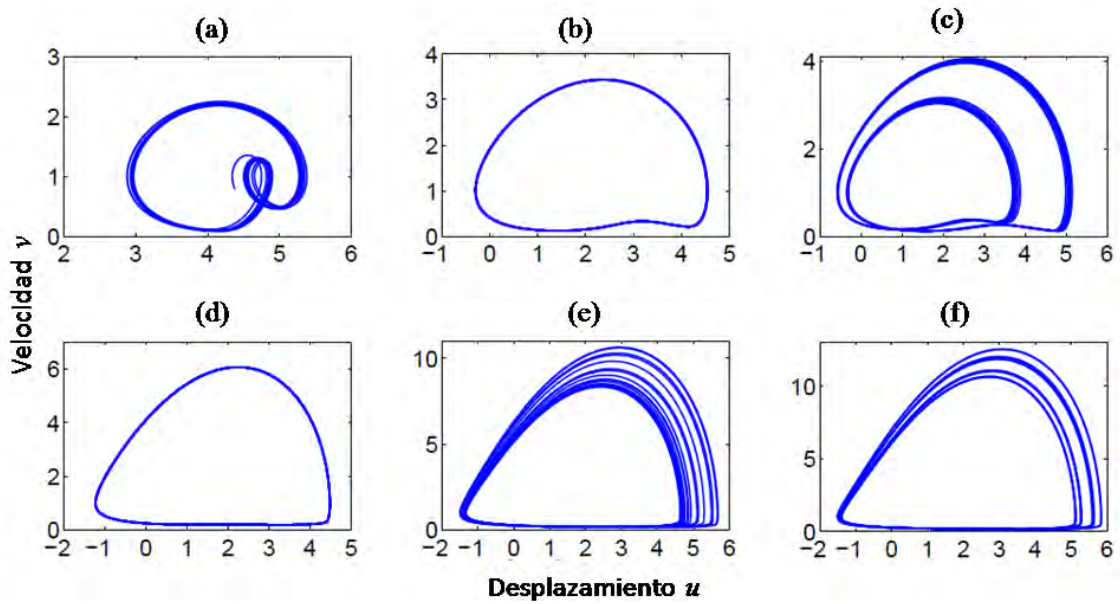


Figura 4.10: Proyecciones típicas del espacio de fases sobre el plano (\hat{u}, \hat{v}) del diagrama de bifurcación con $\omega=1.2$, $\varepsilon=1$ y $\xi=0.8$. Valores aproximados: (a) $\gamma=0.63$, (b) $\gamma=1.06$ y (c) $\gamma=1.14$, corresponden al comportamiento tipo I, (d) $\gamma=2.5$ tipo II; y (e) $\gamma=3.85$, y (f) $\gamma=4.61$, para el comportamiento tipo III.

2. Tipo II. Cuando el sistema alcanza un ciclo límite en el valor aproximado $\gamma=1.33$ ocurre otra bifurcación y de nuevo aparece un ciclo límite para un amplio rango de valores de γ . Estos ciclos límite se observan en $\gamma \in (1.55, 3.2)$ (Figure 4.10 (d)). $\hat{u}(\hat{t})$ se va incrementando con el incremento de γ .
3. Tipo III. Este comportamiento se presenta, aproximadamente para $\gamma \in (3.4, 5.5)$ con órbitas multiperiodicas y aumento del rango de valores de $\hat{u}(\hat{t})$ (Figures 4.10 (e), (f)).

Diagrama de bifurcación para sistema No perturbado

En ausencia de fuerzas externas, la gráfica de la Figura 4.11 muestra que el sistema oscila formando órbitas multiperiodicas en el rango de valores de $\gamma \in [0.6, 1]$ aproximadamente, \hat{u} va disminuyendo conforme aumenta γ , convergiendo a un ciclo límite. En la Figura 4.12 se muestran los puntos en el plano de Poincaré que describen órbitas

multiperiódicas. Este comportamiento oscilatorio para valores cercanos a la bifurcación de Hopf (Tabla 4.1) se observa en ausencia de perturbaciones externas y bajo la condición necesaria (4.1.11). El sistema eventualmente converge a un ciclo límite.

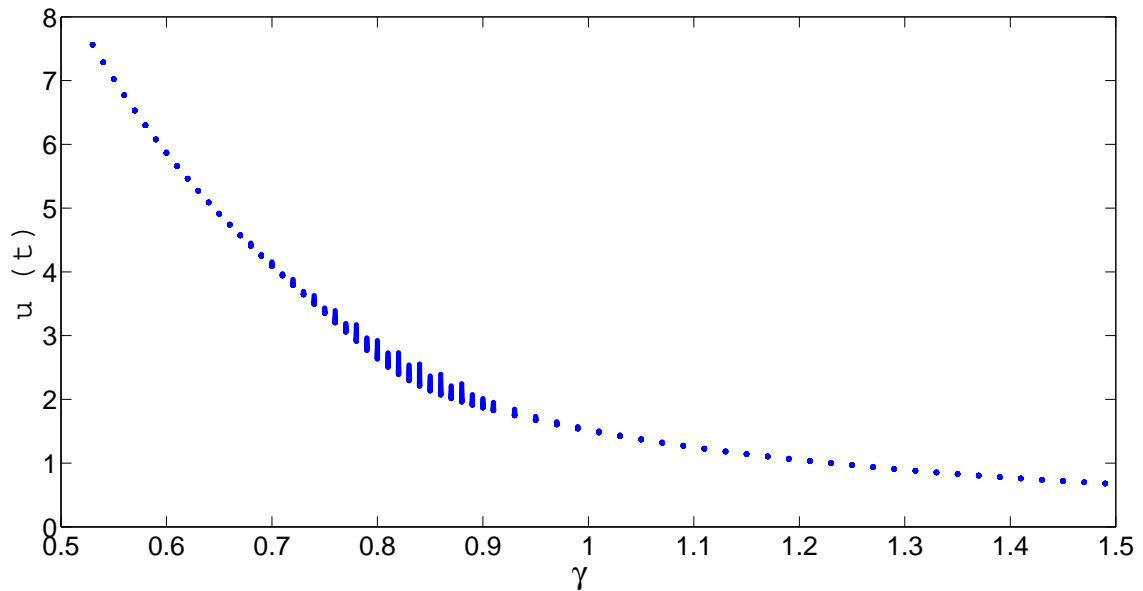


Figura 4.11: Diagrama de bifurcación de las trayectorias. Parámetro de bifurcación γ versus máximos locales de $\hat{u}(t)$, para el sistema homogéneo, i.e., $\tau(\hat{t}) = 0$. $\varepsilon=0.25$, $\xi=0.8$.

La región de oscilaciones autosostenidas podría ser explicada numéricamente por este análisis; en presencia o en ausencia de fuerzas externas que perturban el sistema, este regresa a un ciclo límite estándar, esto es característico de algunos sistemas dinámicos no lineales [82].

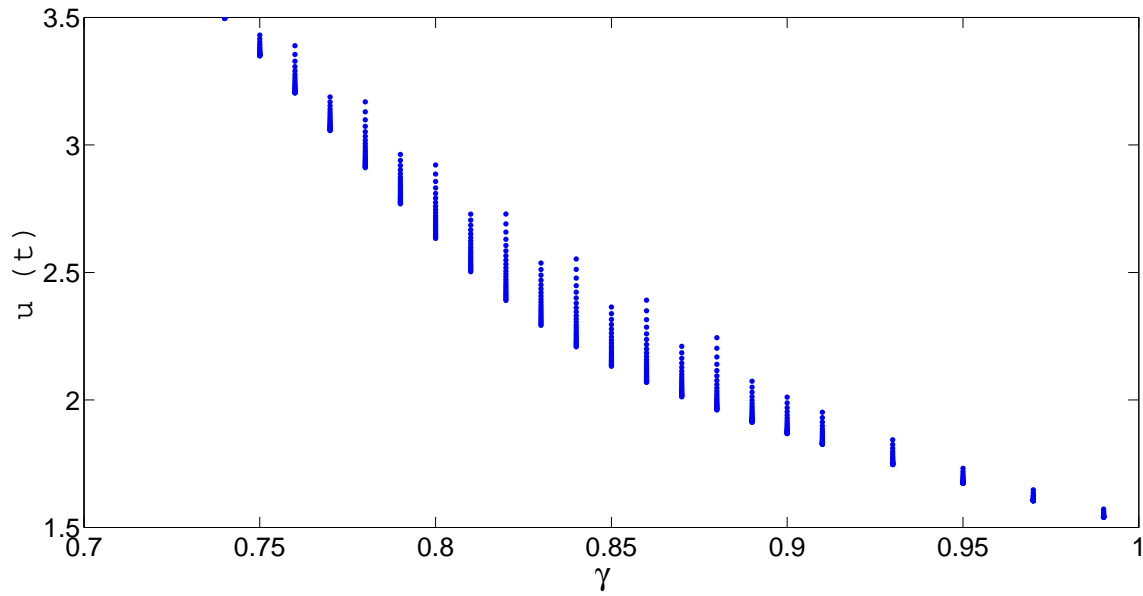


Figura 4.12: Figura 4.11 para el parámetro de bifurcación γ ; con $\tau(t) = 0$. $\varepsilon=0.25$, $\xi=0.8$.

Capítulo 5

Valor crítico en zonas de nucleación

5.1. Regímenes de estabilidad y temperatura

5.1.1. Tasas friccionales A y $A - B$

La ley de fricción de Dieterich-Ruina ha sido relacionada, experimentalmente [47,86,91, 100], con la profundidad (z) y temperatura de nucleación (T) a través de la propiedad del material $A - B$, y de la longitud característica de desplazamiento L [100]. Para un mejor entendimiento del rol de esta propiedad dentro de este contexto, resumimos algunas observaciones acerca de estudios en rocas por Dieterich y Ruina. El significado de las constantes empíricas A y $(A - B)$ se comprende mejor escribiendo la expresión para el esfuerzo friccional:

$$\tau = \tau_0 + \theta + A \log(v/v_0), \quad (5.1.1)$$

donde τ_0 es la tracción cuando el bloque se está moviendo a velocidad constante v_0 . Cuando el bloque se mueve a velocidad constante v_{ss} , es decir, a velocidad en estado estable (*steady-state*: $\partial\theta/\partial t = 0$) la expresión para el esfuerzo se convierte

$$\tau_{ss} = \tau_0 - (B - A) \log(v_{ss}/v_0). \quad (5.1.2)$$

De acuerdo con Rice *et al.* [11, 64], los parámetros A y $A - B$ son tasas friccionales (ver ecuaciones (3.3.6) y (3.3.7)). Estas propiedades del material están estrechamente relacionadas con el efecto de cambios en la velocidad del desplazamiento, debido a esto, son indicadores de debilitamiento de fricción por aumento de velocidad, i. e., *velocity-*

weakening (régimen inestable), y del fortalecimiento de la fricción por disminución de velocidad, i. e., *velocity-strengthening* (régimen estable).

El parámetro $(A - B)$ determina la estabilidad [47]. Para $A - B < 0$, la fricción en estado estable mostró *velocity weakening*, lo cual permite el movimiento *stick-slip*. Para un modelo de bloque deslizante acoplado con $F_{dr}(v, \theta)$, el coeficiente de restauración elástica crítico k_c está dado por [46, 66]:

$$k_c = \frac{(A - B)\sigma_n}{L}, \quad (5.1.3)$$

y ocurre el movimiento *stick-slip* para $k > k_c$ [33]. Esto es equivalente a lo que plantea Scholz [47] en función del esfuerzo normal efectivo (4.1.18), cualquier esfuerzo que sea mayor que el esfuerzo normal efectivo crítico, $\bar{\sigma} > \bar{\sigma}_c$, dejará el comportamiento *stick-slip*.

Cuando $A - B > 0$, la fricción muestra *velocity strengthening*, dejando un desplazamiento estable. Algunos datos experimentales muestran la relación entre $(A - B)$ y la temperatura implicada en los regímenes de estabilidad.

5.1.2. Relación: A , $A - B$, y temperatura

La relación entre A , $A - B$ y la temperatura es como sigue. Tse y Rice [35] sugirieron que la cota inferior de sismicidad es debida a un *switch* con incremento de temperatura desde el régimen inestable (fricción *velocity weakening*) hasta el régimen estable (fricción *velocity strengthening*). Ellos infirieron esta transición con datos de fricción en roca de granito seco; sin embargo, existen fluidos en los poros a través de la corteza terrestre, a elevadas temperaturas, y puede influenciar fuertemente la resistencia y el desplazamiento de la falla.

Por otra parte, Lapusta y Rice [100] encontraron que los eventos sísmicos pequeños relacionados con la distancia característica de desplazamiento L , aparecen en la frontera de la transición del comportamiento de la fricción de *velocity-weakening* a *velocity-strengthening*, a profundidades donde las temperaturas son de aproximadamente 300 grados centígrados. Blanpied *et al.* [101, 102] presentaron datos de desplazamientos en experimentos con granito (Figura 5.1) a elevadas temperaturas (de 23 a 600 grados centígrados) y elevadas presiones (100 Megapascuales (MPa)). Sus resultados muestran

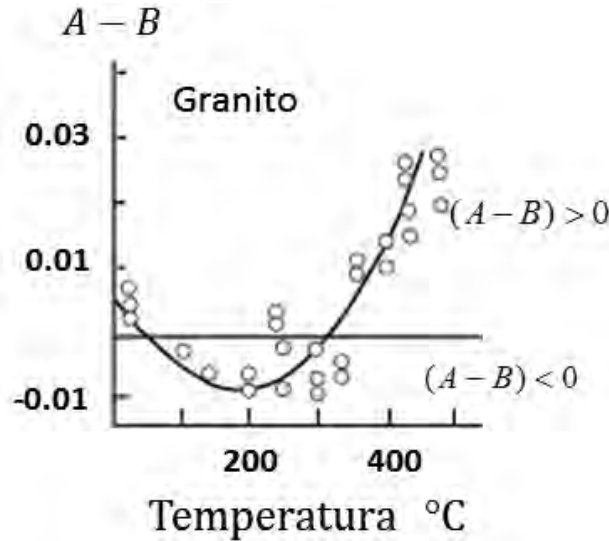


Figura 5.1: dependencia de $A - B$ sobre la temperatura del granito [47, 101].

velocity strengthening, i. e., $(A - B) > 0$ a temperaturas menores de 100 C, pero *velocity weakening*, $(A - B) < 0$ de 100 a 300 C. De 300 a 600 C existe la tendencia sistemática de cambio de *velocity weakening* a *velocity strengthening*, y de alta a baja fricción; pero ninguna de estas tendencias se encontró en muestras de granito seco. La dependencia de los datos con respecto a la velocidad implica el potencial para desplazamientos inestables en el intervalo aproximado de 100 a 350 C.

La Figura 5.2 muestra la curva de mejor ajuste obtenida con el ajuste de los datos aproximados tomados de Scholz [47]; de donde se obtiene una función empírica que relaciona la temperatura con el valor de $A - B$:

$$(A - B)_{(T)} = aT^2 + bT + c, \quad (5.1.4)$$

aquí, el mejor ajuste es con $a=3.903(10)^{-7}$, $b = -1,503(10)^{-4}$, $c = 8,509(10)^{-3}$.

Con base en lo anterior, existen dos temperaturas de transición entre las regiones estable e inestable:

1. Estable a inestable. Hay una región estable a temperaturas aproximadamente entre 20 y 100 C. A temperaturas mayores de 100 C las fallas son usualmente

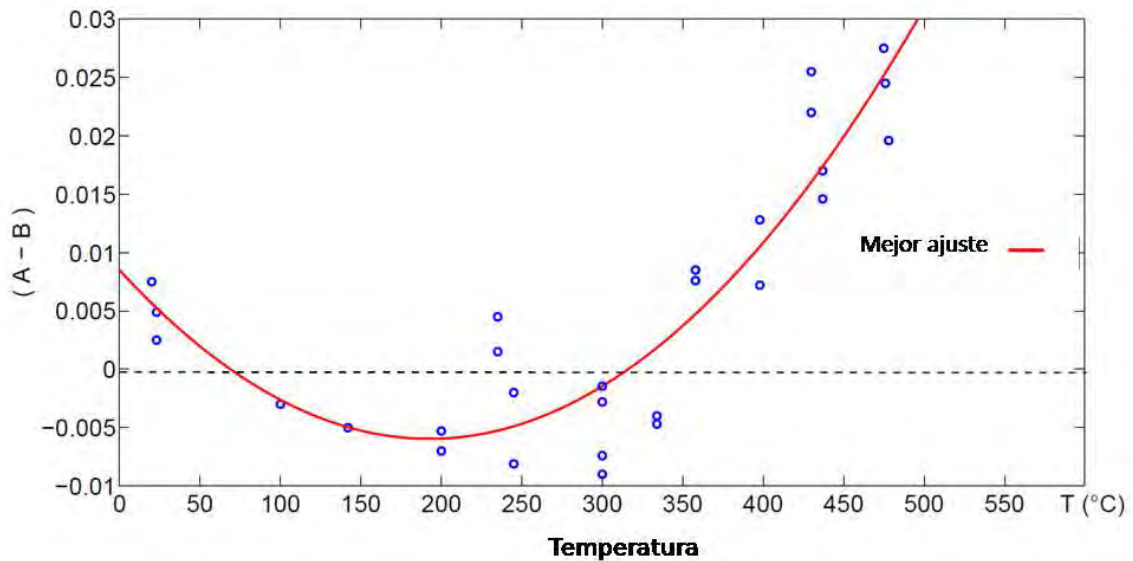


Figura 5.2: Curva de mejor ajuste. Dependencia de $(A - B)$ sobre la temperatura del granito [101](datos aproximados tomados de Scholz [3]); se muestra la curva de mejor ajuste por el método de mínimos cuadrados no lineales, el ajuste da $R^2=0.82$.

alineadas con fragmentos por el desgaste friccional, llamados cataclasite o polvo de falla, mejor conocido como *gouge*. Tal material granular involucra un mecanismo adicional que implica dilatancia, lo cual tiende a hacer $A - B$ más positivo; para tales materiales esto se observa cuando están pobremente consolidados; por lo tanto, las fallas también pueden tener una región estable cerca de la superficie. La transición estable a inestable se da a temperaturas aproximadas a 100 C.

2. Inestable a estable. La región inestable se da a temperaturas entre 100-300 C, por arriba de 300 C, este régimen corresponde a la plasticidad de cristal de cuarzo, el más dúctil de los minerales en el granito, que a su vez es la roca más representativa de la corteza terrestre continental. No debería de esperarse que ocurran terremotos a profundidades donde la temperatura es mayor de 300 C (ver Figura 5.1 y Figura 5.2).

Los regímenes de estabilidad condicional se dan en el entorno de $(A - B) = 0$, para temperaturas cercanas a las de transición. Usando un mapa geotérmico, i. e., de temperaturas a profundidad, los intervalos de temperaturas en la región inestable concuerdan

muy aproximado con la distribución de sismicidad observada, como se muestra en las Figuras 5.5 y 5.6, para el caso de la falla de Laguna Salada en Baja California.

La relación entre temperatura y el valor crítico complementado $\bar{\sigma}_c^*$ (4.1.19) es a través de la relación empírica (5.1.4) como sigue. De las ecuaciones (4.1.18) y (4.1.19) tenemos $\bar{\sigma}_c^* = -kL\psi/(A - B)$ que combinada con la ecuación (5.1.4) se obtiene

$$\bar{\sigma}_c^* = \frac{-kL\psi}{aT^2 + bT + c}. \quad (5.1.5)$$

Esta ecuación relaciona el valor crítico $\bar{\sigma}_c^*$ con la temperatura (T).

5.2. Valor crítico, profundidad, temperatura y esfuerzo

La relación entre el esfuerzo normal efectivo $\bar{\sigma}$ (MPa) y la profundidad Z (km) es como sigue: el modelo de Lachenbruch [35] para una región del sistema de fallas de San Andrés (California), asume que la presión en función de la profundidad está dada por:

$$\bar{\sigma}_n = 18z + 10MPa \quad (5.2.6)$$

(la cota del esfuerzo normal en la superficie de la tierra es alrededor de 10 MPa). La relación entre (5.1.5) y (5.2.6) está dada por

$$\sigma_c^* = \bar{\sigma}_n(z^*) = 18z^* + 10MPa \quad (5.2.7)$$

donde z^* es la profundidad crítica para inestabilidad friccional en una región sísmica específica; a esta profundidad existe una temperatura crítica T^* la cual se obtiene por un modelo geotérmico, de tal forma que podemos expresar la ecuación (5.1.5) en función del parámetro crítico $K_c = k_cL\psi$, donde K_c está dado por

$$K_c = -\sigma_n(z^*)(a(T^*)^2 + bT^* + c) = k_cL\psi, \quad (5.2.8)$$

Por otro lado k_c escala con la longitud crítica de nucleación ℓ_c de la siguiente manera [3, 47, 66]:

$$k_c = \frac{G\nu}{\ell_c}, \quad (5.2.9)$$

donde ν es una constante asociada con la geometría de la falla ($\nu \approx 1$) y G es el cociente de Poisson (0.25 para la mayoría de los materiales de la corteza terrestre). Entonces denotaremos como

$$\kappa = \frac{K_c}{k_c} \equiv \frac{K_c \ell_c}{G\nu}. \quad (5.2.10)$$

Como $\psi = 1 - \phi/\gamma^2$ y $\gamma^2 = (k_c/M)(L/v_0)^2$

$$\psi = 1 - \frac{\phi}{\Upsilon L^2}, \quad \Upsilon = \frac{k_c}{Mv_0^2} \equiv \frac{G\nu}{\ell_c M v_0^2}, \quad (5.2.11)$$

y sustituyendo la ecuación (5.2.11) en (5.2.8) y transponiendo términos, obtenemos una ecuación de segundo grado para L :

$$L^2 + \kappa L - \frac{\phi}{\Upsilon} = 0. \quad (5.2.12)$$

La solución de la ecuación (5.2.12) está dada por

$$L = -\frac{1}{2}\kappa \pm \frac{1}{2}\sqrt{\kappa^2 + 4\frac{\phi}{\Upsilon}} > 0, \quad (5.2.13)$$

Esta ecuación está en función de parámetros friccionales de sistemas mecánicos, constantes de las zonas de nucleación como deformación, profundidad, temperatura y longitud crítica de nucleación. La ecuación (5.2.12) y su solución (5.2.13) son relaciones que se obtienen bajo la condición de disipatividad o sub-amortiguamiento (4.1.9), sin la cual sistema no oscilaría. El valor de L a escala de falla se desconoce y su comprensión aún no es clara, pero se sabe por este tipo de relaciones que tiene un rol importante en la nucleación de sismos y queda como trabajo futuro comparar y escalar los valores que se obtengan con este modelo en relación a lo que se ha reportado en la literatura.

5.3. Comportamiento sísmico

El comportamiento sísmico [103] se muestra en el modelo sinóptico de la Figura 5.3. Las características geológicas, las tasas friccionales, y el comportamiento sísmico se interpretan en términos de temperatura y profundidad, y se hace una interpretación de los valores críticos comentados en este trabajo y de la región condicionalmente estable.

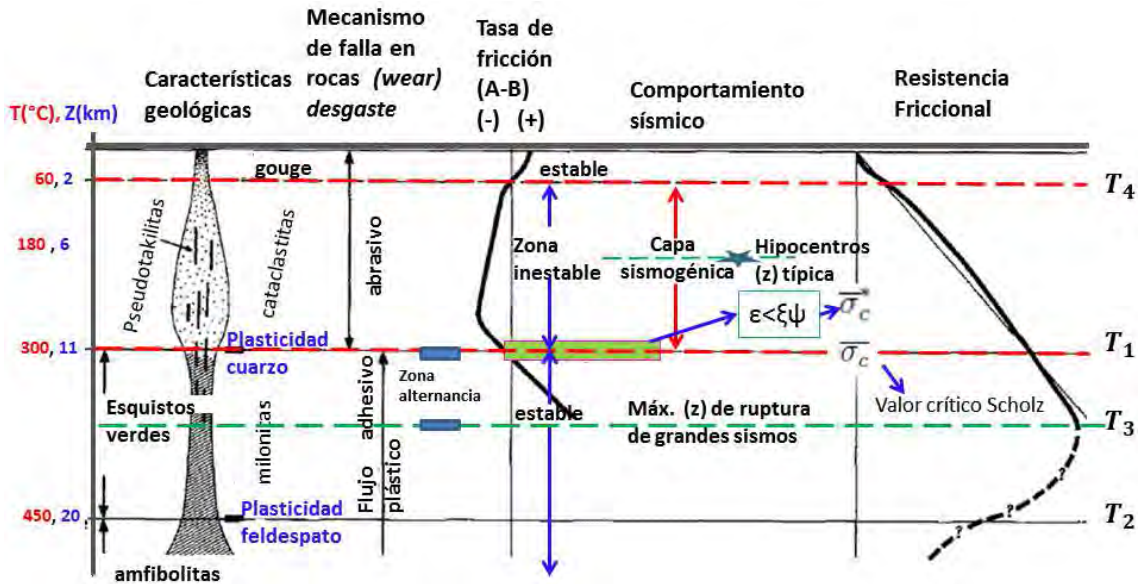


Figura 5.3: Modelo sinóptico del comportamiento sísmico (modificado de [103]), para la Falla de Laguna Salada. La región de oscilaciones autosostenidas ROA, está delimitada por la condición necesaria para estabilidad (no suficiente) $\varepsilon < \xi\psi$ o equivalentemente el valor crítico complementado del sistema propuesto, esta región está entre los 10 y 11 kms de profundidad aproximadamente; dentro de la región inestable.

El modelo sinóptico está en basado en el concepto de *transición frágil-plástica*. Esta transición está acotada por un lado por la transición *frágil-semifrágil* y por el otro por la transición *semifrágil-plástica* [103].

En el modelo sinóptico el gradiente geotérmico está basado en el modelo de temperaturas de la CFE [104], este modelo es afín con el de Lachenbruch y Sass [3] en los primeros 10 kms de profundidad, aproximadamente; es para una corteza cuarzo-feldespática, donde los puntos de referencia del modelo son las siguientes temperaturas:

1. $T_1 = 300$ C, correspondiente a la plasticidad del cuarzo (mineral más dúctil en el granito) que marca el inicio de la transición *frágil-semifrágil*,
2. $T_2 = 450$ C, que inicia la transición *semifrágil-plástica*, corresponde a la plasticidad del feldespato, el menos dúctil del granito.
3. T_3 C es la temperatura límite para profundidades en donde los terremotos pueden

propagarse una vez que rompen la capa sismogénica, y

4. T_4 C asociada con el límite inferior de la zona estable en los primeros kms de profundidad, o bien es el límite superior de la capa sismogénica (T_1 a T_4).

En T_1 hay un cambio en las rocas de la falla, de cataclasitas a mylonitas y en el mecanismo de desgaste, de abrasión a adhesión. El coeficiente de desgaste adhesivo es mucho más pequeño que para el abrasivo. La simetría de la forma es idealizada para fallas transcurrentes en rocas con propiedades uniformes.

Scholz [3], explica el modelo sinóptico como sigue. Las propiedades sísmicas de las rocas se describen con la tasa friccional $A - B$. Si $(A - B) < 0$ la falla es *velocity weakening* e inestable; y si $(A - B) > 0$ es *velocity strengthening* y es estable. $(A - B)$ también es positiva cerca de la superficie. La estabilidad en los primeros kms de profundidad está basada en cortes sobre fallas bien desarrolladas (fallas con desplazamientos previos y capa de *gouge*), y delimitada por T_4 . Una explicación está basada en la presencia de materiales no consolidados que generalmente son *velocity strengthening*.

La capa sismogénica donde pueden nuclearse los terremotos está acotada por T_1 y T_4 . La base de la capa sismogénica está marcada por 300 C y la primera aparición de mylonitas. T_1 y T_4 no acotan la región en donde los sismos se pueden propagar [105] (Figura 5.4). Se pueden propagar a temperaturas $T_3 < T_2$; pero los hipocentros de las réplicas estarán limitadas por T_1 y no definen la profundidad máxima de la zona de ruptura del sismo principal.

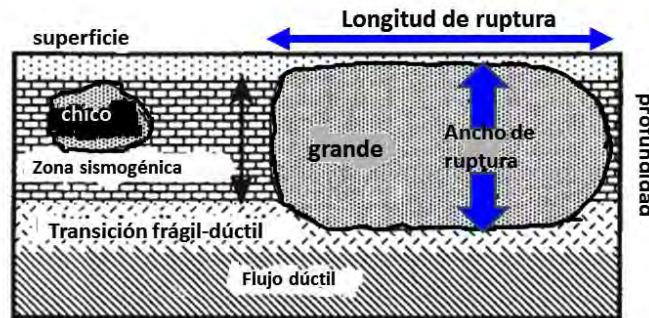


Figura 5.4: Dos tipos de terremotos: pequeños (no acotados) y grandes (acotados) [105].

La región entre T_1 y T_3 es de comportamiento alternante con dinámica de desplazamientos cosísmicos y flujo semifrágil intersísmico. Evidencias geológicas muestran que en zonas de cizalla se encuentran intercaladas mylonitas con pseudotachylitas y breccas. Una explicación de esto puede ser que las pseudotachylitas están presentes como resultado de la inestabilidad dúctil.

Los terremotos grandes generalmente se nuclean cerca de la base de la zona sismogénica y no cerca de la superficie ya que es la región con mayor energía de deformación. La nucleación es más probable en el valor mínimo de $A - B$; con la profundidad la resistencia y el esfuerzo se incrementan, y solamente las rupturas que inician en la región profunda de alto esfuerzo son capaces de propagarse a través de la región con temperaturas T_3 .

La cota superior de la región de oscilaciones autosostenidas (ROA) está en la transición inestable/estable, con temperatura cercana a T_1 , cerca de la transición frágil/semifrágil. La resistencia friccional es continua al menos hasta T_3 , después de esta temperatura la resistencia friccional de la falla decrece acoplándose a una ley de flujo a altas temperaturas a partir de T_2 . Entre estas temperaturas el material empieza a plegarse y finalmente se fusiona.

5.3.1. Falla de Laguna Salada

La falla de Laguna salada (FLS) pertenece al sistema de fallas de San Andrés; está localizada en latitud 31.5 a 32.5 N y longitud -116 a -114.5 W, en el noroeste de Baja California, México. La FLS es una falla de tipo transcurrente (desplazamiento horizontal a lo largo de la falla); con una longitud aproximada de 70 km (Figure 5.5).

El modelo de la estructura de la corteza en la Región de Laguna Salada propuesto por García-Abdeslem *et al.* [104], describe que la interfase corteza-manto alcanza una profundidad de 25 km, además sugiere que la base de la corteza magnetizada está a 16 kms. de profundidad, que corresponde a una temperatura aproximada de 450 grados centígrados (según gradiente geotérmico local); la geometría de la cuenca de Laguna Salada sugiere una estructura donde el basamento profundiza hacia el oriente, con un relleno sedimentario máximo de 3 kms.; los hipocentros se localizan como máximo en

19.6 kms.

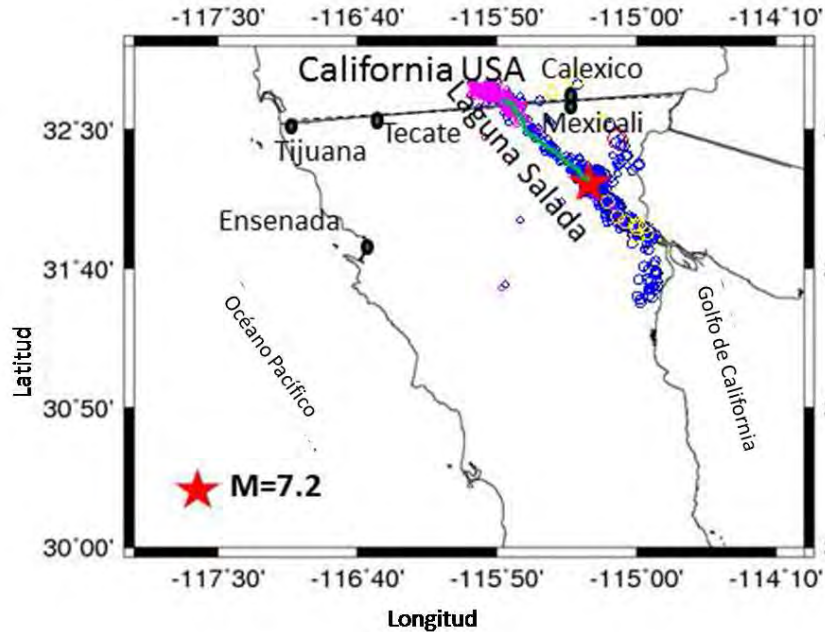


Figura 5.5: Mapa de profundidades de sismos en la falla de Laguna Salada. Magenta ($2 < z < 3$ km), azul ($3,1 < z < 10$), amarillo ($10 < z < 15$ km), círculo rojo ($z > 15$ km); la estrella roja corresponde al evento del 4 de abril del 2010 (magnitud 7.2), con profundidad de 4 kms. Datos de la red sismológica del Noroeste de México (RESNOM [106]), del 01 de enero al 31 de diciembre del 2010, en total 3444 sismos.

La Figura 5.6 despliega la profundidad Z (km) y temperaturas T (C) de sismos en la región de Laguna Salada [106]. Las temperaturas fueron calculadas con el gradiente geotérmico local [104], $dZ/dt = 30$ C/Km como se muestra en la Figura 5.6 (c). El promedio de profundidad es de 5.9 km, y la mayoría de los sismos están por arriba 10 km. La mayoría de los terremotos son de réplicas del evento Cucapáh-El Mayor cuya magnitud fue de 7.2 (4 abril 2010). Existe una región entre la superficie y los primeros 2 kms de profundidad (0-1.5) donde no se registran sismos, esta corresponde a una región estable. El mayor porcentaje de sismos que se encuentra a profundidades entre 1.5 y 2.7 kms es pequeño, este corresponde a la transición estable/inestable; en el intervalo 2.7-11 kms, se encuentra la mayoría de sismos, la región es inestable; de nuevo se localiza una región condicionalmente estable en la transición inestable/estable (a 330-380 C

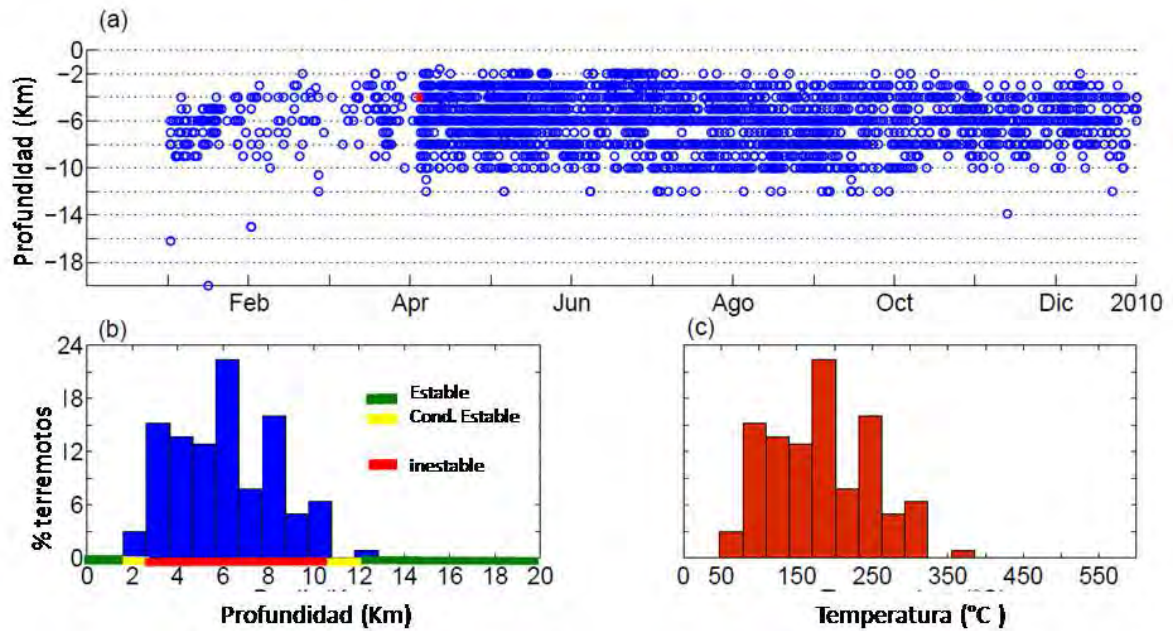


Figura 5.6: Distribución de la sismicidad [106] en FLS después del sismo del 4/04/2010 (Cucapáh-El Mayor) con magnitud $M=7.2$. En total 3444 datos del 01/01 al 31/12 2010. (a) Profundidad vs. tiempo, (b) Porcentaje de sismos vs. profundidad. Regiones estable, condicionalmente estable, e inestable; y (c) porcentaje de sismos vs. temperatura de nucleación.

approx.) en el intervalo 11-13 kms de profundidad, y finalmente la región estable a temperaturas mayores de 380 C y profundidades mayores de 13 kms (Figure 5.6 (b)).

Estos resultados concuerdan con lo que describe el modelo de estructura de García-Abdeslem *et al.* [104].

Capítulo 6

Sistema dinámico conmutado (*switching*)

El comportamiento sísmico está caracterizado por una variedad de fluctuaciones incluyendo eventos precursoros, periodos de quietud sísmica, migración de sismos a lo largo de las zonas de falla, actividad de *switch* entre diferentes fallas, entre otras fluctuaciones. Tal comportamiento muestra que para ciertos rangos de valores de los parámetros de los modelos sísmicos de fallas individuales, los sistemas pueden *switchear* espontáneamente sus modos de respuesta sísmica.

La dinámica de los terremotos es un fenómeno no lineal y oscilatorio donde el comportamiento complejo se atribuye a las fuerzas de fricción entre los bloques en contacto. El resultado de la interacción bajo fricción es un *switching* asociado al estancamiento-deslizamiento por el contacto con asperezas, y relacionado con una reorganización global episódica del modo de disipación de energía de deformación en el sistema [107].

Por otro lado, el efecto Stribeck indica que el comportamiento de las rocas obedece a términos de fricción no suaves (no continuamente diferenciable) por lo tanto la condición de suavidad que se asumió en el caso continuo (Capítulo 4) debe ser relajada. Tales discontinuidades pueden aparecer de manera natural en sistemas físicos que involucran fuerzas de fricción.

En particular, en el sistema analizado en este trabajo (3.4.16) existe una discontinuidad en $\hat{v} = 1$. Note that $\hat{v} = 1$ significa que el bloque deslizante y la placa móvil se mueven

en el mismo sentido con igual velocidad. Para capturar la diferenciabilidad no continua del campo vectorial en el sistema (3.4.16), se considera la función de estructura variable $\alpha F_0(\hat{v}) = \alpha_1 \text{sign}(\hat{v}-1) + \alpha_2 e^{-\mu\hat{v}} \text{sign}(\hat{v}-1) + \alpha_3 \hat{v}$ y el sistema será referido como sistema conmutado no lineal (SCN).

6.1. Caracterización matemática

En esta sección describimos el sistema conmutado en términos matemáticos y en función de los parámetros del modelo, para facilitar el análisis y la interpretación de resultados.

6.1.1. El sistema conmutado

El SCN (3.4.19) se representa de la siguiente manera:

$$\dot{x} = f_s(x) \quad (6.1.1)$$

donde

$$F_0(v) = (\text{sign}(\hat{v} - 1), e^{-\mu\hat{v}} \text{sign}(\hat{v} - 1), \hat{v})^T, \quad (6.1.2)$$

aquí consideramos el cambio de signo durante el desplazamiento por medio de la señal de conmutación s dada por $\text{sign}(\hat{v} - 1) : \mathbf{R} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$:

$$\text{sign}(v - 1) = \begin{cases} -1, & \text{if } v - 1 < 0, \\ 0, & \text{if } v - 1 = 0, \\ 1, & \text{if } v - 1 > 0. \end{cases} \quad (6.1.3)$$

Físicamente la dinámica del sistema sugiere que el sistema es disipativo, es decir, eventualmente el sistema tiende al equilibrio. Esto se demostró para un caso continuo en el capítulo 4, y se demuestra igual para todos los subsistemas del sistema conmutado.

6.1.2. Familia de subsistemas

Los eventos de conmutación o *switching* dependen de uno de los estados a través de (6.1.3). La señal de conmutación (6.1.3) impone la existencia de δ_i , $i=1,2,3$ con

$$\delta_i(x) = [0, 0, \delta_i(\hat{v})]^T \quad (6.1.4)$$

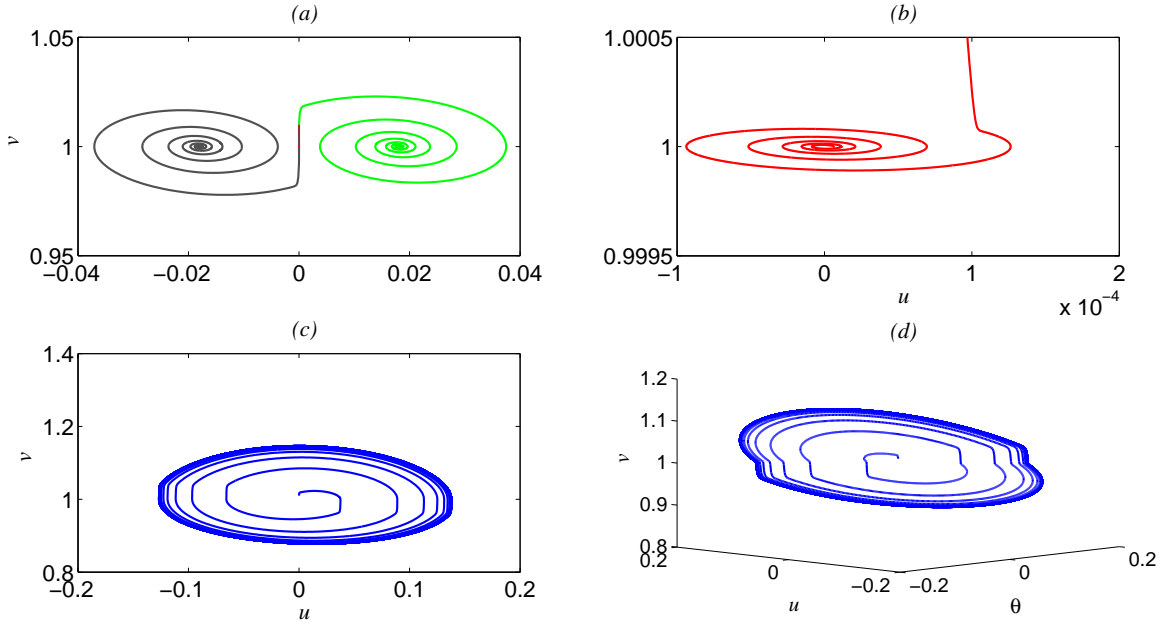


Figura 6.1: Subsistemas y sistema conmutado Homogéneos, i. e., $\tau(\hat{t}) = 0$; $\Pi=(0.1, .8, 10)$. (a) Retrato de fase de f_1 (verde), f_3 (gris) y f_2 (rojo). (b) *Zoom* de f_2 . (c) Proyección del espacio de fases sobre el plano (\hat{u}, \hat{v}) y (d) espacio de fases para el sistema conmutado, respectivamente.

tal que el campo vectorial del sistema genera una familia de funciones:

$$\dot{x} = f_i(x) = \delta(x) + \delta_i(x), \quad (6.1.5)$$

para todo $x = (\hat{\theta}, \hat{u}, \hat{v})^T$, donde:

$$\delta(x) = \begin{pmatrix} -\hat{v}[\hat{\theta} + (1 + \varepsilon) \ln(\hat{v})] \\ \hat{v} - 1 \\ -\gamma^2[\hat{u} + (1/\xi)(\hat{\theta} + \ln(\hat{v}))] \end{pmatrix} \quad (6.1.6)$$

y

$$\begin{aligned} \delta_1(\hat{v}) &= \alpha_1 + \alpha_2 e^{-\mu(\hat{v})} + \alpha_3 \hat{v} \\ \delta_2(\hat{v}) &= \alpha_3 \\ \delta_3(\hat{v}) &= -\alpha_1 - \alpha_2 e^{-\mu(\hat{v})} + \alpha_3 \hat{v}. \end{aligned} \quad (6.1.7)$$

Se tiene una superficie de discontinuidad Ω en el espacio de estados. Ω divide el espacio de estados en 2 regiones: R_1 , y R_3 . $x \in \Omega$ cuando $\hat{v} = 1$. Las regiones y la superficie de

discontinuidad puede ser formuladas como sigue:

$$\begin{aligned} R_1 &= \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 | \hat{\theta}, \hat{u} \in \mathbf{R}, \hat{v} \in (1, \infty)\} \\ \Omega &= \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 | \hat{\theta}, \hat{u} \in \mathbf{R}, \hat{v} = 1\} := R_2 \\ R_3 &= \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 | \hat{\theta}, \hat{u} \in \mathbf{R}, \hat{v} \in (0, 1)\}. \end{aligned} \quad (6.1.8)$$

Note que la superficie de conmutación define por sí misma otra región, R_2 , y el sistema (6.1.5) puede ser expresado como una familia de funciones o subsistemas:

$$f_i(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in R_1, \\ f_2(x), & x \in \Omega := R_2, \\ f_3(x), & x \in R_3 \end{cases} \quad (6.1.9)$$

bajo la condición inicial, $x(t_0) = x_0$. Suponemos que las $f_i(x)$ son de clase C^1 , equiacotadas, oscilan en un rango finito. Las $f_i(x)$ describen la dinámica local del sistema conmutado (3.4.19).

Cada subsistema (6.1.9) tiene como punto de equilibrio x_i^* :

$$x_i^* = (0, \hat{u}_i^*, 1), \quad \hat{u}_1^* = \eta, \quad \hat{u}_2^* = \alpha_3/\gamma^2, \quad \hat{u}_3^* = -\eta, \quad \eta = (\alpha_1 + \alpha_2 e^{-\mu} + \alpha_3)/\gamma^2. \quad (6.1.10)$$

La Figura 6.1 (a) muestra el comportamiento de la familia de subsistemas en el dominio general $\hat{v} > 0$; las f_1 y f_3 parece que se comportan igual excepto en la parte transitoria y en el sentido de \hat{u} ; la primera tiene la mayor parte transitoria en $\hat{v} > 1$ y las trayectorias tienen $\hat{u} > 0$; la segunda tiene la parte transitoria, en su mayoría en $\hat{v} < 1$ y $\hat{u} < 0$. La variación del rango de \hat{v} y de \hat{u} en $f_2 \approx 0$ comparado con los rangos de las anteriores, esto se muestra en la Figura 6.1 (b); las Figuras 6.1 (c) y (d) muestran el retrato de fase y el espacio de fases respectivamente para el sistema conmutado, donde se aprecia la discontinuidad en $\hat{v} = 1$, formando un escalón. Todas las f_i parecen estables (espiral hacia adentro, convergencia hacia el equilibrio); mientras que el sistema conmutado parece inestable en el sentido de que las trayectorias se alejan del punto de equilibrio (espiral hacia afuera), pero permanecen acotadas. Esto cuando la condición necesaria para estabilidad (4.1.11) se cumple.

Hacemos una transformación de coordenadas para que los subsistemas tengan un punto de equilibrio en común:

$$\hat{\theta} = y_1 \quad \hat{u} = y_2 + \hat{u}_i^* \quad \hat{v} = y_3 + 1. \quad (6.1.11)$$

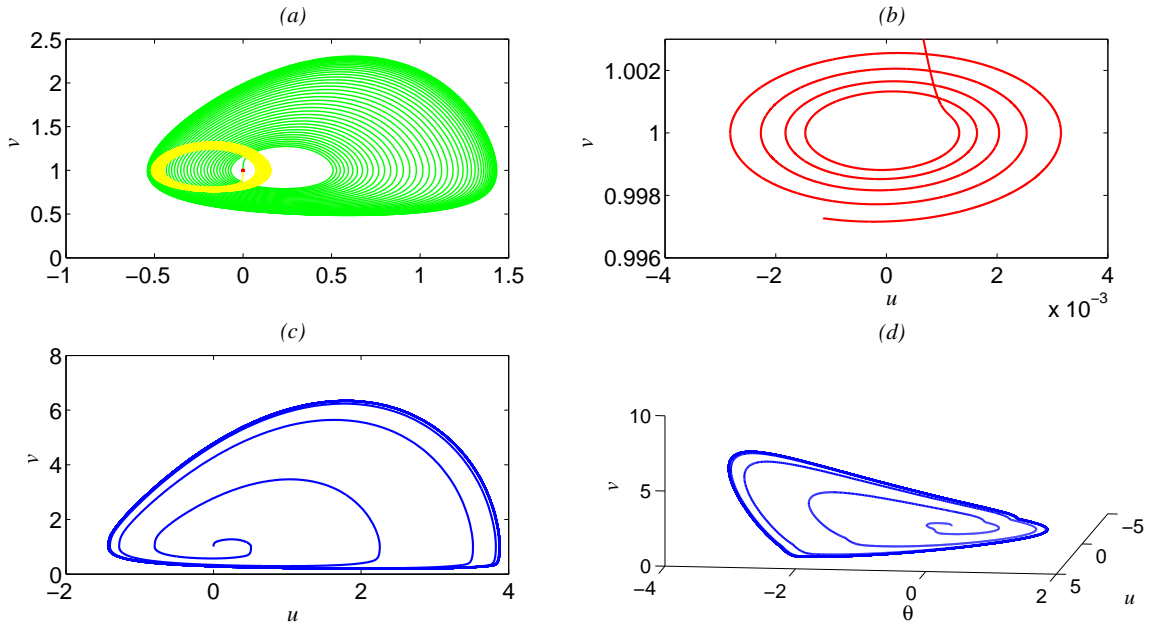


Figura 6.2: Subsistemas y sistema conmutado Homogéneos, i. e., $\tau(t) = 0$; $\Pi=(0.8,.8,10)$ y $\hat{v} > 0$. (a) Proyección del espacio de fases sobre el plano (\hat{u}, \hat{v}) f_1 (verde), f_3 (amarillo) and f_2 (rojo). (b) *Zoom* de f_2 . (c) Proyección del espacio de fases del sistema conmutado; (d) Espacio de estados para el sistema conmutado.

Sustituyendo el lado derecho de la ecuación (6.1.11) en la ecuación (6.1.5) o equivalentemente (6.1.9) tendremos el nuevo sistema $\dot{y} = f_i(y)$ cuyo punto de equilibrio será $y_i^* = (0, -\hat{u}_i^*, 0)$ para toda i :

$$\dot{y} = f_i(y) = \begin{cases} \dot{y}_1 = -(y_3 + 1)[y_1 + (1 + \varepsilon) \ln(y_3 + 1)] \\ \dot{y}_2 = y_3 \\ \dot{y}_3 = -\gamma^2[y_2 + \hat{u}_i^* + (1/\xi)(y_1 + \ln(y_3 + 1))] + \delta_i(y_3), \end{cases} \quad (6.1.12)$$

cuya señal de conmutación es $sign(y_3) = sign(\hat{v} - 1)$ y $\delta_i(y_3) = \delta_i(\hat{v})$.

Existencia y unicidad de las soluciones

De secciones previas podemos inferir que el sistema (6.1.9) es localmente continuo, diferenciable y acotado para cada $f_i(x)$; y entonces la solución $x(t)$ en cada región (6.1.8) existe y es única en el esquema clásico [95]. Por solución clásica nos referimos a una

solución continuamente diferenciable (ver Capítulo 4).

Sin embargo, viendo el sistema completo (6.1.5), tenemos que relajar el supuesto de continuidad para reconocer que la estructura del campo vectorial en el sistema conmutado incluye términos discontinuos inducidos por la señal de conmutación (6.1.3). Específicamente, el término $\delta_i(y_3)$ depende de $sign(\cdot)$, que está relacionada con la fricción de Coulomb F_c y el término de Stribeck F_s .

Note que $f(y)$ está definido para todo su dominio $y_1, y_2 \in \mathbf{R}$ y $y_3 \in \mathbf{R}_{>-1}$ pero no es continuamente diferenciable en $y_3 = 0$. La presencia de tal discontinuidad puede inducir oscilaciones que son características en sistemas conmutados no lineales con comportamiento caótico. La existencia y unicidad se cumplen cuando el campo vectorial $f(y)$ es continuo por pedazos en t , entonces la noción de solución absolutamente continua es en el sentido de Carathéodory (para más detalles, vea el Capítulo 2, sección 2).

6.2. Estabilidad del sistema conmutado

Una condición necesaria para asegurar la estabilidad del sistema conmutado no lineal es que cada subsistema (6.1.12) sea estable en el sentido de Lyapunov, pero esta condición no es suficiente; la estabilidad del sistema conmutado no lineal a través de la estabilidad de f_s para todo no garantiza su estabilidad [77]. La estabilidad del SCN puede ser analizada a través del concepto de función común de Lyapunov (FCL). Una función de Lyapunov es una función de las variables de estado, cuya derivada en el tiempo siempre es negativa, garantizando así el decaimiento de energía del sistema hasta cero. Una función común, es aquella que garantiza esto para todos los subsistemas. La existencia de una FCL es una condición suficiente para garantizar la estabilidad asintótica del sistema conmutado bajo una ley de conmutación arbitraria [70, 76, 78].

Exploramos en esta sección la estabilidad del sistema conmutado no lineal correspondiente a la familia de subsistemas (6.1.12), por medio de los métodos directo e indirecto de Lyapunov, tratando de encontrar una función común de Lyapunov. Por medio de este análisis encontramos relación con la condición necesaria y (4.1.11) analizada en

el Capítulo 4, que nos permitirá hacer el análisis del comportamiento oscilatorio y compararlo con el caso continuo.

6.2.1. Método indirecto de Lyapunov

En esta sección exploramos la estabilidad global, uniforme y asintótica (GUAS) del sistema conmutado linealizado por medio del método Indirecto de Lyapunov, el cual se detalla en el Capítulo 4. Este método consiste en linealizar cada subsistema alrededor del punto de equilibrio y determinar su estabilidad local en función de sus valores propios, sin embargo, para determinar la estabilidad del sistema completo conmutado, requerimos la existencia de una función local común de Lyapunov y de la noción de conmutatividad de campos vectoriales. Abordaremos de nuevo la condición necesaria para estabilidad (4.1.11) en el contexto del sistema conmutado y nos enfocaremos en el comportamiento oscilatorio del mismo. Aunque nos enfocamos en el comportamiento oscilatorio, es importante explorar las condiciones de estabilidad ya que de ese análisis podremos establecer relaciones entre los parámetros del sistema y el comportamiento oscilatorio.

Comenzamos el análisis de estabilidad con los siguientes teoremas, para sistemas conmutados lineales y no lineales, respectivamente:

Theorem 6.2.1. [75] Si $\{A_p : p \in \mathcal{P}\}$ es un conjunto finito de matrices Hurwitz que conmutan, entonces el correspondiente sistema lineal conmutado es global, uniforme y exponencialmente estable (GUES).

La generalización del teorema 6.2.1 para el sistema conmutado no lineal:

Theorem 6.2.2. [75, 78] Si $\{f_p : p \in \mathcal{P}\}$ (1) es un conjunto finito de campos vectoriales de clase C^1 que conmutan y (2) el punto de equilibrio es globalmente asintóticamente estable para todos los sistemas $\dot{y} = f_i(y)$, entonces el correspondiente sistema conmutado es GUAS.

El corchete de Lie o conmutador de los campos vectoriales suaves f_1, f_2 y f_3 dados en la ecuación (6.1.12), es el campo vectorial definido como sigue [79]:

$$[f_i, f_j](x) := \frac{\partial f_j(x)}{\partial x} f_i(x) - \frac{\partial f_i(x)}{\partial x} f_j(x) \quad \forall i, j, \quad (6.2.13)$$

es decir, el campo vectorial f_j sigue la dirección del campo vectorial f_i . Para los campos linealizados $f_i(y) = A_i y$, $f_j(y) = A_j y$, el lado derecho de la última ecuación se convierte en

$$A_j A_i - A_i A_j. \quad (6.2.14)$$

Si el corchete de Lie es idénticamente cero, entonces los dos campos vectoriales conmutan.

Empezaremos por linealizar el sistema conmutado correspondiente a la familia (6.1.12) para aplicar el theorem 6.2.1. Para construir una función común de Lyapunov para la familia de subsistemas (6.1.12) linealizamos los campos vectoriales y aplicamos resultados previos [79, 108, 109] como se muestra a continuación. Las derivadas parciales de los campos vectoriales de (6.1.12):

$$D_{f_i}(y) = \begin{pmatrix} -(y_3 + 1) & 0 & -y_1 - (1 + \varepsilon)(1 + \ln(y_3 + 1)) \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\gamma^2}{\xi} & -\gamma^2 & -\frac{\gamma^2}{\xi} \frac{1}{y_3 + 1} - \phi'_i \end{pmatrix} \quad (6.2.15)$$

$D_f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ y $\phi'_i = -\frac{\partial \delta_i(y_3)}{\partial y}$, for $i = 1, 2, 3$:

$$\phi'_1 = \alpha_2 \mu e^{-\mu y_3} - \alpha_3, \quad \phi'_2 = \alpha_3, \quad \phi'_3 = -\alpha_2 \mu e^{-\mu y_3} - \alpha_3. \quad (6.2.16)$$

La $D_{f_i}(y)$ evaluada para el punto de equilibrio $\mathbf{y}^* = (0, -\hat{u}^*, 0)$ está dada por:

$$A_i := D_{f_i}(y^*) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -(1 + \varepsilon) \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\gamma^2}{\xi} & -\gamma^2 & -\frac{\gamma^2}{\xi} - \phi_i \end{pmatrix} \quad (6.2.17)$$

$A_i \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$; and $\phi_1 = \mu \alpha_2 - \alpha_3$, $\phi_3 = -\mu \alpha_2 - \alpha_3$ and $\phi_2 = \alpha_3$. Los campos vectoriales linealizados son:

$$f_1(y) = A_1 y, \quad f_2(y) = A_2 y, \quad f_3(y) = A_3 y. \quad (6.2.18)$$

El polinomio característico de $f_i(y)$

$$P_i(\lambda) = a_0 \lambda^3 + a_{1_i} \lambda^2 + a_{2_i} \lambda + a_3 \quad \forall i, \quad (6.2.19)$$

cuyos coeficientes están dados en términos de los parámetros $\Pi = (\varepsilon, \xi, \gamma)$, y de coeficientes friccionales α_i y μ :

$$a_0 = 1 \quad a_{1_i} = 1 + \gamma^2/\xi + \phi_i \quad a_{2_i} = \gamma^2(1 - \varepsilon/\xi) + \phi_i \quad a_3 = \gamma^2. \quad (6.2.20)$$

Una condición suficiente para que las matrices A_i sean Hurwitz (todos sus valores propios tengan parte real negativa), y por consiguiente la familia de subsistemas sea localmente asintóticamente estable es la siguiente:

$$\varepsilon < \xi(\psi_i - \frac{\xi}{\xi(1 + \phi_i) + \gamma^2}), \quad \psi_i = 1 + \phi_i/\gamma^2. \quad (6.2.21)$$

Este resultado viene directamente del criterio de Rutz-Hurwitz [110], es decir, se cumple lo siguiente:

$$a_0, a_1, a_2, a_3 > 0, \quad a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0. \quad (6.2.22)$$

La condición necesaria (4.1.11) aún tiene el mismo significado para el caso de cada subsistema, de tal forma que la condición necesaria para estabilidad, pero no suficiente es

$$\varepsilon < \xi\psi_i, \quad \psi_i = 1 + \frac{\phi_i}{\gamma^2}. \quad (6.2.23)$$

Las Figuras 6.1 (a), (b) y las Figuras 6.2 (a), (b) muestran los casos para los cuales la condición suficiente (6.2.21) se cumple y cuando no se cumple, respectivamente. En la primera son subsistemas localmente asintóticamente estables, en la segunda los subsistemas no son estables dado que las trayectorias se alejan del punto de equilibrio del sistema, formando espirales hacia afuera.

Para el caso del sistema conmutado, en ambos casos, cuando se cumple la condición suficiente y cuando no se cumple, Figuras 6.1 (c), (d) y Figuras 6.2 (c), (d), respectivamente; el comportamiento del sistema sigue siendo inestable pero se mantienen acotados en una órbita, entonces podríamos pensar que se cumple al menos la condición necesaria (6.2.23) indicando que se trata de una región condicionalmente estable en el sentido de Scholz, tal y como se analizó en el Capítulo 4, por lo tanto el sistema bajo la condición necesaria, después de un tiempo permanecerá oscilando de manera acotada.

Debido al hecho de que las matrices A_i son Hurwitz, los campos vectoriales f_i son exponencialmente estables por lo tanto, una función cuadrática común de Lyapunov:

$V_i(y) = y^T P_i y$, con $P_i > 0$ y $P_i = P_i^T$, tal que $\dot{V}_i(y) = y^T (A_i^T P_i + P_i A_i) y < 0$; sirve como una función local común de Lyapunov para la familia (6.2.18). Para encontrar esta función común por un procedimiento iterativo [109] es necesario primero demostrar que las matrices Hurwitz conmutan. De la ecuación del corchete de lie (6.2.1) y del corchete de Lie para campos vectoriales linealizados (6.2.14):

$$[A_i, A_j] := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -(1 + \varepsilon)(\phi_j - \phi_i) \\ 0 & 0 & (\phi_j - \phi_i) \\ -\frac{\gamma^2}{\xi}(\phi_i - \phi_j) & -\gamma^2(\phi_i - \phi_j) & 0 \end{pmatrix} \quad (6.2.24)$$

Las matrices A_i , $\forall i, j$ no conmutan. Debido a que la primera condición del teorema 6.2.1 no se cumple, no es posible encontrar la función común de Lyapunov por el método iterativo propuesto por Narendra *et al.* [109], y no se puede probar que el sistema conmutado linealizado correspondiente a la familia de subsistemas (6.2.18) es GUES.

Por otro lado, si probamos la estabilidad del sistema conmutado no lineal asociado a la familia de subsistemas (6.1.12), por el teorema 6.2.1, Mancilla-Aguilar [78] establece que el sistema conmutado es global, uniforme y asintóticamente estable (GUAS) sólo con la prueba de conmutatividad de campos vectoriales. El corchete de Lie para los campos vectoriales originales $[f_1, f_3](y)$ no es cero, resultando un campo vectorial en función de $\delta_i(y_3)$ y $\partial\delta_i(y_3)/\partial y$, por lo tanto los campos vectoriales no conmutan. Entonces no podemos demostrar que el sistema conmutado no lineal es GUAS por medio del teorema 6.2.1.

En una sección posterior enfocaremos el análisis en el comportamiento oscilatorio a partir de la conjetura que hicimos en esta sección con la condición suficiente (6.2.21) y con la condición necesaria (6.2.23) para estabilidad. En la siguiente sección exploramos la estabilidad del sistema conmutado por el método directo de Lyapunov, es decir, tomamos en cuenta el campo vectorial no linealizado del sistema.

6.2.2. Método directo de Lyapunov

El método directo de Lyapunov es una extensión natural de una observación física fundamental: si la energía total de un sistema es continuamente disipada, entonces el

sistema eventualmente alcanzará un equilibrio. Como la energía es un escalar, el análisis de estabilidad debería reducirse al análisis de una función escalar. Inestabilidad implica crecimiento de energía; estabilidad implica convergencia de la energía a cero.

La estabilidad puede ser analizada vía teoría de Lyapunov como sigue: dada una función definida positiva continuamente diferenciable de clase (C^1) , $V : R^n \rightarrow R$, diremos que V es una función común de Lyapunov para la familia de sistemas $\dot{y} = f_p(y)$, $p \in \mathcal{P}$ (donde \mathcal{P} es algún conjunto indexado) si existe una función continua definida positiva $W : R^n \rightarrow R$ tal que

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{y}} f_p(\mathbf{y}) \leq -W(\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{y}, \quad \forall p \in \mathcal{P}. \quad (6.2.25)$$

El término $\frac{\partial V}{\partial \mathbf{y}} f_p(\mathbf{y}) \equiv \frac{\partial V(\mathbf{y})}{\partial t}$.

La desigualdad anterior implica encontrar una forma cuadrática de la función de Lyapunov: $V_i = y^T P_i y > 0$ donde $P_i = P_i^T$, $P_i > 0$, de tal manera que $\partial V_i / \partial t = \dot{y}^T P_i y + y^T P_i \dot{y} < 0$ tal que $\dot{y} = f_i(y)$, $i = 1, 2, 3$ tengan puntos de equilibrio estables. Con $P_i = I$, Una función candidata toma la forma cuadrática:

$$V = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 > 0 \quad \forall y = (y_1, y_2, y_3)^T. \quad (6.2.26)$$

Esta función V podría ser la FCL para la familia $\dot{y} = f_i(y)$, si $\partial V_i / \partial t < 0$ se cumple para $i=1,2,3$; subsecuentemente $\partial V_i / \partial t$ toma la siguiente forma para cada miembro de la familia (6.1.12),

$$\begin{aligned} \partial V_i / \partial t = & y_1 [-(y_3 + 1)(y_1 + (1 + \varepsilon) \ln(y_3 + 1))] + y_2(y_3) + \\ & (y_3 + 1)[- \gamma^2 y_2 - \gamma^2 u_i^* - \gamma^2 / \xi (y_1 + \ln(y_3 + 1))] + \\ & (y_3 + 1) \delta_i(y_3). \end{aligned}$$

Para diferentes valores de $\Pi = (\varepsilon, \xi, \gamma) > 0$, encontramos que ε y ξ no están directamente relacionados con la disipación de la energía del sistema, la inecuación $\partial V(\mathbf{y}) / \partial t \leq 0$, está determinada, mayormente, por los valores de γ .

El término $\ln(y_3 + 1)$ dificulta el análisis de (6.2.27) en la superficie de conmutación. Es necesario acotar y_3 cerca de los valores $y_3 = \{-1, 0\}$, solamente cuando hacemos este acotamiento es posible que se cumpla que $\partial V_i(y) / \partial t \leq 0$ para toda y acotada.

En el sistema adimensional (3.4.16), se establece una cota para la velocidad \hat{v} en valores cercanos a cero y valores cercanos a $\hat{v} = 1$, esto debido numéricamente al término logarítmico y a la señal de conmutación. En modelos previos acoplados a la ley de Dieterich-Ruina, se ha acotado \hat{v} cerca de cero y para valores muy grandes [111]. Entonces solamente bajo este criterio de acotación de y_3 , y tomando a $W = -\partial V/\partial t > 0$ y $-W = \partial V/\partial t$, se satisface la ecuación (6.2.2).

6.3. Sistema perturbado

En esta sección exploramos el comportamiento oscilatorio del sistema numéricamente bajo la acción de una fuerza externa, determinística y periódica que perturba al sistema (vibraciones provenientes de otras fallas), $\tau(\hat{t}) = \sin \omega \hat{t}$, para todos los casos asumimos que el sistema es subamortiguado; i. e., se cumple la condición de disipatividad (4.1.9), por lo tanto $\alpha=(1.4, 0.2, 0.1)$ y $\mu = 3$. Exploramos el caso cuando se cumple la condición necesaria (6.2.23) para estabilidad, ya que nos interesa el comportamiento del sistema dentro de la región de oscilaciones autosostenidas.

6.3.1. Comportamiento con variación de ω

Para determinar cuáles valores de la frecuencia angular se van a explorar con respecto a la dinámica del sistema, se muestra una gráfica de bifurcación de las trayectorias ω versus máximos locales de $\hat{u}(t)$ y $\hat{v}(t)$ (Figura 6.3).

En la Figura 6.3 se muestran los máximos locales para ambas series de tiempo. Se observa en la Figura 6.3 (a) que existen ciclos límite alternados con órbitas de periodo 2 (P2), P3 y multiperiódicas MP. Los rangos de valores aproximados de ω son los siguientes:

1. Órbitas P1. En intervalos de ω : [0.8 a 1.2], [1.7 a 2], [2.8 a 3] y [3.6 a 4].
2. Órbitas P2 y P3. En intervalos y/o valores de ω : 1.3 (P3), 1.4 y 2.4 (P2), [3.1 a 3.5] (P(2 y 3)).
3. Órbitas MP. En intervalos bien localizados de ω : valores menores que 1,[0.1 a 0.7]; 1.6,y valores mayores de 2, [2.1 a 2.7] excepto 2.4.

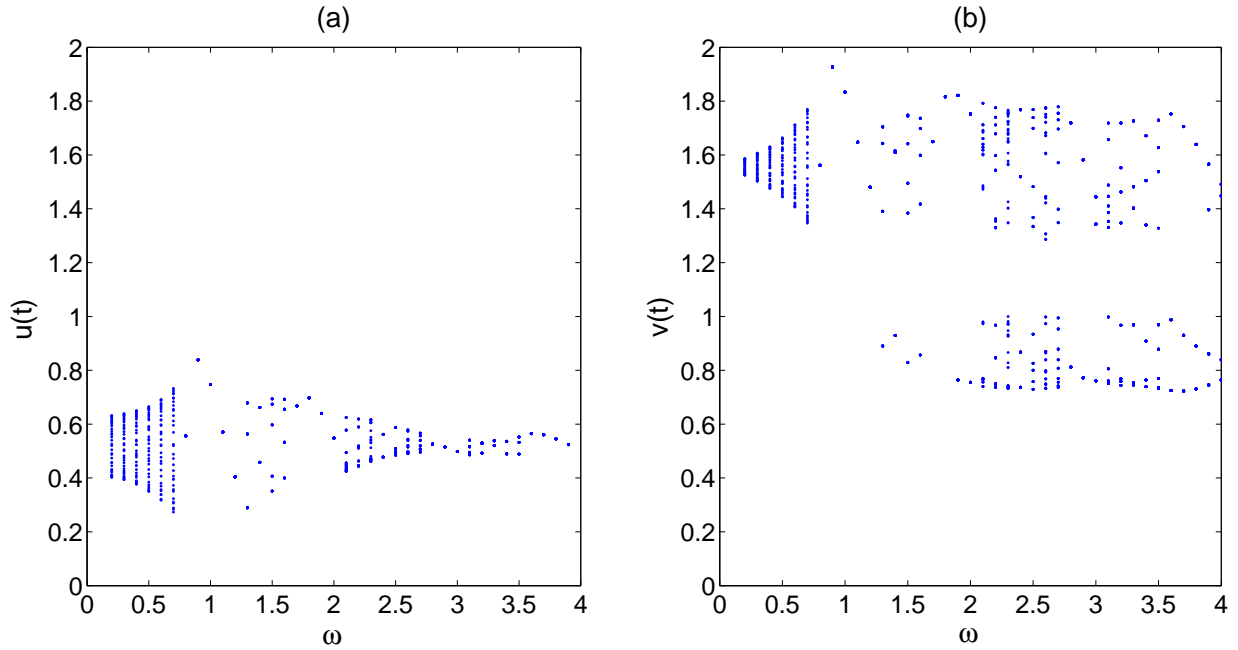


Figura 6.3: ω vs máximos locales de las series de tiempo de (a) $\hat{u}(t)$ y (b) $\hat{v}(t)$. Existencia de ciclos límite y órbitas periódicas para valores de ω caso $\Pi=(0.25,.8,.8)$.

El rango de valores de $\hat{u}(t)$ está en el intervalo $(0.2, 0.8)$ mientras que para $\hat{v}(t)$ es más complejo, dado que la señal de conmutación es en este estado; en la Figure 6.3(b) se muestran dos rangos de oscilación para $\hat{v}(t)$: entre $(0.7, 1)$ y $(1.2, 2)$.

6.3.2. Soluciones numéricas

Siguiendo la solución del sistema (3.4.16) para el caso conmutado (6.1.1), de la Figura 6.3 tomaremos valores de $\omega=\{1.6, 3.5\}$ correspondientes a órbitas de P4 y P1, respectivamente; para explorar el comportamiento oscilatorio, con $\Pi=(0.25,0.8,3)$. En la Figura 6.4 se muestra la serie de tiempo para las variables de estado x y espacio de fases con $\omega=1.6$, note que el comportamiento oscilatorio es más complejo que en el del caso homogéneo (ver Figuras 6.1 y 6.2). La serie de tiempo muestra que el *switch* se da a través del estado \hat{v} , se muestra la serie de \hat{u} donde se observa el periodo 2. Para el caso de $\omega=3.5$ correspondiente a una una órbita de P1, en la Figura 6.5 (c) la serie de tiempo de \hat{v} muestra un número mayor de máximos locales, siendo esta más

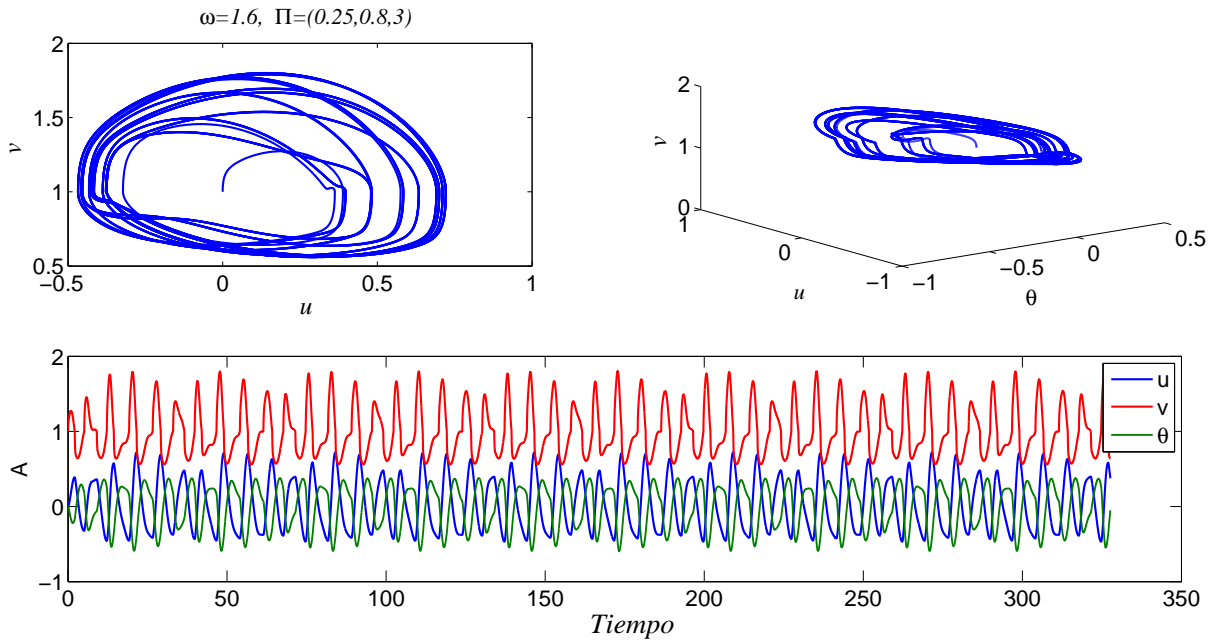


Figura 6.4: Sistema conmutado Forzado, $\omega=1.6$ y $\Pi=(0.25, .8, 3)$. (a) y (b) Proyección y espacio de fases, respectivamente. (c) Series de tiempo para $x = (\hat{\theta}, \hat{u}, \hat{v})$.

irregular que la del caso anterior, aún así, la serie de tiempo para \hat{u} no se ve afectada, ya que se muestra la órbita de periodo P1. En las Figuras 6.4, 6.5 y 6.6, se muestra el comportamiento dinámico complejo, posiblemente caótico, en los incisos (c) de ambas figuras se nota que la señal es rica en componentes dinámicos, y en el espacio de fases (b), se muestra que en $\hat{v} = 1$ existe una no diferenciabilidad en el campo vectorial, asociada con la superficie de conmutación dada en la ecuación (6.1.8). También se observa que las oscilaciones en los retratos de fase son causadas por la señal de conmutación a través del estado \hat{v} .

En todos los casos, cuando se cumple la condición necesaria (6.2.23), las trayectorias del sistema permanecen acotadas, al igual que en el caso homogéneo. Al parecer el sistema dinámico conmutado muestra comportamiento oscilatorio característico de zonas de nucleación de sismos, como el analizado en el caso continuo pero bajo diferente connotación, es decir, aquí el sistema oscila de forma acotada alrededor del punto de equilibrio.

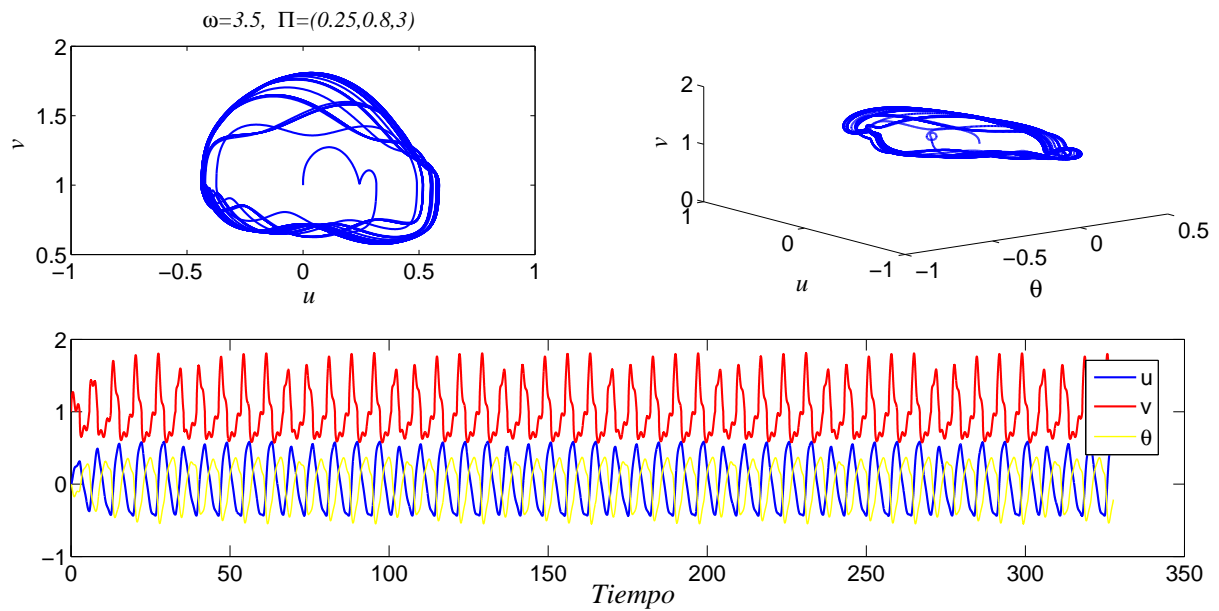


Figura 6.5: Sistema conmutado Forzado, $\omega=3.5$ y $\Pi=(0.25, .8, 3)$. (a) y (b) Proyección y espacio de fases, respectivamente. (c) Series de tiempo para $x = (\hat{\theta}, \hat{u}, \hat{v})$.

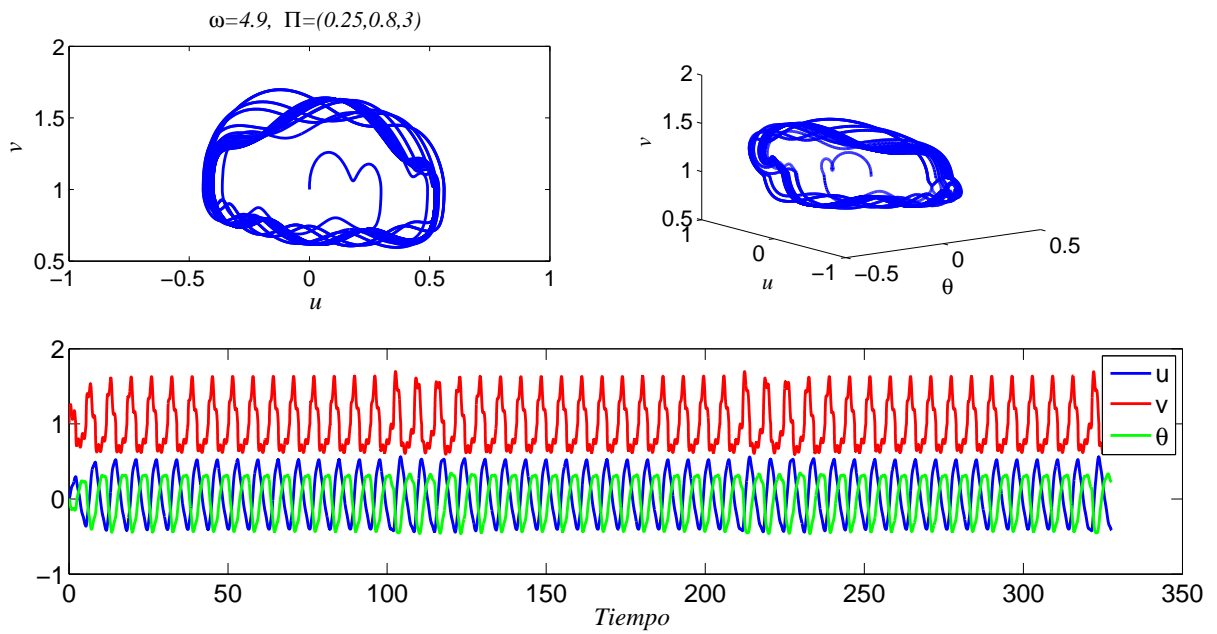


Figura 6.6: Sistema conmutado Forzado, $\omega=4.9$ y $\Pi=(0.25,0.8,3)$. (a) y (b) Retrato y espacio de fases, respectivamente. (c) Series de tiempo para $x = (\theta, \hat{u}, \hat{v})$.

Capítulo 7

Conclusiones y Discusión

7.1. Conclusiones

Aquí presentamos algunas conclusiones derivadas de este trabajo de investigación.

1. El modelo permite determinar propiedades matemáticas en términos de parámetros sísmicos y constantes de la corteza.
2. El sistema muestra riqueza en su comportamiento dinámico.
 - a) Para valores cercanos a la bifurcación de Hopf, encontramos que el sistema va de órbitas de periodos 1 y 2 a ciclos límite estándar; y de órbitas multiperiodicas a ciclos límite, en el caso continuo forzado a bajas frecuencias.
 - b) Para el caso del sistema continuo homogéneo (no perturbado), para valores pequeños del parámetro de bifurcación el sistema oscila presentando órbitas multiperiodicas pero converge a un ciclo límite estándar; esto cuando se cumple la condición necesaria para estabilidad.
 - c) Cuando no se cumple esta condición encontramos comportamiento oscilatorio con más transiciones: órbitas alternantes de P1 y P2 a un aparente ciclo límite para saltar a un ciclo de órbitas multiperiodicas.
3. Se determinó un esquema matemático para establecer límites para la región de oscilaciones autosostenidas: Desde la bifurcación de Hopf hasta la condición necesaria para estabilidad.

4. Cuando el sistema es perturbado el comportamiento oscilatorio es más complejo que cuando no recibe ningún tipo de perturbación, y el rango de valores de los parámetros del modelo ante este comportamiento, es pequeño comparado con los que se han encontrado para sistemas homogéneos (no perturbados) con más de 20 bloques deslizantes acoplados.
5. El análisis de bifurcación con respecto al parámetro gama, muestra más transiciones y comportamiento más complejo para valores de gama menores que uno.
6. Encontramos una condición necesaria para la disipatividad del sistema continuo, y la interpretamos como subamortiguamiento lo cual garantiza la oscilación en el sistema.
7. Para el caso conmutado, el comportamiento oscilatorio para la serie de tiempo de la velocidad es más complejo que la serie de tiempo del desplazamiento, debido a la señal de conmutación a través de ese estado. Si se cumple o no la condición necesaria, las trayectorias del sistema permanecen acotadas, siempre que los valores de los parámetros estén cerca de la bifurcación de Hopf analizada en el caso continuo.
8. Encontramos que el parámetro gama está muy relacionado con la disipación de energía del sistema (estabilidad). Sin embargo, no pudimos demostrar que el sistema conmutado es estable.

En general, el sistema conmutado presenta comportamiento oscilatorio más complejo que el sistema continuo, aún en ausencia de fuerzas externas. El sistema dinámico propuesto captura aspectos importantes del mecanismo de terremotos y reproduce el comportamiento oscilatorio que se encuentra cerca del valor crítico de nucleación.

7.2. Discusión

Enfocamos esta sección en la discusión relacionada con tres aspectos básicos: Energía disipada durante el sismo, la validación del modelo y el escalamiento a fallas naturales de la corteza terrestre.

Disipación de energía

Asociamos la disipación de energía durante el sismo con la estabilidad del sistema dinámico, pero no se aborda de manera explícita, es decir, determinando una función que parta de la energía total del sistema dada por la suma de la energía potencial y la cinética $E_{Total} = E_P + E_C$. La temperatura está estrechamente relacionada con el comportamiento sísmico, aquí se incluye al analizar los parámetros del modelo y profundidades de zonas de nucleación, en función del estudio de propiedades de rocas en laboratorio, sin embargo, los modelos de bloques delizantes no la incluyen explícitamente en su formulación. Se tendría que considerar la energía calorífica disipada por fricción (calor friccional) como la principal fuente de disipación, por lo que se tendría que acoplar calor y movimiento, esto complica el análisis.

Validación de modelos

Otro aspecto está relacionado con la validación de los modelos de bloque-resorte que se han usado recurrentemente para modelar la física de terremotos. Tradicionalmente, muchos de esos modelos han sido analizados y comparados con la sismicidad observada en términos de la distribución magnitud-frecuencia (Ley de Gutenberg-Richter) de eventos sísmicos. En algunos casos la ocurrencia de réplicas en espacio-tiempo (Ley de Omori-Utsu) también ha sido examinada. Se considera que no es suficiente validar modelos de bloque-resorte sólo porque aparentemente exhiben una de las medidas mencionadas puesto que en la física del terremoto intervienen variables que dan origen a otras medidas que no son susceptibles de ser medidas en la naturaleza.

Dado que la génesis de un terremoto ocurre a kilómetros de profundidad, aún no es posible contar con datos reales tales como fricciones, desplazamientos y esfuerzos, y en general poco se conoce de la dinámica del sismo a esas profundidades. Una alternativa para la validación de estos modelos consiste en concebirlos como modelos cualitativos y tratar de validarlos desde esta perspectiva, por medio de la construcción lógica considerando la física, por la comparación de resultados de simulaciones con respecto a parámetros obtenidos por otros modelos, por revisión de expertos en el área y por resultados a nivel experimental con mecánica de rocas.

Otra alternativa es mediante el análisis de la estructura y evolución del sistema propuesto a través del estudio de las series de tiempo de las variables del modelo. Esta alternativa se exploró para este estudio y se resume en la siguiente sección (ver artículo en la sección de Anexos).

Análisis de las series de tiempo de las variables de estado

Por medio del análisis de las series de tiempo se determinó la estructura del sistema dinámico y se demostró numéricamente que presenta comportamientos como los observados en la sismicidad de la corteza terrestre. Algunos de los comportamientos que se observan en la naturaleza de la sismicidad son: presencia de frecuencia fundamental en el espectro de potencia del desplazamiento durante un sismo, fractalidad y comportamiento auto-similar.

Los métodos de análisis utilizados son: (a) la transformada ondoleta que da información de la distribución de la energía en los diferentes niveles ondoleta, (b) análisis de fluctuaciones sin tendencia que da información de la estructura y comportamiento de la serie de tiempo, y (c) el exponente de Hurst que se utilizó para determinar la persistencia de señales, además de investigar el comportamiento caótico o auto-similar de series de tiempo.

El análisis de la serie de tiempo de la variable de estado \hat{u} , para valores de parámetros dentro un rango donde el sistema propuesto presenta oscilaciones y es inestable en sentido de Lyapunov, nos indica que existe comportamiento de tipo ruido blanco y de tipo fractal. El exponente de Hurst para cada variable es menor que 0.5, presentando una saturación de datos periódicos, y la dimensión fractal está entre 1 y 2; además muestra un comportamiento similar al de movimiento Browniano fraccionario y la existencia de una frecuencia fundamental, comportamiento propio de la sismicidad.

Las estructuras encontradas a partir de las correlaciones sugieren que el sistema dinámico reproduce comportamientos observados en la sismicidad de la corteza terrestre. Esta es una alternativa para la validación del modelo.

Escalamiento

Una de las preguntas que quedan abiertas es cómo resultados de las simulaciones y del análisis pueden ser escalados e interpretados en fallas naturales. Esta es una de

las principales desventajas de los modelos de bloques deslizantes ya que presentan una gama amplia de posibilidades, dependiendo de los esquemas teóricos que se elijan.

Bibliografía

- [1] P. Bak and C. Tang, *J. Geophys. Res.* **94**, 15635 (1989).
- [2] J. D. Gran, J. B. Rundle and D. L. Turcotte, *Geophys. J. Int.*, **191**, 459 (2012).
- [3] C. H. Scholz, *The Mechanics of Earthquakes and Faulting*, 2nd edn. (Cambridge University press, 2002).
- [4] B. W. Levin, *Chaos*, **6**, 405 (1996).
- [5] T. Matcharashvili, T. Chelidze, and Z. Javakhishvili, *Non. Process. Geophys.*, **7**, 9 (2000).
- [6] N. V. Sarlis and S. R. G. Christopoulos, *Chaos*, **22**, 023123 (2012).
- [7] C. E. Maloney and M. O. Robbins, *Chaos*, **17**, 041105 (2007).
- [8] National Earthquakes information Center, www.earthquake.usgs.gov, Abril 2014.
- [9] Fotografías de daños causados por sismos, www.lavanguardia.com, www.voltairenet.org, www.jornada.unam.mx, Abril 2014.
- [10] Servicio Sismológico nacional, www.ssn.unam.mx, Mayo 2012.
- [11] J. R. Rice and Y. Ben-Zion. *Proc. Natl Acad. Sci. USA*; **93**, 3811(1996).
- [12] A. Amendola and M. Dragoni, *Non. Process. Geophys.*, **20**, 1(2013).
- [13] M. De Sousa Vieira, *Phys. Rev. A* **46**,6288 (1992).
- [14] M. Dragoni and S. Santini, *Non. Process. Geophys.*, **17**, 777 (2010).
- [15] B. Erickson, B. Birnir and D. Lavallée, *Non. Process. Geophys.*, **15**, 1 (2008).
- [16] B. Erickson, B. Birnir and D. Lavallée, *Geophys. J. Int.*, **187**, 178 (2011).
- [17] J. Gu, J. R. Rice, A. Ruina and S. Tse, *J. Mech. Phys. Solids*, **32**, 167 (1984).

- [18] J. M. Carlson, J. S. Langer and B. E. Shaw, *Rev. Mod. Phys.*, **66**, 654 (1994).
- [19] W. F. Brace and J. D. Byerlee, *Science*, **153**, 990 (1966).
- [20] R. Burridge and L. Knopoff, *Seis. Soc. Am. Bull.*, **57**, 341 (1967).
- [21] J. M. Carlson, J. S. Langer and B. E. Shaw, *Phys. Rev. A* , **40**, 6470 (1989).
- [22] M. De Sousa Vieira, *Phys. Rev. E* **49**, 4534 (1994).
- [23] J. H. Dieterich, *J. Geophys. Res.*, **77**, 360 (1972).
- [24] J. Huang, G. Narkounskaia, and D. L. Turcotte, *Geophys. J. Int.*, **111**, 259 (1992).
- [25] J. Naussbaum and A. Ruina, *Pageoph.*, **125**, 631 (1987).
- [26] He Changrong, *Science in China series D*, **46**, 67 (2003).
- [27] J. D. Pelletier, *Geophys. Monogr.*, **120**, 27 (2000).
- [28] J. B. Rundle, D. L. Turcotte, R. Shcherbakov, W. Klein, and C. Sammis, *Rev. of Geophys.*, **41**, 1-30 (2003).
- [29] C. Marone, *Annu. Rev. Earth Planet Sci.*, **26**, 643 (1998).
- [30] E. G. Daub and J. M. Carlson, *J. Geophys. Res.*, **113**, 1 (2008).
- [31] J. D. Byerlee, *Pageoph.*, **116**, 615 (1978).
- [32] J. H. Dieterich, *Geophys. Monogr.*, **24**, 103 (1981).
- [33] A. Ruina, *J. Geophys. Res.*, **88**, 10359 (1983).
- [34] C. H. Scholz and T. Engelder, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, **13**, 149 (1976).
- [35] S. T. Tse and J. R. Rice, *J. Geophys. Res.*, **91**, 9452 (1986).
- [36] J. Szkutnik, B. Kawecka-Magiera, and K. Kulakowski, *Tribology series*, **43**, 529 (2003).
- [37] S. R. Brown, C. H. Scholz, and J. B. Rundle, *Geophys. Res. Lett.* **18**, 215 (1991).
- [38] H. Nakanishi, *Phys. Rev. A*, **43**, 6613 (1991).
- [39] M. Otsuka, *J. Phys. Earth*, **20**, 35 (1992).
- [40] B. Barriere and D. L. Turcotte, *Geophys. Res. Lett.*, **18**, 2011 (1991).

- [41] K. Ito and M. Matsuzaki, *J. Geophys. Res.*, **95**, 6853 (1990).
- [42] E. G. Daub and J. M. Carlson, *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.*, **1**, 397 (2010).
- [43] J. Alvarez-Ramírez, R. Garrido and R. Femat, *Phys. Rev. E*, **51**, 6235 (1995).
- [44] S. Andersson, A. Söderberg and S. Björklund, *Tribology Int.*, **40**, 580 (2007).
- [45] A. A. Batista and J. M. Carlson, *Phys. Rev. E*, **57**, 4986 (1998).
- [46] Y. Abe y N. Kato, *Pure Appl. Geophys.*, **170**, 745 (2013).
- [47] C. H. Scholz, *Nature*, **391**, 37 (1998).
- [48] J. H. Dieterich, *J. Geophys. Res.*, **84**, 2161 (1979).
- [49] S. Ide, G. C. Beroza, D. R. Shelly, y T. A. Uchide, *Nature*, **447**, 76(2007).
- [50] Z. Peng y J. Gomberg, *Nature Geosci.*, **3**, 599 (2010).
- [51] R. D. Hyndman, in *The Seismogenic Zone of Subduction Thrust Faults* (eds Dixon, T. H. and Moore, J. C.) 15-40 (Columbia Univ. Press, 2007).
- [52] J. S. Chapman y T. I. Melbourne, *Geophys. Res. Lett.* **36**, L22301 (2009).
- [53] I. S. Sacks, A. T. Linde, S. Suyehiro, y J. A. Snoken, *Nature* **275**, 599(1978)
- [54] P. Audet y R. Burgmann, *Nature*, **510**, 389 (2014)
- [55] R. Burgmann, *Nature*, **512**, 258 (2014).
- [56] <http://cienciasdelatierra2012.blogspot.mx.html>, www.granuniverso.com, abril 2014.
- [57] www.wikimedia.org, abril 2014.
- [58] J. M. Dieterich, *Tectonophysics*, **211**, 115 (1992).
- [59] G. Chambon, J. Schmittbuhl, y A. Corfdir, *J. Geophys. Res.*, **111**, 10359 (2006).
- [60] M. L. Falk and J. S. Langer, *Phys. Rev. E*, **6**, 7192 (1998).
- [61] S. M. Day, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **72**, 1881 (1982).
- [62] R. A. Harris and S. M. Day, *J. Geophys. Res.*, **98**, 4461 (1993).
- [63] R. Madariaga, K. B. Olsen, and R. J. Archuleta, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **88**, 1182 (1998).

- [64] J. R. Rice and A. Ruina, *J. Appl. Mech.*, **50**, 343 (1983).
- [65] J. Awrejcewicz and P. Olejnik, *Appl. Mech. Rev.*, **58**, 389 (2005).
- [66] J. H. Dieterich and B. Kilgore, *Pageoph.* **143**, 1/2/3 (1994).
- [67] A. van der Schaft and H. Schumacher, *An introduction to hybrid dynamical systems, ser. Lecture Notes in Control and Information Sciences*. (London: Springer-Verlag London Ltd., **251**, 2000).
- [68] J. Awrejcewicz and C. Lamarque, *Bifurcations and chaos in nonsmooth mechanical systems*. (World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2003).
- [69] D. J. Warwick, *Bifurcations in Piecewise-smooth Continuous Systems*, (World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2003).
- [70] J. Zhao and G. M. Dimirovski, *IEEE Trans. Automat. Control*, **49**, 574 (2004).
- [71] M. Ahmadi, H. Mojallalia, R. Wisniewskib, **11**, 37 (2014).
- [72] J. Cortés, *Discontinuous Dynamical Systems A tutorial on solutions, nonsmooth analysis, and stability* january 2009
- [73] R. Shorten, F. Wirth, O. Mason, K. Wulff, and C. King, *SIAM Review*, **49**,545 (2007).
- [74] <http://dx.doi.org/10.1016/j.jfranklin.2014.01.002>.
- [75] D. Liberzon, *Switching in Systems and Control*. Birkhäuser, Boston, Springer-Verlag New York, USA, 2003.
- [76] D. Liberzon and A. S. Morse; 1999.
- [77] M. S. Branicky, *IEEE Trans. Automat. Control*, **43**, 475 (1998)
- [78] J. L. Mancilla-Aguilar, *IEEE Trans. Automat. Control*, **45**, 2077 (2000).
- [79] M. Margaliot and D. liberzon, *Systems and Control Letters* **55**, 8(2006).
- [80] H. L. Royden, *Real Analysis*. 3rd edn. Collier Macmillan, 1988.
- [81] E. D. Sontag, *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems*. 2nd edn. (New York: Springer Verlag, 1998).
- [82] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos: with application to physics, biology, chemistry, and engineering*. (Perseus Book Publishing, 1994).

- [83] D. Baca Carrasco, Análisis Paramétrico de la Bifurcación de Hopf en Sistemas Tipo Lorenz. Tesis, Universidad de Sonora, Hermosillo, Sonora, México, Junio 2007.
- [84] Y. Bock and L. Prawirodirdjo, *Geophys. Res. Lett.* doi:10.1029/2003GL019150.
- [85] J. D. Byerlee, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, **7**, 577 (1970).
- [86] G. Di Toro, R. Han, T. Hirose, N. De Paola, S. Nielsen, K. Mizoguchi, F. Ferri, M. Cocco, and T. Shimamoto, *Nature*, **471**, 495 (2011).
- [87] A. Piombo, G. Martinelli, and Dragoni, *Geophys. J. Int.*, **162**, 507 (2005).
- [88] M. B. Geilikman, T. J. Spanos, y E. Nyland, *Tectonophysics*, **217**, 111 (1993).
- [89] E. Roeloffs, *Adv. Geophys.*, **37**, 135 (1996).
- [90] J. W. Rudnicki, *ASME Appl. Mech. Rev.*, **54**, 483 (2001).
- [91] D. R. Faulkner, C. A. L. Jackson, R. J. Lunn, R. W. Schlische, Z. K. Shipton, C. A. J. Wibberley, and M. O. Withjack, *Journal of Structural Geology*, **32**, 1557 (2010).
- [92] M. L. Gee, P. M. McGuiggan, and J. N. Israelachvili, *J. Chem. Phys.* **93**, 1895 (1990).
- [93] H. Yoshisawa and J. N. Israelachvili, *J. Phys. Chem.* **97**, 11300 (1993).
- [94] G. Reiter, A. L. Demirel, and S. Granick, *Science*, **263**, 1741 (1994) G.
- [95] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcation of Vector Fields*. Springer, 1983.
- [96] H. Khalil, *Nonlinear Systems*. 2nd edn. Prentice-Hall, 1996.
- [97] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems. Texts in Applied Mathematics*. 3rd ed. Springer, 2001.
- [98] E. Campos-Cantón, J. G. Barajas-Ramírez, G. Solís-Perales, and R. Femat, *Chaos*, **20**, 013116 (2010).
- [99] N. Lapusta, J. R. Rice, Y. Ben-Zion, and G. Zheng, *J. Geophys. Res.*, **105**, 765 (2000).
- [100] N. Lapusta and J. R. Rice, *J. Geophys. Res.*, **108**, 765 (2003).

- [101] M. L. Blanpied, D. A. Lockner, and J. D. Byerlee, *Geophys. Res. Lett.*, **18**, 609 (1991).
- [102] M. L. Blanpied, D. A. Lockner, and J. D. Byerlee, *J. Geophys. Res.*, **100**, 045 (1995).
- [103] C. H. Scholz, *Geol. Runds.*, **77**, 319 (1998).
- [104] J. García-Abdeslem, J. M. Espinosa-Cardena, L. Munguía-Orozco, V. M. Wong-Ortega and J. Ramírez-Hernández, *Geofis. Int.*, **40**, 67 (2001).
- [105] J. F. Pacheco, C. H. Scholz, y L. R. Sykes, *Nature*, **355**, 71 (1992).
- [106] Red Sísmica del Noroeste de México, www.resnom.mx, mayo 2013.
- [107] Y. Ben-Zion, K. Dahmen, V. Lyahovsky, D. Ertas, A. Agnon, *Earth and planetary science letter.*, **172**, 11 (1999).
- [108] A.A. Agrachev and D. Liberzon, *SIAM J. Control Optim.* **40**, 253(2001).
- [109] K.S. Narendra and J. Balakrishnan, *IEEE Trans. Automat. Control* **39**, 2469(1994).
- [110] M. Lizana, *Guía teórico-práctica: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de los Andes, Argentina (2000).
- [111] M. De Sousa, y H. J. Herrmann, *Phys. Rev. E*, **49**, 4534 (1994).
- [112] R. H. Sibson, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **72**, 151 (1982).

Anexos

Artículos derivados del trabajo de Tesis:

1. Oscillatory Behavior of Nonlinear Dynamical Model of Earthquakes through Hopf Bifurcation
2. Estructura-Evolución de un Modelo de Sistema Dinámico de Terremotos: Análisis de Correlaciones Ocultas de Largo Alcance