

**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN  
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

**POSGRADO EN CIENCIAS APLICADAS**

**Análisis de Estabilidad Robusta  
de una clase de Sistemas  
Integrales con Retardo**

Tesis que presenta

**Alejandro Morales Sánchez**

Para obtener el grado de

**Maestro en Ciencias Aplicadas**

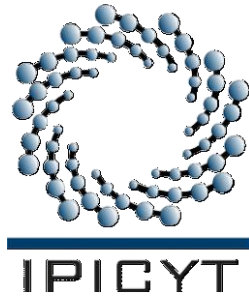
En la opción de

**Control y Sistemas Dinámicos**

**Director de la Tesis:**

**Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar**

San Luis Potosí, S.L.P., 27 de Enero de 2012



## Constancia de aprobación de la tesis

La tesis **Análisis de Estabilidad Robusta de una Clase de Sistemas Integrales con Retardo** presentada para obtener el Grado de Maestro en Ciencias Aplicadas en la opción de Control y Sistemas Dinámicos fue elaborada por **Alejandro Morales Sánchez** y aprobada el **27 de enero de 2012** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

---

Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar  
(Director de tesis)

---

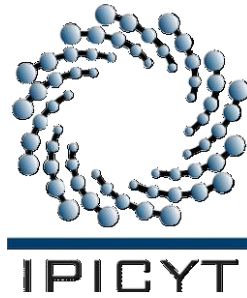
Dr. Jesús Leyva Ramos  
(Sinodal)

---

Dr. David Antonio Lizárraga Navarro  
(Sinodal)

---

Dr. Hugo Cabrera Ibarra  
(Sinodal)



## **Créditos Institucionales**

Esta tesis fue elaborada en la División de Matemáticas Aplicadas y Sistemas Computacionales del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología con número de registro 232574.

# Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

## Acta de Examen de Grado



El Secretario Académico del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 027 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Maestría en Ciencias Aplicadas en la opción de Control y Sistemas Dinámicos está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 27 días del mes de enero del año 2012, se reunió a las 17:30 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

<b>Dr. David Antonio Lizárraga Navarro</b>	<b>Presidente</b>	<b>IPICYT</b>
<b>Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar</b>	<b>Secretario</b>	<b>IPICYT</b>
<b>Dr. Hugo Cabrera Ibarra</b>	<b>Sinodal</b>	<b>IPICYT</b>

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

**MAESTRO EN CIENCIAS APLICADAS  
EN LA OPCIÓN DE CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS**

sustentó el C.

**Alejandro Morales Sánchez**

sobre la Tesis intitulada:

*Análisis de estabilidad robusta de una clase de sistemas integrales con retardo*

que se desarrolló bajo la dirección de

**Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar**

El Jurado, después de deliberar, determinó

**APROBARLO**

Dándose por terminado el acto a las 18:35 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fe el Secretario Académico del Instituto.

A petición del interesado y para los fines que al mismo convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 27 días del mes de enero de 2012.

  
**Dr. Marcial Bonilla Marín**  
Secretario Académico

  
**Mtra. Ivonne Lizette Cuevas Vélez**  
Jefa del Departamento del Posgrado

## **Agradecimientos**

Al Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar por la formación académica, personal, amistad y por su apoyo.

A todos los doctores que también formaron parte en mi formación académica de todas las divisiones del IPICYT.

A mi familia por apoyarme durante todo este tiempo.

A CONACyT por la beca de maestría.

## **Resumen**

Palabras clave: Sistemas integrales con retardo, estabilidad robusta, funcionales de Lyapunov-Krasovskii.

Esta tesis se centra en el estudio del problema de estabilidad robusta de una clase de sistemas integrales con retardo con un kernel exponencial. Para esta clase de sistemas se obtienen varias condiciones suficientes dependientes del retardo para la estabilidad exponencial robusta utilizando el enfoque de funcionales de Lyapunov-Krasovskii.

Los resultados encuentran importantes aplicaciones en el problema de la estabilidad interna de los controladores utilizados para la asignación de espectro finito de sistemas con retardo a la entrada, un tema que ha recibido una atención continua en los últimos años y que fue propuesto como un interesante problema abierto en la literatura.

## **Abstract**

Key words: Integral delay systems, robust stability, Lyapunov-Krasovskii functionals.

This thesis focuses on the study of the robust stability problem of a class of integral delay systems with an exponential kernel. For this class of systems we derive several sufficient delay-dependent conditions for the robust exponential stability by using the Lyapunov-Krasovskii functional approach.

The results found important applications on the internal stability problem of controllers used for the finite spectrum assignment of input time-delay systems, a topic that has received a sustained attention in the past few years and that was proposed as an interesting open problem in the literature.

# Índice general

<b>1. Introducción.</b>	<b>1</b>
1.1. Sistemas diferenciales con retardo. . . . .	1
1.1.1. Estabilidad y estabilidad robusta. . . . .	3
1.2. Sistemas integrales con retardo. . . . .	5
1.2.1. Dinámicas adicionales. . . . .	6
1.2.2. Operadores en diferencia de sistemas de tipo neutro. . . . .	7
1.2.3. Control de sistemas con retardo en la entrada. . . . .	8
1.2.4. Estabilidad y estabilidad robusta. . . . .	9
1.3. Organización de la tesis. . . . .	10
<b>2. Formulación del Problema.</b>	<b>11</b>
<b>3. Preliminares.</b>	<b>14</b>
3.1. Soluciones y concepto de estabilidad. . . . .	14
3.2. Condiciones de estabilidad tipo Lyapunov. . . . .	17
3.3. Condiciones de estabilidad robusta tipo Lyapunov. . . . .	20
<b>4. Estabilidad Robusta de Sistemas Integrales con Kernel Exponencial.</b>	<b>22</b>
4.1. Resultados principales. . . . .	26
4.1.1. Caso general. . . . .	26
4.1.2. Caso nominal. . . . .	33
4.1.3. Caso cuando $\Delta A = 0_{n \times n}$ . . . . .	35
4.1.4. Caso cuando $\Delta A \neq 0_{n \times n}$ . . . . .	37



4.2. Ejemplos numéricos. . . . .	39
<b>5. Conclusiones y trabajo a futuro.</b>	<b>47</b>
<b>A. Apéndice.</b>	<b>49</b>
A.1. Desigualdades Matriciales Lineales. . . . .	51
A.2. Desigualdades Integrales Cuadráticas. . . . .	52
A.3. Desigualdad Vectorial. . . . .	52
A.4. Propiedades del Determinante. . . . .	52
<b>Bibliografía</b>	<b>55</b>

# Índice de figuras

4-1. Bola en el espacio de coeficientes de la ganancia $C$ . . . . .	44
--	----

# Índice de cuadros

4.1. Comparación de retardo máximo para caso nominal del ejemplo 1. . . . .	40
4.2. Comparación de máximas perturbaciones en $A$ para varios valores de retardo $h$ . .	40
4.3. Comparación de retardo máximo para caso nominal del ejemplo 2. . . . .	42
4.4. Comparación de máximas perturbaciones en $C$ para varios valores de retardo $h$ . .	42

## Notación

$\mathbb{R}$	El conjunto de los números reales.
$\mathbb{R}^n$	Espacio euclideo $n$ -dimensional.
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Espacio de las matrices $n \times m$ en los reales.
$A^{-1}$	Inversa de la matriz $A$ .
$\ \cdot\ $	Representa la norma-2 de un vector o de una matriz.
$I_n$	Matriz identidad $n \times n$ .
$\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}^n)$ ó $\mathcal{C}$	El espacio de Banach de las funciones continuas que mapean el intervalo $[a, b]$ en $\mathbb{R}^n$ con la topología de convergencia uniforme.
$\ \phi\ _h$	La norma $\max_{\theta \in [-h, 0]} \ \phi(\theta)\ $ , para $\phi \in \mathcal{C}([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ .
$\mathcal{PC}([-h, 0], \mathbb{R}^n)$	El espacio de Banach de las funciones continuas por pedazos que mapean el intervalo $[-h, 0]$ en $\mathbb{R}^n$ con la topología de convergencia uniforme.
$A > 0$	Matriz $A$ de $n \times n$ definida positiva.
$\lambda_{\min}(A), \lambda_{\max}(A)$	El valor propio mínimo y máximo de $A$ .
$\det[A]$	Determinante de la matriz $A$ .
$a^+, a^-$	El valor límite de $a$ por la derecha y por la izquierda, respectivamente.

# Capítulo 1

## Introducción.

### 1.1. Sistemas diferenciales con retardo.

La interconexión entre dos o más sistemas físicos está siempre acompañada por fenómenos de *transferencia* (materiales, energía, información), así como *transporte* y *propagación*. Matemáticamente hablando, los fenómenos de transporte y propagación pueden ser representados por elementos de retardo de tiempo [19]. Los sistemas dinámicos que involucran retardos de tiempo pueden ser modelados por ecuaciones diferenciales con retardo [1] (DDEs por sus siglas en inglés) ó de manera más general, por ecuaciones diferenciales funcionales (FDEs por sus siglas en inglés).

Las DDEs son utilizadas en el modelado de diversos fenómenos que van desde biológicos, químicos, hasta fisiológicos [24]. Además, ejemplos de ingeniería pueden ser encontrados en [5, 10].

El estudio de ecuaciones diferenciales funcionales comenzó mucho antes de 1900, ejemplo de estos estudios se observan en los trabajos de Bernoulli, Euler, Condorcet y Volterra. Sin embargo, las formulaciones matemáticas básicas fueron desarrolladas en el siglo XX. La noción de una *ecuación diferencial funcional* fue introducida por Myshkis [22] en 1949 como una *ecuación diferencial que involucra la función " $x(t)$ " y sus derivadas no únicamente en el argumento " $t$ ", (nombrado tiempo) sino que también en varios valores de " $t$ ".*

Una DDE con un solo retardo en la variable de estado es

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-h)), \quad (1.1)$$

donde si  $h = 0$  la ecuación se transforma en una ecuación diferencial ordinaria. La DDE (1.1) es una ecuación de tipo retardado en donde la razón de cambio del estado presente depende del pasado y presente de los estados.

Una ecuación diferenciable de tipo neutro es de la forma

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-h), \dot{x}(t-h)),$$

en donde la razón de cambio del estado presente depende de la razón de cambio del estado pasado, así como también de valores pasados y presentes de los estados.

El caso particular de un sistema lineal de tipo retardado tiene la forma

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{j=1}^m A_j x(t-h_j), \quad h_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (1.2)$$

Los sistemas lineales con retardos de tipo neutro son de la forma:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{j=1}^m A_j x(t-h_j) + \sum_{j=1}^m B_j \dot{x}(t-h_j), \quad h_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (1.3)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $A_0, A_j, B_j$  con  $j = 1, 2, \dots, m$ , son de dimensiones apropiadas. Se dice que si  $h_j = jh, j = 1, 2, \dots, m$ , en (1.3) el sistema es de retardos commensurados.

Al pasar de los años, el interés y popularidad de las ecuaciones diferenciales funcionales ha crecido de manera constante. En particular, en los últimos 15 a 20 años ha habido un aumento en la investigación y proliferación de nuevas técnicas y resultados, tan sólo basta dar un rápido vistazo a la gran cantidad de artículos publicados en conferencias internacionales, talleres organizados y revistas durante este período para darnos cuenta de la escala de magnitud de este progreso. Avances en métodos numéricos y teoría de control han tenido un impacto considerable en el campo de los sistemas con retardo. Ejemplo de ello son los eficientes algoritmos numéricos para solucionar desigualdades matriciales lineales (LMIs por sus siglas en inglés) que

han generado un interés importante para plantear problemas de estabilidad de sistemas con retardos como condiciones LMI, véase [2, 5].

### 1.1.1. Estabilidad y estabilidad robusta.

Los métodos principales para examinar la estabilidad de un sistema con retardo pueden ser clasificados en dos tipos: métodos en el dominio de la frecuencia y métodos en el dominio del tiempo.

Es bien sabido que los métodos de análisis en el dominio de la frecuencia proveen de una eficiente metodología para el estudio de la estabilidad de un sistema lineal sin retardo. La condición necesaria y suficiente para la estabilidad de un sistema (1.2) sin retardos ( $h_j = 0$ , con  $j = 1, 2, \dots, m$ ) es que los valores propios de la matriz

$$A + \sum_{j=1}^m A_j, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

sean estrictamente negativos. Cuando  $h_j > 0$ , para algunos  $j$ , el sistema (1.2) es estable si y solo si todas los ceros de su función característica

$$f(s) = \det \left[ sI - A_0 - \sum_{j=1}^m A_j e^{-h_j s} \right]$$

tienen parte real negativa. Sin embargo, la ecuación  $f(s) = 0$  es trascendental, por lo cuál estudiar sistemas con retardos en el dominio de la frecuencia resulta más complicado que el estudio en el caso de sistemas sin retardo [5, 6].

Los métodos de análisis en el dominio del tiempo se basan principalmente en dos famosos teoremas: el Teorema de Lyapunov-Krasovskii y el Teorema de Lyapunov-Razumikhin. Krasovskii fué el primero en enfatizar la importancia en adoptar  $x_t$  (mejor conocido como *estado natural*) como el estado en vez de  $x(t)$ , dado que algunos problemas en estos sistemas tienen mayor sentido y son fáciles de solucionar si se considera la dinámica del sistema en un espacio funcional aún cuando la variable de estado es un vector de dimensión finita, esto tuvo lugar en 1956, y cuyo resultado directo se puede observar en su Teorema de Lyapunov-Krasovskii que extiende el teorema clásico de Lyapunov a sistemas con retardo. Otra idea revolucionaria debido

a Razumikhin, fue evitar el uso de las funcionales y utilizar funciones clásicas de Lyapunov, lo cual dió como resultado directo el Teorema de Lyapunov-Razumikhin, véase [5, 6].

Por otro lado, como es bien sabido, usualmente es imposible describir exactamente un sistema dinámico. Primero, existen parámetros ó procesos parásitos que no son completamente identificados. Segundo, debido a la limitación de las herramientas matemáticas disponibles, habitualmente intentamos usar un modelo relativamente simple para aproximar un sistema práctico. Como resultado, algunos aspectos de la dinámica del sistema (conocidas como dinámicas no-modeladas) son ignoradas. Tercero, algunos sistemas de control se requieren que operen dentro de un rango de diferentes condiciones de operación. Para capturar estos factores de incertidumbre, a menudo es posible identificar un conjunto acotado tal que todas las incertidumbres posibles caigan dentro de éste conjunto y a pesar de eso, no es muy difícil analizarlo matemáticamente. En otras palabras, se sabe únicamente que el sistema pertenece a la familia de sistemas que se origina cuando los elementos inciertos fluctúan sobre dominios específicos de admisibilidad y, por lo tanto, se puede tratar a la familia como un nuevo objeto de análisis. Ésta familia se conoce como un *sistema perturbado*. Cuando es posible mostrar que todos los sistemas de la familia son estables, la estabilidad del sistema original el cual es un miembro particular de la familia, está garantizada, véase [5].

### **Caracterización de la incertidumbre.**

Tomemos como ejemplo de estudio la caracterización de la incertidumbre para sistemas lineales con un sólo retardo. Consideremos el sistema

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h),$$

donde  $A_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices de coeficientes inciertos no conocidas en su totalidad, salvo que están dentro de un conjunto compacto  $\Omega$  el cual se puede denotar como el conjunto de incertidumbre,

$$(A_0, A_1) \in \Omega \text{ para todo } t \geq 0.$$

El conjunto de incertidumbre caracteriza las incertidumbres y sirve como una base de información necesaria para llevar a cabo el análisis de estabilidad robusta. También debemos notar que los coeficientes pueden depender del tiempo así como también de las variables del estado



presente y pasado,  $x(t + \xi)$ ,  $-h \leq \xi \leq 0$ .

Una buena elección para el conjunto de incertidumbre es un acuerdo mutuo entre minimizar el conservatismo (y por lo tanto, es deseable hacer el conjunto de incertidumbre "pequeño") y la maleabilidad matemática (y por lo tanto, es deseable hacer al conjunto de incertidumbre estructuralmente simple).

En adición a las incertidumbres en los coeficientes de las matrices, el retardo de tiempo  $h$  también puede involucrar incertidumbres.

### **Incetidumbre de norma acotada.**

En términos de incertidumbre de norma acotada, descomponemos el sistema de matrices  $\omega = (A_0, A_1)$  en dos partes: la parte nominal  $\omega_n = (A_{0n}, A_{1n})$  y la parte de incertidumbre  $\Delta\omega = (\Delta A_0, \Delta A_1)$ :

$$\omega = \omega_n + \Delta\omega,$$

es decir,

$$A_0 = A_{0n} + \Delta A_0,$$

$$A_1 = A_{1n} + \Delta A_1.$$

En la literatura encontramos que la incertidumbre puede ser no-estructurada en el sentido que ésta es únicamente acotada en magnitud, por ejemplo

$$\|\Delta A_0\| \leq \rho, \rho > 0,$$

con la cota  $\rho$  conocida de antemano.

Es el tipo de incertidumbre que vamos considerar en ésta tesis.

## **1.2. Sistemas integrales con retardo.**

Ahora bien, existe una clase de sistemas dinámicos con retardos la cual se describe por ecuaciones integrales con retardos que no involucran derivadas del estado. Los sistemas integrales con retardo juegan un papel importante en varios problemas de estabilidad y estabilidad robusta de sistemas con retardo de tiempo. Ésta clase de sistemas se encuentra, por mencionar algunos

ejemplos, como aproximaciones de ecuaciones diferenciales parciales que describen fenómenos de propagación en un medio excitable [23], en el análisis de estabilidad de dinámicas adicionales introducidas por algunas transformaciones de sistema [4, 8], en el problema de estabilidad interna de controladores usados para la asignación de espectro finito de sistema con retardo de tiempo [12], así como en el análisis de estabilidad de algunos operadores de diferencia en ecuaciones diferenciales funcionales de tipo neutro [6, 10].

### 1.2.1. Dinámicas adicionales.

A continuación revisaremos cómo los sistemas integrales con retardo aparecen en el problema de dinámicas adicionales.

Consideremos un sistema diferencial con retardo de tiempo de la forma

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + \int_{-h}^0 F(\theta) x(t+\theta) d\theta, \quad (1.4)$$

donde  $A_0, A_1$  son matrices constantes reales de  $n \times n$ , el retardo  $h > 0$ , y  $F(\theta)$  es una matriz función real continua definida para  $\theta \in [-h, 0]$ .

Para obtener condiciones de estabilidad dependientes del retardo para (1.4), usualmente se aplica una transformación especial al sistema (1.4), véase [4, 23]. La finalidad de la transformación es presentar el sistema en una forma más conveniente para la obtención de condiciones de estabilidad dependientes del retardo mediante el método de Lyapunov. La transformación reemplaza en (1.4) los términos de retardo  $x(t-h)$  y  $x(t+\theta)$  utilizando la fórmula de Newton-Leibnitz

$$\begin{aligned} x(t-h) &= x(t) - \int_{-h}^0 \dot{x}(t+\xi) d\xi, \\ x(t+\theta) &= x(t) - \int_{\theta}^0 \dot{x}(t+\xi) d\xi, \end{aligned}$$

y sustituye la derivada bajo la integral por el lado derecho de (1.4).

El sistema transformado tiene la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = \left[ A_0 + A_1 + \int_{-h}^0 F(\theta) d\theta \right] x(t) \\ - A_1 \int_{-h}^0 \left[ A_0 x(t + \xi) + A_1 x(t + \xi - h) + \int_{-h}^0 F(\tau) x(t + \xi + \tau) d\tau \right] d\xi \\ - \int_{-h}^0 F(\theta) \left[ \int_{\theta}^0 \left[ A_0 x(t + \xi) + A_1 x(t + \xi - h) + \int_{-h}^0 F(\tau) x(t + \xi + \tau) d\tau \right] d\xi \right] d\theta. \end{array} \right. \quad (1.5)$$

Se mostró en [9] que (1.5) se puede escribir como un sistema de dos ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}(t) = A_0 y(t) + A_1 y(t - h) + \int_{-h}^0 F(\theta) y(t + \theta) d\theta + z(t), \\ z(t) = \int_{-h}^0 \left( A_1 + \int_{-h}^{\theta} F(\xi) d\xi \right) z(t + \theta) d\theta. \end{array} \right. \quad (1.6)$$

La segunda ecuación del sistema anterior

$$z(t) = \int_{-h}^0 \left( A_1 + \int_{-h}^{\theta} F(\xi) d\xi \right) z(t + \theta) d\theta, \quad (1.7)$$

describe la dinámica adicional introducida por la transformación. La estabilidad de las dinámicas es una condición necesaria para la estabilidad de (1.6), véase [9].

### 1.2.2. Operadores en diferencia de sistemas de tipo neutro.

Ahora considere una ecuación diferencial funcional de tipo neutro de la forma

$$\frac{d}{dt} [Dx_t] = A_0 x(t) + A_1 x(t - h) + \int_{-h}^0 N(\theta) x(t + \theta) d\theta, \quad (1.8)$$

donde

$$Dx_t = x(t) - \int_{-h}^0 M(\theta) x(t + \theta) d\theta.$$

Aquí  $M(\theta)$  y  $N(\theta)$  son matrices función real continuas definidas para  $\theta \in [-h, 0]$ . Estabilidad del operador en diferencia  $Dx_t$  es una condición necesaria para la estabilidad de (1.8), véase [6].

El operador  $Dx_t$  es estable si y sólo si el sistema integral

$$x(t) = \int_{-h}^0 M(\theta) x(t+\theta) d\theta \quad (1.9)$$

es estable.

### 1.2.3. Control de sistemas con retardo en la entrada.

Ahora se describirá brevemente el problema de asignación de espectro finito para sistemas con retardo de tiempo. Consideremos el sistema lineal con retardo en la entrada

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t-h), \quad (1.10)$$

donde  $h > 0$ ,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  y  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  representa los vectores estado y de control, y  $A, B$  son matrices reales constantes de dimensiones apropiadas.

La ley de control

$$u(t) = C \left( e^{Ah} x(t) + \int_{-h}^0 e^{-A\theta} B u(t+\theta) d\theta \right) \quad (1.11)$$

asigna un espectro finito al sistema en lazo cerrado (1.10)-(1.11) que coincide con el espectro de la matriz  $A + BC$ , véase [12]. La dinámica interna de (1.11) está descrita por el sistema integral

$$z(t) = \int_{-h}^0 C e^{-A\theta} B z(t+\theta) d\theta. \quad (1.12)$$

Comparando los sistemas (1.7), (1.9) y (1.12) uno puede concluir que todos ellos son de la forma

$$z(t) = \int_{-h}^0 F(\theta) z(t+\theta) d\theta, \quad t \geq 0,$$

donde

$$F(\theta) = A_1 + \int_{-h}^0 G(\xi) d\xi$$

para el caso de (1.7),

$$F(\theta) = M(\theta)$$

para el caso de (1.9), mientras que para (1.12),

$$F(\theta) = Ce^{-A\theta}B.$$

#### 1.2.4. Estabilidad y estabilidad robusta.

Para sistemas integrales con retardo de la forma

$$x(t) = \int_{-h}^0 G(\theta) x(t + \theta) d\theta, \quad (1.13)$$

donde  $h$  es una constante positiva y la matriz función  $G(\theta)$  tiene elementos diferenciables continuos por pedazos definidos para  $\theta \in [-h, 0]$ , se han obtenido varias condiciones de estabilidad dependientes del retardo, usando herramientas frecuenciales [8, 9, 13] y en términos de funcionales de Lyapunov-Krasovskii [15].

En [15], para sistemas integrales con retardo de la forma (1.13), se proporcionan por primera vez condiciones de estabilidad exponencial en términos de funcionales de tipo Lyapunov-Krasovskii. También se presenta un teorema converso que garantiza la existencia de funcionales de Lyapunov-Krasovskii para sistemas exponencialmente estables. Más aún, se presentan expresiones generales para las funcionales con una derivada prescrita. Estas funcionales dependen de una matriz función conocida como matriz de Lyapunov para sistemas integrales con retardos, la cual satisface un sistema de ecuaciones integrales con retardo.

Además, las funcionales en [15] fueron usadas para obtener estimados exponenciales de las soluciones y condiciones de estabilidad robusta de sistemas integrales con retardos exponencialmente estables.

Sin embargo, existen aún algunos problemas abiertos asociados a la inspección de la positividad de tales funcionales que limitan su aplicación práctica para el análisis de estabilidad de sistemas integrales con retardos.

Estos problemas motivaron los trabajos [14] y [16], donde se demostró que, basándose en las expresiones generales de funcionales de tipo Lyapunov-Krasovskii presentadas en [15], varias funcionales reducidas pueden ser construidas para obtener condiciones de estabilidad formuladas directamente en términos de los coeficientes de sistemas integrales con retardo.

Concerniente a la temática del análisis de estabilidad robusta para sistemas integrales con retardo, muy recientemente en [17] se han reportado condiciones de estabilidad robusta para una clase particular de sistemas con múltiples retardos y matrices constantes. Se obtuvieron condiciones suficientes para la estabilidad exponencial robusta y estimados exponenciales para sistemas perturbados.

En éste trabajo de tesis continuamos el análisis de estabilidad robusta para sistemas integrales de la forma (1.13) con un kernel  $G(\theta)$  de tipo exponencial. Para dicha clase de sistemas se obtienen condiciones suficientes para la estabilidad robusta de sistemas perturbados. Las condiciones se expresan como desigualdades lineales matriciales que pueden resolverse utilizando algoritmos numéricos existentes.

### **1.3. Organización de la tesis.**

La organización de la tesis es la siguiente. En el Capítulo 1 presentamos la introducción al estudio de sistemas integrales con retardo. En el Capítulo 2 se hace la formulación precisa del problema. En el Capítulo 3 se presentan algunos preliminares sobre sistemas integrales con retardo necesarios para el desarrollo de la tesis. En particular, se introducen los conceptos de solución y estabilidad exponencial para sistemas integrales con retardos, se presenta el resultado principal de Lyapunov-Krasovskii y algunas formulaciones existentes utilizando dicho resultado. Los resultados principales se presentan en el Capítulo 4. Aquí, condiciones de estabilidad robusta para sistemas integrales con un kernel exponencial son presentadas. También se presentan ejemplos numéricos ilustrando los resultados principales. En el Capítulo 5, se presentan las conclusiones y trabajo a futuro. Por último, en el Apéndice se presentan resultados complementarios utilizados en el desarrollo de la tesis.

## Capítulo 2

# Formulación del Problema.

En éste trabajo de tesis consideraremos la siguiente clase de sistemas integrales con retardo

$$x(t) = \int_{-h}^0 C e^{A\theta} B x(t + \theta) d\theta, \quad (2.1)$$

donde  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  y  $h$  es una constante positiva.

Como se mencionó anteriormente en la introducción, sistemas integrales con retardo de la forma (2.1) desempeñan un papel importante en el problema de estabilidad interna de los controladores usados para la asignación de espectro finito de sistemas con retardo en la entrada, un tema que ha recibido atención continua en los últimos años, véase [3, 18, 20, 21, 26, 27], y que fue propuesto como un interesante problema abierto en el artículo de revisión [25]. Éste problema trata con sistemas de la forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - h), \quad (2.2)$$

donde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  y  $h > 0$  es el retardo de entrada.

La ley de control tipo predictor

$$u(t) = C \left( e^{Ah} x(t) + \int_{-h}^0 e^{-A\theta} B u(t + \theta) d\theta \right) \quad (2.3)$$

asigna un espectro finito al sistema en lazo cerrado libre de retardo (2.2)-(2.3) el cual coincide con el espectro de la matriz  $A + BC$ , véase [12].

El significado práctico de tal resultado se encuentra limitado por el fenómeno de inestabilidad vinculado a la implementación numérica del término integral en (2.3). Se ha demostrado en [3, 20, 26] que si la integral es aproximada por una sumatoria finita entonces el sistema con retardo en lazo cerrado puede llegar a ser inestable si el controlador ideal no es internamente estable.

Un resultado definitivo ha sido demostrado en [18]: una condición necesaria y suficiente para una implementación numérica segura (usando cualquier tipo de método de integración) del controlador (2.3) es a la vez la estabilidad del sistema ideal en lazo cerrado (2.2)-(2.3), es decir,  $A + BC$  es Hurwitz, y la estabilidad de la dinámica interna del controlador (2.3), es decir, la estabilidad del sistema integral con retardo (2.1).

El objetivo principal de ésta tesis es obtener condiciones para la estabilidad exponencial robusta de (2.1) utilizando la metodología de funcionales de Lyapunov-Krasovskii desarrollada recientemente en [15] y [16].

De manera más precisa, abordaremos el problema de estabilidad exponencial de sistemas perturbados integrales con retardo de la forma

$$y(t) = \int_{-h}^0 (C + \Delta C) e^{(A + \Delta A)\theta} (B + \Delta B) y(t + \theta) d\theta, \quad (2.4)$$

donde  $\Delta A$ ,  $\Delta B$  y  $\Delta C$  son matrices desconocidas que satisfacen

$$\|\Delta A\| \leq \rho_A, \quad \|\Delta B\| \leq \rho_B \quad \text{y} \quad \|\Delta C\| \leq \rho_C,$$

donde  $\rho_A$ ,  $\rho_B$  y  $\rho_C$  son las cotas de perturbación conocidas de antemano.

El problema de estabilidad robusta cuando existen incertidumbres en las matrices  $A$  y  $B$  está motivado por el hecho de que tales matrices del sistema (2.2) con retardo en la entrada dependen de parámetros físicos los cuales están sujetos a incertidumbres y perturbaciones.

Por otro lado, la motivación de considerar perturbaciones en la ganancia de retroalimentación  $C$  proviene de que en la práctica es necesario hacer una apropiada selección de los coeficientes de los controladores en torno a un diseño nominal para obtener un desempeño de lazo cerrado deseado y también tener en cuenta algunos errores de redondeo y de posible longitud de palabra finita en una implementación computacional del controlador.



El análisis de estabilidad robusta contra las perturbaciones de los coeficientes del controlador es conocido en la literatura como análisis de fragilidad. Un controlador cuyo sistema en lazo cerrado es desestabilizado por pequeñas perturbaciones en los coeficientes del controlador se dice ser frágil, [7].

De hecho, cualquier implementación práctica de un diseño de controlador demanda ser robusto no sólo a incertidumbres de parámetros del sistema sino que también a perturbaciones de los coeficientes del controlador. Como ha sido discutido en [7] y [11], en general, es muy difícil analizar las propiedades de robustez del método para diseño de controladores estabilizantes con respecto a las incertidumbres de los parámetros y perturbaciones de los coeficientes del controlador.

En éste trabajo de tesis abordaremos tal problema para la dinámica interna de la ley de control (2.3) al considerar la estabilidad exponencial del sistema perturbado integral con retardo (2.4) incluyendo tanto incertidumbres en las matrices  $A$ ,  $B$  del sistema así como también perturbaciones en la matriz de ganancia  $C$ .

También consideramos los casos especiales cuando existe una combinación particular de perturbaciones en las matrices  $A$ ,  $B$  del sistema (2.2) y la matriz de ganancia  $C$  de la ley de control (2.3). Tales casos especiales tienen su propia importancia en función del conocimiento del sistema. Por ejemplo, uno puede estar interesado en considerar perturbaciones únicamente en las matrices  $A$  y  $B$  del sistema mientras que la matriz  $C$  permanece constante. Por otro lado, para matrices constantes  $A$  y  $B$ , uno puede considerar perturbaciones sólo en la matriz  $C$  para obtener una bola en el espacio de coeficientes donde estos pueden ser elegidos para garantizar la estabilidad exponencial del sistema.

Al alcance de nuestro de conocimiento, no se ha tratado de resolver estos problemas para el sistema integral con retardo (2.4) en términos de funcionales de Lyapunov-Krasovskii.

# Capítulo 3

## Preliminares.

El objetivo de éste capítulo es presentar las herramientas matemáticas necesarias para el desarrollo de ésta tesis. Se introducen los conceptos de solución y estabilidad exponencial, condiciones de estabilidad exponencial y estabilidad exponencial robusta del tipo Lyapunov-Krasovskii para sistemas integrales con retardo.

### 3.1. Soluciones y concepto de estabilidad.

Para definir una solución particular de

$$x(t) = \int_{-h}^0 G(\theta) x(t + \theta) d\theta, \quad (3.1)$$

donde  $h$  es una constante positiva y la matriz función  $G(\theta)$  tiene elementos diferenciables continuos por pedazos definidos para  $\theta \in [-h, 0]$ , una función inicial  $\varphi(\theta)$ ,  $\theta \in [-h, 0)$  debe ser dada. Consideraremos que  $\varphi$  pertenece al espacio de funciones acotadas continuas por pedazos  $\mathcal{PC}([-h, 0), \mathbb{R}^n)$ , dotado con la norma de convergencia uniforme

$$\|\varphi\|_h = \sup_{\theta \in [-h, 0)} \|\varphi(\theta)\|.$$

Para una función inicial dada  $\varphi \in \mathcal{PC}([-h, 0), \mathbb{R}^n)$ , existe una única solución  $x(t, \varphi)$  de (3.1) la cuál está definida para todo  $t \in [-h, \infty)$ . Ésta solución es continua para todo  $t \in (0, \infty)$ , y

presenta una discontinuidad de salto dada por

$$\Delta x(0, \varphi) \hat{=} x(0, \varphi) - x(0^-, \varphi) = \int_{-h}^0 G(\theta) \varphi(\theta) d\theta - \varphi(0^-).$$

En éste caso, se muestra en [15] que las soluciones de (3.1) coinciden con las soluciones del sistema diferencial con retardo de tiempo

$$\dot{y}(t) = G(0)y(t) - G(-h)y(t-h) - \int_{-h}^0 \dot{G}(\theta)y(t+\theta)d\theta, \quad t \geq 0, \quad (3.2)$$

con la condición inicial

$$\tilde{\varphi}(\theta) = \begin{cases} \varphi(\theta), & \theta \in [-h, 0), \\ \int_{-h}^0 G(\theta)\varphi(\theta)d\theta, & \theta = 0, \end{cases}$$

donde  $\varphi \in \mathcal{PC}([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ .

Denotamos por  $y(t, \tilde{\varphi})$ ,  $t \geq 0$ , la solución de (3.2) con función inicial  $\tilde{\varphi}$ , véase [6]. Existencia y unicidad de  $x(t, \varphi)$ , así como algunas otras propiedades de la solución, pueden ser fácilmente derivadas de la siguiente declaración.

**Lema 1** [15] *Las soluciones de (3.1) coinciden con las soluciones de (3.2).*

**Prueba.** La función  $y(t, \tilde{\varphi})$  satisface

$$\dot{y}(t, \tilde{\varphi}) = G(0)y(t, \tilde{\varphi}) - G(-h)y(t-h, \tilde{\varphi}) - \int_{-h}^0 \dot{G}(\theta)y(t+\theta, \tilde{\varphi})d\theta, \quad t \geq 0.$$

Entonces, integrando ambos lados de la igualdad desde 0 a  $t$  se obtiene

$$\begin{aligned} y(t, \tilde{\varphi}) - \tilde{\varphi}(0) &= G(0) \int_0^t y(\xi, \tilde{\varphi}) d\xi - G(-h) \int_{-h}^{t-h} y(\xi, \tilde{\varphi}) d\xi \\ &\quad - \int_{-h}^0 \dot{G}(\theta) \left( \int_{\theta}^{t+\theta} y(\xi, \tilde{\varphi}) d\xi \right) d\theta \\ &= G(0) \int_0^t y(\xi, \tilde{\varphi}) d\xi - G(-h) \int_{-h}^{t-h} y(\xi, \tilde{\varphi}) d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -G(0) \int_0^t y(\xi, \tilde{\varphi}) d\xi + G(-h) \int_{-h}^{t-h} y(\xi, \tilde{\varphi}) d\xi \\
& + \int_{-h}^0 G(\theta) [y(t+\theta, \tilde{\varphi}) - y(\theta, \tilde{\varphi})] d\theta \\
& = \int_{-h}^0 G(\theta) y(t+\theta, \tilde{\varphi}) d\theta - \int_{-h}^0 G(\theta) \tilde{\varphi}(\theta) d\theta,
\end{aligned}$$

lo que significa que  $y(t, \tilde{\varphi})$  satisface (3.1).

Suponemos ahora que  $x(t, \varphi)$ ,  $t \geq 0$ , satisface (3.1). Obsérvese primero que, para  $t \geq 0$

$$\begin{aligned}
x(t, \varphi) &= \int_{-h}^0 G(\theta) x(t+\theta, \varphi) d\theta \\
&= \int_{t-h}^t G(\xi-t) x(\xi, \varphi) d\xi.
\end{aligned}$$

Se sigue que

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t, \varphi) &= G(0) x(t, \varphi) - G(-h) x(t-h, \varphi) \\
&\quad - \int_{t-h}^t \dot{G}(\xi-t) x(\xi, \varphi) d\xi \\
&= G(0) x(t, \varphi) - G(-h) x(t-h, \varphi) \\
&\quad - \int_{-h}^0 \dot{G}(\theta) x(t+\theta, \varphi) d\theta
\end{aligned}$$

lo que implica que  $x(t, \varphi)$  satisface (3.2).

Por definición la función  $\tilde{\varphi}(\theta)$  coincide con  $\varphi(\theta)$  para  $\theta \in [-h, 0)$ , y

$$x(0, \varphi) = y(0, \tilde{\varphi}) = \tilde{\varphi}(0) = \int_{-h}^0 G(\xi) \varphi(\xi) d\xi.$$

■

**Definición 2** [6] *El sistema (3.1) se dice ser exponencialmente estable si existen  $\alpha > 0$  y  $\mu > 0$  tales que cada solución de (3.1) satisface la desigualdad*

$$\|x(t, \varphi)\| \leq \mu \|\varphi\|_h e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0. \quad (3.3)$$

**Observación 3** *El sistema (3.2) no es exponencialmente estable ya que cualquier vector con-*

stante es una solución de (3.2).

La observación anterior muestra que no es posible utilizar los resultados existentes de Lyapunov-Krasovskii o Lyapunov-Razumikhin para investigar la estabilidad exponencial de los sistemas integrales con retardo.

### 3.2. Condiciones de estabilidad tipo Lyapunov.

Para cualquier  $t \geq 0$ , se denota a la restricción de la solución  $x(t, \varphi)$  sobre el intervalo  $[t-h, t]$  por  $x_t(\varphi)(\theta) \hat{=} x(t+\theta, \varphi)$ ,  $\theta \in [-h, 0)$ , usualmente por simplicidad de notación omitimos el argumento  $\theta$  y escribimos  $x_t(\varphi)$  en lugar de  $x_t(\varphi)(\theta)$ . Cuando la condición inicial es irrelevante escribimos  $x_t$  y  $x(t)$  en lugar de  $x_t(\varphi)$  y  $x(t, \varphi)$ , respectivamente. Una simple inspección muestra que para  $t \in [0, h)$ ,  $x_t(\varphi) \in \mathcal{PC}([-h, 0), \mathbb{R}^n)$ , y para  $t \geq h$ ,  $x_t(\varphi) \in \mathcal{C}([-h, 0), \mathbb{R}^n)$ . Como consecuencia, del marco de referencia de Lyapunov-Krasovskii, las funcionales deben estar definidas en el espacio funcional  $\mathcal{PC}([-h, 0), \mathbb{R}^n)$ .

El teorema donde se proporcionan condiciones de estabilidad exponencial en términos de funcionales de tipo Lyapunov-Krasovskii es el siguiente.

**Teorema 4** [15] *El sistema (3.1) es exponencialmente estable si existe una funcional continua  $v : \mathcal{PC}([-h, 0), \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $t \mapsto v(x_t(\varphi))$  es diferenciable en  $\mathbb{R}_+$ , y las siguientes condiciones se cumplen:*

1.  $\alpha_1 \int_{-h}^0 \|\varphi(\theta)\|^2 d\theta \leq v(\varphi) \leq \alpha_2 \int_{-h}^0 \|\varphi(\theta)\|^2 d\theta$ , para algunos  $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2$ ,
2.  $\frac{d}{dt}v(x_t(\varphi)) \leq -\beta \int_{-h}^0 \|x(t+\theta, \varphi)\|^2 d\theta$ ,  $t \geq 0$ , para algún  $\beta > 0$ .

*Aún más, cualquier solución de (3.1) satisface la desigualdad*

$$\|x(t, \varphi)\| \leq \mu \|\varphi\|_h e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0,$$

donde

$$\begin{aligned}\mu &= m_g h \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}, \\ 2\alpha &= \beta \alpha_2^{-1} > 0, \\ m_g &= \sup_{\theta \in [-h, 0]} \|G(\theta)\|.\end{aligned}$$

Una condición de estabilidad exponencial para el sistema (3.1) que se deriva al utilizar una funcional particular que satisface las condiciones del Teorema 4, es la siguiente:

**Proposición 5** [14] *El sistema (3.1) es exponencialmente estable si*

$$\left( \sup_{\theta \in [-h, 0]} \|G(\theta)\| \right) h < 1. \quad (3.4)$$

Una clase particular de sistema integrales con retardos de la forma (3.1) es

$$x(t) = \sum_{j=1}^m G_j \int_{-h_j}^0 x(t+\theta) d\theta, \quad (3.5)$$

donde  $0 < h_1 < h_2 < \dots < h_m$  y  $G_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ .

De hecho, (3.5) se obtiene de (3.1) para

$$G(\theta) = \begin{cases} G_m, & \theta \in [-h_m, -h_{m-1}), \\ G_m + G_{m-1}, & \theta \in [-h_{m-1}, -h_{m-2}), \\ \vdots & \vdots \\ \sum_{j=0}^{m-1} G_{m-j}, & \theta \in [-h_1, 0). \end{cases}$$

Para sistemas integrales con retardo como (3.5), se han obtenido varias condiciones de estabilidad exponencial de tipo Lyapunov-Krasovskii.

Dado el sistema (3.5), utilizando herramientas frecuenciales basadas en la ecuación característica, se obtuvo el siguiente resultado.

**Proposición 6** [8] *El sistema integral con retardo (3.5) es exponencialmente estable si*

$$\sum_{j=1}^m h_j \|G_j\| < 1. \quad (3.6)$$

Otra condición de estabilidad presentada en [14, 16] es la siguiente.

**Proposición 7** [14, 16] *El sistema (3.5) es exponencialmente estable si existen matrices definidas positivas  $P, Q_j, j = 1, 2, \dots, m$  tales que*

$$Q_j - mh_j G_j^T M G_j > 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (3.7)$$

donde

$$M = P + \sum_{j=1}^m h_j Q_j.$$

Adicionalmente, un estimado exponencial para las soluciones de (3.5) es determinado por

$$\|x(t, \varphi)\| \leq \mu \|\varphi\|_h e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0,$$

donde

$$\mu = h_m \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \left\| \sum_{j=1}^m G_j \right\| \quad \text{y} \quad 2\alpha = \beta \alpha_2^{-1},$$

con

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \lambda_{\min}(P), \\ \alpha_2 &= \lambda_{\max}(P) + \sum_{j=1}^m \lambda_{\max}(h_j Q_j), \\ \beta &= \lambda_{\min} \left( Q_m - mh_m G_m^T \left[ P + \sum_{j=1}^m h_j Q_j \right] G_m \right). \end{aligned}$$

### 3.3. Condiciones de estabilidad robusta tipo Lyapunov.

Consideremos el siguiente sistema perturbado integral con retardo:

$$x(t) = \int_{-h}^0 [G(\theta) + \Delta G(\theta)] x(t + \theta) d\theta, \quad (3.8)$$

donde  $G(\theta)$ ,  $\forall \theta \in [-h, 0]$ , es una matriz función conocida y  $\Delta G(\cdot)$  es una matriz función desconocida con elementos continuos que satisface

$$\|\Delta G(\theta)\| \leq \rho, \quad \forall \theta \in [-h, 0]. \quad (3.9)$$

Recientemente en [17] se obtuvo el siguiente resultado utilizando funcionales de tipo Lyapunov-Krasovskii.

**Proposición 8** [17] *El sistema perturbado descrito por (3.8) y (3.9) es exponencialmente estable si*

$$h \left( \sup_{\theta \in [-h, 0]} \|G(\theta)\| + \rho \right) < 1.$$

Ahora, en el caso particular de sistemas integrales de la forma (3.5), consideremos el sistema integral perturbado con múltiples retardos

$$x(t) = \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 [G_j + \Delta G_j] x(t + \theta) d\theta, \quad (3.10)$$

donde  $0 < h_1 < h_2 < \dots < h_m$ ,  $G_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , son matrices constantes conocidas, y  $\Delta G_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  son matrices constantes desconocidas que satisfacen

$$\|\Delta G_j\| \leq \rho_j, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (3.11)$$

El siguiente enunciado nos permite determinar la estabilidad exponencial robusta para sistemas descritos por (3.10) y (3.11).

**Proposición 9** [17] *El sistema perturbado descrito por (3.10) y (3.11) es exponencialmente estable si existen matrices definidas positivas  $P$ ,  $Q_j$ ,  $X_j$ , y constantes positivas  $\gamma_j$  tales que,*



para  $j = 1, 2, \dots, m$ , las siguientes desigualdades se cumplen:

$$Q_j - mh_j G_j^T [M + X_j] G_j - mh_j \rho_j^2 \gamma_j I > 0, \quad (3.12)$$

$$\begin{pmatrix} X_j & M \\ M & \gamma_j I - M \end{pmatrix} > 0, \quad (3.13)$$

donde  $M = P + \sum_{j=1}^m h_j Q_j$ .

Un estimado exponencial para las soluciones de (3.10) es determinado por

$$\|x(t, \varphi)\| \leq \mu \|\varphi\|_h e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0,$$

donde

$$\mu = h_m \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \left( \sum_{j=1}^m (\|G_j\| + \rho_j) \right) \text{ y } 2\alpha = \beta \alpha_2^{-1},$$

con

$$\alpha_1 = \lambda_{\min}(P),$$

$$\alpha_2 = \lambda_{\max}(P) + \sum_{j=1}^m \lambda_{\max}(h_j Q_j),$$

$$\beta = \lambda_{\min} \left( Q_m - mh_m G_m^T \left[ P + \sum_{j=1}^m (h_j Q_j + X_j) \right] G_m - mh_m \rho_m^2 \gamma_m I \right).$$

Tomaremos estos resultados como base para el análisis de estabilidad exponencial robusta para sistemas integrales perturbados con retardo con un kernel exponencial de la forma en (2.4).

## Capítulo 4

# Estabilidad Robusta de Sistemas Integrales con Kernel Exponencial.

En éste capítulo obtendremos condiciones suficientes para la estabilidad exponencial robusta de sistemas integrales con retardo perturbados de la forma

$$y(t) = \int_{-h}^0 (C + \Delta C) e^{(A+\Delta A)\theta} (B + \Delta B) y(t + \theta) d\theta, \quad (4.1)$$

donde  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $h$  es una constante positiva y  $\Delta A$ ,  $\Delta B$  y  $\Delta C$  son matrices desconocidas que satisfacen

$$\|\Delta A\| \leq \rho_A, \quad \|\Delta B\| \leq \rho_B, \quad \text{y} \quad \|\Delta C\| \leq \rho_C.$$

Obtener condiciones de estabilidad robusta directamente sobre el sistema (4.1) resulta complicado debido a la forma multiplicativa en que las perturbaciones aparecen en el kernel del sistema integral.

A continuación obtendremos un sistema similar desde el punto de vista de la propiedad de estabilidad cuya forma resulta más conveniente para el análisis de robustez.

Para lo anterior, dadas matrices  $A$ ,  $B$  y  $C$  consideremos los sistemas integrales nominales:

$$x(t) = \int_{-h}^0 C e^{A\theta} B x(t + \theta) d\theta, \quad (4.2)$$

y

$$z(t) = \int_{-h}^0 BCe^{A\theta} z(t + \theta) d\theta. \quad (4.3)$$

Para cualquier  $t \geq 0$ ,  $x_t(\varphi) \in \mathcal{C}([-h, 0], \mathbb{R}^m)$  mientras que  $z_t(\tilde{\varphi}) \in \mathcal{C}([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ , donde  $\varphi$  y  $\tilde{\varphi}$  denotan condiciones iniciales para (4.2) y (4.3) respectivamente. De esta manera, las soluciones de los dos sistemas (4.2) y (4.3) están en diferentes espacios funcionales.

No obstante, los dos sistemas integrales con retardo son similares desde el punto de vista de estabilidad.

Ciertamente, utilizando la desigualdad basada en norma de la Proposición 5 para la estabilidad exponencial de sistemas integrales con retardo, y debido al tipo de kernel con el que estamos tratando, se tiene que el sistema (4.2) es exponencialmente estable si

$$h \left( \max_{\theta \in [-h, 0]} \|Ce^{A\theta} B\| \right) < 1,$$

mientras que el sistema (4.3) es exponencialmente estable si

$$h \left( \max_{\theta \in [-h, 0]} \|BCe^{A\theta}\| \right) < 1.$$

Como

$$h \left( \max_{\theta \in [-h, 0]} \|Ce^{A\theta} B\| \right) \leq h \|C\| \|B\| \left( \max_{\theta \in [-h, 0]} \|e^{A\theta}\| \right)$$

y

$$h \left( \max_{\theta \in [-h, 0]} \|BCe^{A\theta}\| \right) \leq h \|C\| \|B\| \left( \max_{\theta \in [-h, 0]} \|e^{A\theta}\| \right)$$

se sigue que si la desigualdad

$$h \|C\| \|B\| \left( \max_{\theta \in [-h, 0]} \|e^{A\theta}\| \right) < 1 \quad (4.4)$$

se satisface entonces los sistemas (4.2) y (4.3) son exponencialmente estables.

En otras palabras, si existen matrices del sistema  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y retardo  $h$  tal que la desigualdad (4.4) se mantiene entonces ambos sistemas (4.2) y (4.3) son exponencialmente estables.

**Definición 10** *El espectro de*

$$z(t) = \int_{-h}^0 G(\theta) z(t + \theta) d\theta$$

*consiste de todas las raíces de la ecuación característica*

$$\det \left[ I - \int_{-h}^0 G(\theta) e^{s\theta} d\theta \right] = 0.$$

El siguiente Lema nos muestra que de hecho el espectro de (4.2) y el de (4.3) son similares en el sentido de que tienen exactamente los mismos valores propios.

**Lema 11** *Los espectros de los sistemas (4.2) y (4.3) son iguales.*

**Prueba.** La función característica de (4.2) es

$$f(s) = \det [I_m - CM(s)B],$$

donde

$$M(s) = \int_{-h}^0 e^{(sI+A)\theta} d\theta.$$

Por las propiedades del determinante (véase el Lema 28, Apéndice A.4) tenemos que

$$\det [I_m - CM(s)B] = \det [I_n - BCM(s)] = g(s)$$

Dado que  $g(s)$  es la función característica de (4.3) se sigue entonces que el espectro de (4.2) y el de (4.3) son iguales. ■

**Observación 12** *El sistema (4.2) es exponencialmente estable si y solo si el sistema (4.3) es exponencialmente estable.*

Basado en los hechos anteriores, en vez de considerar el sistema perturbado (4.1) para abordar el problema de estabilidad robusta del sistema nominal (4.2) vamos a considerar el sistema perturbado

$$z(t) = \int_{-h}^0 (B + \Delta B)(C + \Delta C) e^{(A+\Delta A)\theta} z(t + \theta) d\theta, \quad (4.5)$$

donde  $\Delta A$ ,  $\Delta B$  y  $\Delta C$  son matrices desconocidas que satisfacen

$$\|\Delta A\| \leq \rho_A, \quad \|\Delta B\| \leq \rho_B, \quad \text{y} \quad \|\Delta C\| \leq \rho_C. \quad (4.6)$$

Observemos que de la desigualdad basada en norma (4.4) uno puede fácilmente derivar condiciones de estabilidad robusta.

**Proposición 13** *El sistema perturbado descrito por (4.5) y (4.6) con  $\rho_A = 0$  es exponencialmente estable si la siguiente desigualdad se satisface:*

$$h(\|C\| + \rho_C)(\|B\| + \rho_B) \left( \max_{\theta \in [-h, 0]} \|e^{A\theta}\| \right) < 1. \quad (4.7)$$

**Prueba.** De (4.4) se sigue que si

$$h\|C + \Delta C\| \|B + \Delta B\| \left( \max_{\theta \in [-h, 0]} \|e^{A\theta}\| \right) < 1$$

se mantiene entonces el sistema perturbado (4.5) con  $\rho_A = 0$  es exponencialmente estable.

Una condición suficiente para la desigualdad anterior es que la desigualdad (4.7) se satisfaga.

■

Cuando existe perturbación en la matriz  $A$  se tiene el siguiente resultado.

**Proposición 14** *El sistema perturbado descrito por (4.5) y (4.6) es exponencialmente estable si la siguiente desigualdad se satisface:*

$$h(\|C\| + \rho_C)(\|B\| + \rho_B) \left( e^{\|A\|h} \right) \left( e^{h\rho_A} \right) < 1. \quad (4.8)$$

**Prueba.** Primeramente observemos que para cualquier matriz  $A$  la siguiente desigualdad se satisface

$$\|e^{A\theta}\| \leq e^{\|A\|h}, \quad \forall \theta \in [-h, 0].$$

Entonces, en el caso perturbado se tiene que

$$\|e^{(A+\Delta A)\theta}\| \leq e^{\|A+\Delta A\|h}, \quad \forall \theta \in [-h, 0].$$

La desigualdad del triángulo y la propiedad estrictamente creciente de la función exponencial implica que:

$$\begin{aligned} e^{\|A+\Delta A\|h} &\leq e^{(\|A\|+\|\Delta A\|)h} \\ &= \left(e^{\|A\|h}\right) \left(e^{\|\Delta A\|h}\right) \leq \left(e^{\|A\|h}\right) \left(e^{h\rho_A}\right). \end{aligned}$$

En consecuencia se tiene que

$$\max_{\theta \in [-h, 0]} \left\| e^{(A+\Delta A)\theta} \right\| \leq \left(e^{\|A\|h}\right) \left(e^{h\rho_A}\right).$$

Utilizando la desigualdad anterior en (4.7) se obtiene (4.8) y el resultado deseado. ■

Note que cuando  $\rho_A = 0$  en (4.8), la desigualdad no se reduce a (4.7). De hecho, en éste caso cuando  $\rho_A = 0$ , la desigualdad (4.8) es mas conservadora que (4.7).

## 4.1. Resultados principales.

### 4.1.1. Caso general.

Aquí se presentan condiciones suficientes para la estabilidad exponencial del sistema perturbado integral con retardo (4.5) cuando existen perturbaciones en todas las matrices  $A$ ,  $B$  y  $C$  del sistema.

**Teorema 15** *El sistema perturbado descrito por (4.5) y (4.6) es exponencialmente estable si existen matrices definidas positivas  $P$ ,  $Q$ ,  $X$ ,  $Y$ , y escalares positivos  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$  tales que*

$$\mathcal{N}_{n_1}(P, Q, X, Y) - \gamma_1 \mathcal{N}_{p_1}(\rho_A) - \gamma_2 \mathcal{N}_{p_2}(\rho_B, \rho_C) - \gamma_3 \mathcal{N}_{p_3}(\rho_B) > 0, \quad (4.9)$$

$$\mathcal{N}_{n_2}(P, Q, X, Y) - \gamma_1 \mathcal{N}_{p_1}(\rho_A) - \gamma_2 \mathcal{N}_{p_2}(\rho_B, \rho_C) - \gamma_3 \mathcal{N}_{p_3}(\rho_B) > 0, \quad (4.10)$$

$$\begin{pmatrix} X & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \gamma_2 I_n - \mathcal{M} \end{pmatrix} > 0, \quad (4.11)$$

$$\begin{pmatrix} Y & \mathcal{M} + X \\ \mathcal{M} + X & \gamma_3 I_n - \mathcal{M} - X \end{pmatrix} > 0, \quad (4.12)$$

$$\gamma_1 I_n - \mathcal{M} > 0, \quad (4.13)$$

donde  $\mathcal{M} = P + hQ$ , y

$$\mathcal{N}_{n_1}(P, Q, X, Y) = Q + A^T \mathcal{M} + \mathcal{M}A - hC^T B^T [\mathcal{M} + X + Y] BC, \quad (4.14)$$

$$\mathcal{N}_{n_2}(P, Q, X, Y) = Q + A^T P + PA - hC^T B^T [\mathcal{M} + X + Y] BC, \quad (4.15)$$

$$\mathcal{N}_{p_1}(\rho_A) = 2\rho_A I_n, \quad (4.16)$$

$$\mathcal{N}_{p_2}(\rho_B, \rho_C) = h\rho_C^2 \left( \|B\|^2 + 2\rho_B \|B\| + \rho_B^2 \right) I_n, \quad (4.17)$$

$$\mathcal{N}_{p_3}(\rho_B) = h\rho_B^2 \|C\|^2 I_n. \quad (4.18)$$

**Prueba.** Para cualquier  $\varphi \in \mathcal{C}([-h, 0], \mathbb{R}^n)$  arbitraria, vamos a considerar la siguiente funcional:

$$v(\varphi) = \int_{-h}^0 \varphi^T(\theta) \left( e^{(A+\Delta A)\theta} \right)^T [P + (\theta + h)Q] e^{(A+\Delta A)\theta} \varphi(\theta) d\theta, \quad (4.19)$$

donde  $P$  y  $Q$  son matrices definidas positivas  $n \times n$ .

De (4.19) se sigue que

$$\begin{aligned} v(\varphi) &\leq \lambda_{\max}(P + hQ) \int_{-h}^0 \varphi^T(\theta) \left( e^{(A+\Delta A)\theta} \right)^T e^{(A+\Delta A)\theta} \varphi(\theta) d\theta \\ &\leq \lambda_{\max}(P + hQ) \int_{-h}^0 \lambda_{\max} \left( \left( e^{(A+\Delta A)\theta} \right)^T e^{(A+\Delta A)\theta} \right) \|\varphi(\theta)\|^2 d\theta \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} v(\varphi) &\geq \lambda_{\min}(P) \int_{-h}^0 \varphi^T(\theta) \left( e^{(A+\Delta A)\theta} \right)^T e^{(A+\Delta A)\theta} \varphi(\theta) d\theta \\ &\geq \lambda_{\min}(P) \int_{-h}^0 \lambda_{\min} \left( \left( e^{(A+\Delta A)\theta} \right)^T e^{(A+\Delta A)\theta} \right) \|\varphi(\theta)\|^2 d\theta. \end{aligned}$$

Puesto que  $e^{(A+\Delta A)\theta}$  es no singular para todo  $\theta \in [-h, 0]$  y cualesquiera matrices  $A$  y  $\Delta A$ , tenemos

$$\lambda_{\max} \left( \left( e^{(A+\Delta A)\theta} \right)^T e^{(A+\Delta A)\theta} \right) \geq \lambda_{\min} \left( \left( e^{(A+\Delta A)\theta} \right)^T e^{(A+\Delta A)\theta} \right) > 0, \forall \theta \in [-h, 0],$$

y, por lo tanto, la funcional (4.19) satisface las siguientes desigualdades:

$$\alpha_1 \int_{-h}^0 \|\varphi(\theta)\|^2 d\theta \leq v(\varphi) \leq \alpha_2 \int_{-h}^0 \|\varphi(\theta)\|^2 d\theta,$$

con  $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2$  dadas por

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \lambda_{\min}(P) \min_{\theta \in [-h, 0]} \left\{ \lambda_{\min} \left( \left( e^{(A+\Delta A)\theta} \right)^T e^{(A+\Delta A)\theta} \right) \right\}, \\ \alpha_2 &= \lambda_{\max}(P + hQ) \max_{\theta \in [-h, 0]} \left\{ \lambda_{\max} \left( \left( e^{(A+\Delta A)\theta} \right)^T e^{(A+\Delta A)\theta} \right) \right\}. \end{aligned}$$

La derivada con respecto al tiempo de la funcional (4.19) a través de las soluciones del sistema perturbado (4.5) es

$$\begin{aligned} \frac{dv(z_t)}{dt} &= \left( \int_{-h}^0 (B + \Delta B)(C + \Delta C) e^{(A+\Delta A)\theta} z(t + \theta) d\theta \right)^T \mathcal{M} \\ &\times \left( \int_{-h}^0 (B + \Delta B)(C + \Delta C) e^{(A+\Delta A)\theta} z(t + \theta) d\theta \right) - z^T(t - h) \left( e^{-Ah} \right)^T P e^{-Ah} z(t - h) \\ &- \int_{-h}^0 z^T(t + \theta) \left( e^{(A+\Delta A)\theta} \right)^T \{ Q + A^T [P + (\theta + h)Q] + [P + (\theta + h)Q] A \} \\ &\times e^{(A+\Delta A)\theta} z(t + \theta) d\theta - \int_{-h}^0 z^T(t + \theta) \left( e^{(A+\Delta A)\theta} \right)^T \times \\ &\left\{ (\Delta A)^T [P + (\theta + h)Q] + [P + (\theta + h)Q] (\Delta A) \right\} e^{(A+\Delta A)\theta} z(t + \theta) d\theta, \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{M} = P + hQ$ .

Ahora obtendremos una cota superior de los términos que involucran perturbaciones en la derivada de la funcional. Con el fin de simplificar la notación para los cálculos subsecuentes vamos a definir  $\xi \triangleq \xi(\theta) = e^{(A+\Delta A)\theta} z(t + \theta)$ ,  $\theta \in [-h, 0]$ .

Tenemos

$$\begin{aligned} & -\xi^T \left\{ (\Delta A)^T [P + (\theta + h)Q] + [P + (\theta + h)Q] (\Delta A) \right\} \xi \\ &= -2\xi^T (\Delta A)^T [P + (\theta + h)Q] \xi \\ &\leq 2 \|(\Delta A) \xi\| \|[P + (\theta + h)Q] \xi\|, \end{aligned} \tag{4.20}$$

donde la última desigualdad es obtenida al usar la desigualdad de Cauchy-Schwartz en  $\mathbb{R}^n$ .



Sea  $\gamma_1 > 0$  tal que

$$P + (\theta + h)Q < \gamma_1 I_n, \forall \theta \in [-h, 0]. \quad (4.21)$$

Entonces la siguiente desigualdad se mantiene:

$$\|[P + (\theta + h)Q] \xi\| \leq \gamma_1 \|\xi\|.$$

Usando la desigualdad anterior y la cota superior para la matriz  $\Delta A$  en (4.20) obtenemos

$$-\xi^T \left\{ (\Delta A)^T [P + (\theta + h)Q] + [P + (\theta + h)Q] (\Delta A) \right\} \xi \leq 2\rho_A \gamma_1 \|\xi\|^2. \quad (4.22)$$

De la desigualdad integral de Jensen (véase el Apéndice A.2), la desigualdad

$$\begin{aligned} & \left( \int_{-h}^0 (B + \Delta B) (C + \Delta C) \xi(\theta) d\theta \right)^T \mathcal{M} \left( \int_{-h}^0 (B + \Delta B) (C + \Delta C) \xi(\theta) d\theta \right) \\ & \leq h \int_{-h}^0 \xi^T(\theta) (C + \Delta C)^T (B + \Delta B)^T \mathcal{M} (B + \Delta B) (C + \Delta C) \xi(\theta) d\theta \end{aligned}$$

se satisface. Observando que

$$\begin{aligned} & \xi^T (C + \Delta C)^T (B + \Delta B)^T \mathcal{M} (B + \Delta B) (C + \Delta C) \xi \\ = & \xi^T C^T (B + \Delta B)^T \mathcal{M} (B + \Delta B) C \xi + 2\xi^T C^T (B + \Delta B)^T \mathcal{M} (B + \Delta B) (\Delta C) \xi \\ & + \xi^T (\Delta C)^T (B + \Delta B)^T \mathcal{M} (B + \Delta B) (\Delta C) \xi. \end{aligned}$$

y que para cualquier matriz definida positiva  $X$  la desigualdad

$$\begin{aligned} & 2\xi^T C^T (B + \Delta B)^T \mathcal{M} (B + \Delta B) (\Delta C) \xi \\ = & 2[(B + \Delta B) C \xi]^T [\mathcal{M} (B + \Delta B) (\Delta C) \xi] \\ \leq & \xi^T C^T (B + \Delta B)^T X (B + \Delta B) C \xi \\ & + \xi^T (\Delta C)^T (B + \Delta B)^T \mathcal{M} X^{-1} \mathcal{M} (B + \Delta B) (\Delta C) \xi \end{aligned}$$

se satisface (véase el Apéndice A.3), obtenemos

$$\begin{aligned}
& \xi^T (C + \Delta C)^T (B + \Delta B)^T \mathcal{M} (B + \Delta B) (C + \Delta C) \xi \\
\leq & \xi^T C^T B^T [\mathcal{M} + X] B C \xi + 2\xi^T C^T B^T [\mathcal{M} + X] (\Delta B) C \xi \\
& + \xi^T C^T (\Delta B)^T [\mathcal{M} + X] (\Delta B) C \xi \\
& + \xi^T (\Delta C)^T (B + \Delta B)^T [\mathcal{M} + \mathcal{M}X^{-1}\mathcal{M}] (B + \Delta B) (\Delta C) \xi. \tag{4.23}
\end{aligned}$$

Usando la desigualdad

$$\begin{aligned}
& 2\xi^T C^T B^T [\mathcal{M} + X] (\Delta B) C \xi = 2 [BC\xi]^T [(\mathcal{M} + X) (\Delta B) C \xi] \\
\leq & \xi^T C^T B^T Y B C \xi + \xi^T C^T (\Delta B)^T (\mathcal{M} + X) Y^{-1} (\mathcal{M} + X) (\Delta B) C \xi,
\end{aligned}$$

donde  $Y$  es cualquier matriz definida positiva, en (4.23) obtenemos la siguiente estimación:

$$\begin{aligned}
& \xi^T (C + \Delta C)^T (B + \Delta B)^T \mathcal{M} (B + \Delta B) (C + \Delta C) \xi \\
\leq & \xi^T C^T B^T [\mathcal{M} + X + Y] B C \xi \\
& + \xi^T C^T (\Delta B)^T [\mathcal{M} + X + (\mathcal{M} + X) Y^{-1} (\mathcal{M} + X)] (\Delta B) C \xi \\
& + \xi^T (\Delta C)^T (B + \Delta B)^T [\mathcal{M} + \mathcal{M}X^{-1}\mathcal{M}] (B + \Delta B) (\Delta C) \xi. \tag{4.24}
\end{aligned}$$

Sea  $\gamma_2 > 0$  y  $\gamma_3 > 0$  tales que

$$\mathcal{M} + \mathcal{M}X^{-1}\mathcal{M} < \gamma_2 I_n, \tag{4.25}$$

$$\mathcal{M} + X + (\mathcal{M} + X) Y^{-1} (\mathcal{M} + X) < \gamma_3 I_n. \tag{4.26}$$

Entonces, las desigualdades

$$\xi^T C^T (\Delta B)^T [\mathcal{M} + X + (\mathcal{M} + X) Y^{-1} (\mathcal{M} + X)] (\Delta B) C \xi \leq \gamma_3 \|(\Delta B) C \xi\|^2$$

y

$$\begin{aligned} & \xi^T (\Delta C)^T (B + \Delta B)^T [\mathcal{M} + \mathcal{M}X^{-1}\mathcal{M}] (B + \Delta B) (\Delta C) \xi \\ & \leq \gamma_2 \xi^T (\Delta C)^T (B + \Delta B)^T (B + \Delta B) (\Delta C) \xi \end{aligned}$$

se mantienen. Observando que

$$\begin{aligned} & \gamma_2 \xi^T (\Delta C)^T (B + \Delta B)^T (B + \Delta B) (\Delta C) \xi \\ = & \gamma_2 \|B (\Delta C) \xi\|^2 + 2\gamma_2 \xi^T (\Delta C)^T B^T (\Delta B) (\Delta C) \xi + \gamma_2 \|(\Delta B) (\Delta C) \xi\|^2 \end{aligned}$$

y que, por la desigualdad de Cauchy-Schwartz en  $\mathbb{R}^n$ ,

$$2\gamma_2 \xi^T (\Delta C)^T B^T (\Delta B) (\Delta C) \xi \leq 2\gamma_2 \|B (\Delta C) \xi\| \|(\Delta B) (\Delta C) \xi\|$$

obtenemos, al usar las cotas superiores para las matrices  $\Delta B$  y  $\Delta C$ , las siguientes desigualdades:

$$\xi^T C^T (\Delta B)^T [\mathcal{M} + X + (\mathcal{M} + X)Y^{-1}(\mathcal{M} + X)] (\Delta B) C \xi \leq \gamma_3 \rho_B^2 \|C\|^2 \|\xi\|^2, \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} & \xi^T (\Delta C)^T (B + \Delta B)^T [\mathcal{M} + \mathcal{M}X^{-1}\mathcal{M}] (B + \Delta B) (\Delta C) \xi \\ & \leq \gamma_2 \rho_C^2 \|B\|^2 \|\xi\|^2 + 2\gamma_2 \rho_C^2 \rho_B \|B\| \|\xi\|^2 + \gamma_2 \rho_B^2 \rho_C^2 \|\xi\|^2. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Tomando en cuenta las desigualdades (4.27) y (4.28) en (4.24) obtenemos la siguiente estimación:

$$\begin{aligned} & \xi^T (C + \Delta C)^T (B + \Delta B)^T \mathcal{M} (B + \Delta B) (C + \Delta C) \xi \\ & \leq \xi^T C^T B^T [\mathcal{M} + X + Y] B C \xi + \gamma_2 \rho_C^2 \left( \|B\|^2 + 2\rho_B \|B\| + \rho_B^2 \right) \|\xi\|^2 + \gamma_3 \rho_B^2 \|C\|^2 \|\xi\|^2. \end{aligned}$$

De ésta desigualdad y (4.22) llegamos a la siguiente cota superior para la derivada de la funcional:

$$\begin{aligned} \frac{dv(z_t)}{dt} &\leq h \int_{-h}^0 z^T(t+\theta) \left( e^{(A+\Delta A)\theta} \right)^T \left\{ C^T B^T [\mathcal{M} + X + Y] BC + \gamma_3 \rho_B^2 \|C\|^2 I_n \right. \\ &\quad \left. + \gamma_2 \rho_C^2 \left( \|B\|^2 + 2\rho_B \|B\| + \rho_B^2 \right) I_n + 2\rho_A \gamma_1 I_n \right\} e^{(A+\Delta A)\theta} z(t+\theta) d\theta \\ &\quad - \int_{-h}^0 z^T(t+\theta) \left( e^{(A+\Delta A)\theta} \right)^T \left\{ Q + A^T [P + (\theta+h)Q] + [P + (\theta+h)Q] A \right\} \\ &\quad \times e^{(A+\Delta A)\theta} z(t+\theta) d\theta \end{aligned}$$

que puede ser reescrita como

$$\frac{dv(z_t)}{dt} \leq - \int_{-h}^0 z^T(t+\theta) \left( e^{(A+\Delta A)\theta} \right)^T \Gamma(\theta) e^{(A+\Delta A)\theta} z(t+\theta) d\theta,$$

donde  $\Gamma(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  para  $\theta \in [-h, 0]$  está dada por

$$\begin{aligned} \Gamma(\theta) &= Q + A^T [P + (\theta+h)Q] + [P + (\theta+h)Q] A - h C^T B^T [M + X + Y] BC \\ &\quad - \gamma_1 \mathcal{N}_{p_1}(\rho_A) - \gamma_2 \mathcal{N}_{p_2}(\rho_B, \rho_C) - \gamma_3 \mathcal{N}_{p_2}(\rho_B), \end{aligned}$$

con  $\mathcal{N}_{p_1}(\rho_A)$ ,  $\mathcal{N}_{p_2}(\rho_B, \rho_C)$  y  $\mathcal{N}_{p_2}(\rho_B)$  definidas por (4.16), (4.17) y (4.18), respectivamente.

Claramente, si  $\Gamma(\theta) > 0, \forall \theta \in [-h, 0]$ , entonces existe

$$\beta = \min_{\theta \in [-h, 0]} \left\{ \lambda_{\min} \left( e^{(A+\Delta A)\theta} \right)^T \Gamma(\theta) e^{(A+\Delta A)\theta} \right\} > 0$$

tal que

$$\frac{dv(z_t)}{dt} < -\beta \int_{-h}^0 \|z(t+\theta)\|^2 d\theta,$$

y la estabilidad exponencial del sistema perturbado es garantizada por el Teorema 4.

Lo anterior nos lleva a verificar la positividad de un conjunto infinito de matrices. Observando que

$$(1 - \alpha(\theta)) \Gamma(0) + \alpha(\theta) \Gamma(-h) = \Gamma(\theta), \quad \forall \theta \in [-h, 0],$$

con  $\alpha(\theta) = -\frac{\theta}{h}$  y que  $\alpha(\theta) \in [0, 1], \forall \theta \in [-h, 0]$ , concluimos que  $\Gamma(\theta)$  es una función convexa.

De la convexidad de  $\Gamma(\theta)$ , se sigue que  $\Gamma(\theta) > 0, \forall \theta \in [-h, 0]$ , si y solo si  $\Gamma(0) > 0$  y  $\Gamma(-h) > 0$ .

Al evaluar  $\Gamma(\theta)$  para  $\theta = 0$  y  $\theta = -h$  tenemos

$$\begin{aligned}\Gamma(0) &= \mathcal{N}_{n_1}(P, Q, X, Y) - \gamma_1 \mathcal{N}_{p_1}(\rho_A) - \gamma_2 \mathcal{N}_{p_1}(\rho_B, \rho_C) - \gamma_3 \mathcal{N}_{p_2}(\rho_B), \\ \Gamma(-h) &= \mathcal{N}_{n_2}(P, Q, X, Y) - \gamma_1 \mathcal{N}_{p_1}(\rho_A) - \gamma_2 \mathcal{N}_{p_1}(\rho_B, \rho_C) - \gamma_3 \mathcal{N}_{p_2}(\rho_B),\end{aligned}$$

donde  $\mathcal{N}_{n_1}(P, Q, X, Y)$  y  $\mathcal{N}_{n_2}(P, Q, X, Y)$  están definidas por (4.14) y (4.15) respectivamente.

$\Gamma(0) > 0$  y  $\Gamma(-h) > 0$  llevan a las desigualdades (4.9) y (4.10).

Observando que, por el complemento de Schur (véase el Apéndice A.1), las desigualdades (4.25) y (4.26) son respectivamente equivalentes a (4.11) y (4.12), y que la desigualdad (4.13), esto es,

$$\mathcal{M} = P + hQ < \gamma_1 I_n,$$

implica (4.21), se finaliza la prueba. ■

**Observación 16** *Observemos que la funcional (4.19) involucra no sólo la matriz nominal  $A$  sino que también la matriz de perturbación  $\Delta A$ . Ésta característica especial de la funcional nos permite obtener condiciones de estabilidad robusta para cualquier matriz de perturbación arbitraria  $\Delta A$  con la única suposición que satisfaga que sea acotada en norma.*

#### 4.1.2. Caso nominal.

En el caso nominal, cuando no existe perturbación en las matrices  $A$ ,  $B$  y  $C$  del sistema, tenemos el sistema integral con retardo

$$z(t) = \int_{-h}^0 BC e^{A\theta} z(t + \theta) d\theta. \quad (4.29)$$

**Corolario 17** *El sistema integral con retardo (4.29) es exponencialmente estable si existen matrices definidas positivas  $P$  y  $Q$  tales que*

$$Q + A^T [P + hQ] + [P + hQ] A - hC^T B^T [P + hQ] BC > 0, \quad (4.30)$$

$$Q + A^T P + PA - hC^T B^T [P + hQ] BC > 0. \quad (4.31)$$

**Prueba.** Debido a que tenemos  $\rho_A = \rho_B = \rho_C = 0$  entonces se sigue de (4.16), (4.17) y (4.18) que las matrices  $\mathcal{N}_{p_1}(\rho_A)$ ,  $\mathcal{N}_{p_2}(\rho_B, \rho_C)$  y  $\mathcal{N}_{p_3}(\rho_B)$  son iguales a cero y, por consiguiente, las desigualdades (4.9) y (4.10) se mantienen para cualesquiera constantes arbitrarias positivas  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  y  $\gamma_3$ .

Seleccionando  $\gamma_1$  suficientemente grande la restricción impuesta sobre la matriz  $\mathcal{M}$  por la desigualdad (4.13), esto es,

$$\gamma_1 I_n > \mathcal{M},$$

puede ser removida.

Ahora, por el complemento de Schur, la desigualdad (4.11) es equivalente a

$$\gamma_2 I_n > \mathcal{M} + \mathcal{M}X^{-1}\mathcal{M}.$$

Dado que  $\gamma_2$  puede ser elegida arbitrariamente entonces la desigualdad anterior se mantiene para  $X = \varepsilon_1 I$  con  $\varepsilon_1 > 0$  suficientemente pequeño y  $\gamma_2 > 0$  suficientemente grande.

De manera similar, la desigualdad (4.12) es equivalente a

$$\gamma_3 I_n > (\mathcal{M} + X) + (\mathcal{M} + X)Y^{-1}(\mathcal{M} + X).$$

Nuevamente, ya que  $\gamma_3$  puede ser elegida arbitrariamente entonces la desigualdad anterior se mantiene para  $Y = \varepsilon_2 I$  con  $\varepsilon_2 > 0$  suficientemente pequeño y  $\gamma_3 > 0$  suficientemente grande.

Haciendo que  $\varepsilon_1 \rightarrow +0$  y  $\varepsilon_2 \rightarrow +0$ , las restricciones dadas por las desigualdades (4.11) y (4.12) pueden ser removidas mientras que las matrices  $\mathcal{N}_{n_1}(P, Q, X, Y)$  y  $\mathcal{N}_{n_2}(P, Q, X, Y)$  toman la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{n_1}(P, Q, X, Y) &= Q + A^T \mathcal{M} + \mathcal{M}A - hC^T B^T \mathcal{M}BC, \\ \mathcal{N}_{n_2}(P, Q, X, Y) &= Q + A^T P + PA - hC^T B^T \mathcal{M}BC. \end{aligned}$$

De esto y  $\mathcal{N}_{p_1}(\rho_A) = \mathcal{N}_{p_2}(\rho_B, \rho_C) = \mathcal{N}_{p_3}(\rho_B) = 0_n$ , las desigualdades (4.9) y (4.10) se convierten en (4.30) y (4.31), respectivamente. ■

Ahora, abordaremos el problema de estabilidad robusta de sistemas perturbados integrales con retardo obtenidos al considerar combinaciones particulares de perturbaciones sobre las

matrices  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Existen seis posibles combinaciones en las matrices de perturbaciones  $A$ ,  $B$  y  $C$  lo cual lleva a seis diferentes sistemas perturbados integrales con retardo.

En lo siguiente, estableceremos condiciones suficientes para la estabilidad exponencial robusta de cada uno de esos sistemas perturbados.

En todos los casos, los resultados son derivados directamente del Teorema 15 y la prueba del Corolario 17 al considerar la correspondiente combinación cuando una o dos de las perturbaciones son idénticamente cero.

### 4.1.3. Caso cuando $\Delta A = 0_{n \times n}$ .

**Caso cuando  $\Delta A = 0_{n \times n}$ ,  $\Delta B \neq 0_{n \times m}$  y  $\Delta C \neq 0_{m \times n}$ .**

En éste caso tenemos el siguiente sistema integral con retardo:

$$z(t) = \int_{-h}^0 (B + \Delta B)(C + \Delta C) e^{A\theta} z(t + \theta) d\theta, \quad (4.32)$$

donde

$$\|\Delta B\| \leq \rho_B \text{ y } \|\Delta C\| \leq \rho_C \quad (4.33)$$

**Corolario 18** *El sistema perturbado descrito por (4.32) y (4.33) es exponencialmente estable si existen matrices definidas positivas  $P$ ,  $Q$ ,  $X$ ,  $Y$  y constantes positivas  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  tales que las siguientes desigualdades se satisfacen:*

$$\mathcal{N}_{n_1}(P, Q, X, Y) - \gamma_1 \mathcal{N}_{p_2}(\rho_B, \rho_C) - \gamma_2 \mathcal{N}_{p_3}(\rho_B) > 0, \quad (4.34)$$

$$\mathcal{N}_{n_2}(P, Q, X, Y) - \gamma_1 \mathcal{N}_{p_2}(\rho_B, \rho_C) - \gamma_2 \mathcal{N}_{p_3}(\rho_B) > 0, \quad (4.35)$$

$$\begin{pmatrix} X & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \gamma_1 I_n - \mathcal{M} \end{pmatrix} > 0, \quad (4.36)$$

$$\begin{pmatrix} Y & \mathcal{M} + X \\ \mathcal{M} + X & \gamma_2 I_n - \mathcal{M} - X \end{pmatrix} > 0, \quad (4.37)$$

donde  $\mathcal{M} = P + hQ$  y  $\mathcal{N}_{n_1}(P, Q, X, Y)$ ,  $\mathcal{N}_{n_2}(P, Q, X, Y)$ ,  $\mathcal{N}_{p_2}(\rho_B, \rho_C)$ ,  $\mathcal{N}_{p_3}(\rho_B)$  son dadas respectivamente por (4.14), (4.15), (4.17) y (4.18).

**Caso cuando**  $\Delta A = 0_{n \times n}$ ,  $\Delta B = 0_{n \times m}$  **y**  $\Delta C \neq 0_{m \times n}$ .

En éste caso, el sistema (4.5) es de la forma

$$z(t) = \int_{-h}^0 B(C + \Delta C) e^{A\theta} z(t + \theta) d\theta, \quad (4.38)$$

donde  $\Delta C$  es desconocida y satisface

$$\|\Delta C\| \leq \rho_C. \quad (4.39)$$

**Corolario 19** *El sistema perturbado descrito por (4.38) y (4.39) es exponencialmente estable si existen matrices definidas positivas  $P$ ,  $Q$ ,  $X$  y una constante positiva  $\gamma$  tales que las siguientes desigualdades se satisfacen:*

$$Q + A^T \mathcal{M} + \mathcal{M} A - hC^T B^T [\mathcal{M} + X] BC - \gamma h \rho_C^2 \|B\|^2 I_n > 0, \quad (4.40)$$

$$Q + A^T P + PA - hC^T B^T [\mathcal{M} + X] BC - \gamma h \rho_C^2 \|B\|^2 I_n > 0, \quad (4.41)$$

$$\begin{pmatrix} X & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \gamma I_n - \mathcal{M} \end{pmatrix} > 0, \quad (4.42)$$

donde  $\mathcal{M} = P + hQ$ .

**Caso cuando**  $\Delta A = 0_{n \times n}$ ,  $\Delta B \neq 0_{n \times m}$  **y**  $\Delta C = 0_{m \times n}$ .

En éste caso, el sistema (4.5) toma la forma

$$z(t) = \int_{-h}^0 (B + \Delta B) C e^{A\theta} z(t + \theta) d\theta, \quad (4.43)$$

donde  $\Delta B$  es desconocida y satisface

$$\|\Delta B\| \leq \rho_B. \quad (4.44)$$

**Corolario 20** *El sistema perturbado descrito por (4.43) y (4.44) es exponencialmente estable si existen matrices definidas positivas  $P$ ,  $Q$ ,  $Y$  y una constante positiva  $\gamma$  tales que las desigual-*



dades siguientes se satisfacen:

$$Q + A^T \mathcal{M} + \mathcal{M}A - hC^T B^T [\mathcal{M} + Y] BC - \gamma h \rho_B^2 \|C\|^2 I_n > 0, \quad (4.45)$$

$$Q + A^T P + PA - hC^T B^T [\mathcal{M} + Y] BC - \gamma h \rho_B^2 \|C\|^2 I_n > 0, \quad (4.46)$$

$$\begin{pmatrix} Y & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \gamma I_n - \mathcal{M} \end{pmatrix} > 0, \quad (4.47)$$

donde  $\mathcal{M} = P + hQ$ .

#### 4.1.4. Caso cuando $\Delta A \neq 0_{n \times n}$ .

**Caso cuando  $\Delta A \neq 0_{n \times n}$ ,  $\Delta B = 0_{n \times m}$  y  $\Delta C = 0_{m \times n}$ .**

En éste caso, el sistema (4.5) es de la forma

$$z(t) = \int_{-h}^0 BC e^{(A+\Delta A)\theta} z(t+\theta) d\theta, \quad (4.48)$$

donde  $\Delta A$  es desconocida y satisface

$$\|\Delta A\| \leq \rho_A. \quad (4.49)$$

**Corolario 21** *El sistema perturbado descrito por (4.48) y (4.49) es exponencialmente estable si existen matrices definidas positivas  $P$ ,  $Q$  y una constante positiva  $\gamma$  tales que las siguientes desigualdades se satisfacen:*

$$Q + A^T \mathcal{M} + \mathcal{M}A - hC^T B^T \mathcal{M}BC - 2\gamma \rho_A I_n > 0, \quad (4.50)$$

$$Q + A^T P + PA - hC^T B^T \mathcal{M}BC - 2\gamma \rho_A I_n > 0, \quad (4.51)$$

$$\gamma I_n - \mathcal{M} > 0, \quad (4.52)$$

donde  $\mathcal{M} = P + hQ$ .

**Caso cuando**  $\Delta A \neq 0_{n \times n}$ ,  $\Delta B = 0_{n \times m}$  y  $\Delta C \neq 0_{m \times n}$ .

En éste caso, el sistema (4.5) toma la forma

$$z(t) = \int_{-h}^0 B(C + \Delta C) e^{(A + \Delta A)\theta} z(t + \theta) d\theta, \quad (4.53)$$

donde  $\Delta A$  y  $\Delta C$  son matrices desconocidas que satisfacen

$$\|\Delta A\| \leq \rho_A \text{ y } \|\Delta C\| \leq \rho_C. \quad (4.54)$$

**Corolario 22** *El sistema perturbado descrito por (4.53) y (4.54) es exponencialmente estable si existen matrices definidas positivas  $P$ ,  $Q$ ,  $Y$  y constantes positivas  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  tales que las siguientes desigualdades se satisfacen:*

$$Q + A^T \mathcal{M} + \mathcal{M} A - h C^T B^T [\mathcal{M} + X] B C - 2\gamma_1 \rho_A I_n - \gamma_2 h \rho_C^2 \|B\|^2 I_n > 0, \quad (4.55)$$

$$Q + A^T P + P A - h C^T B^T [\mathcal{M} + X] B C - 2\gamma_1 \rho_A I_n - \gamma_2 h \rho_C^2 \|B\|^2 I_n > 0, \quad (4.56)$$

$$\begin{pmatrix} X & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \gamma_2 I_n - \mathcal{M} \end{pmatrix} > 0, \quad (4.57)$$

$$\gamma_1 I_n - \mathcal{M} > 0, \quad (4.58)$$

donde  $\mathcal{M} = P + hQ$ .

**Caso cuando**  $\Delta A \neq 0_{n \times n}$ ,  $\Delta B \neq 0_{n \times m}$  y  $\Delta C = 0_{m \times n}$ .

En éste caso, el sistema (4.5) es de la forma

$$z(t) = \int_{-h}^0 (B + \Delta B) C e^{(A + \Delta A)\theta} z(t + \theta) d\theta, \quad (4.59)$$

donde  $\Delta A$  y  $\Delta B$  son matrices desconocidas que satisfacen

$$\|\Delta A\| \leq \rho_A \text{ y } \|\Delta B\| \leq \rho_B. \quad (4.60)$$

**Corolario 23** *El sistema perturbado descrito por (4.59) y (4.60) es exponencialmente estable si existen matrices definidas positivas  $P$ ,  $Q$ ,  $Y$  y contantes positivas  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  tales que las siguientes*

desigualdades se satisfacen:

$$Q + A^T \mathcal{M} + \mathcal{M}A - hC^T B^T [\mathcal{M} + Y] BC - 2\gamma_1 \rho_A I_n - h\gamma_2 \rho_B^2 \|C\|^2 I_n > 0, \quad (4.61)$$

$$Q + A^T P + PA - hC^T B^T [\mathcal{M} + Y] BC - 2\gamma_1 \rho_A I_n - h\gamma_2 \rho_B^2 \|C\|^2 I_n > 0, \quad (4.62)$$

$$\begin{pmatrix} Y & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \gamma_2 I_n - \mathcal{M} \end{pmatrix} > 0, \quad (4.63)$$

$$\gamma_1 I_n - \mathcal{M} > 0, \quad (4.64)$$

donde  $\mathcal{M} = P + hQ$ .

## 4.2. Ejemplos numéricos.

En ésta sección ilustraremos los resultados principales mediante varios ejemplos numéricos. El primer ejemplo es solamente académico mientras que el segundo ejemplo proviene de un modelo matemático encontrado en sistemas mecánicos.

### Ejemplo 1.

En éste ejemplo consideraremos el sistema integral con retardo que se describe por

$$z(t) = \int_{-h}^0 e^{A\theta} z(t + \theta) d\theta,$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Claramente éste es un caso particular de (4.5) cuando  $m = n = 2$  y  $B = C = I_2$ .

### Caso nominal.

La siguiente tabla nos muestra los resultados obtenidos para el caso nominal utilizando las condiciones de estabilidad exponencial de la Proposición 13 (condición de norma), la Proposición 14 (condición de norma) y el Corolario 17 (condición LMI).

<b>Método.</b>	<b>Retardo máximo <math>h</math>.</b>
Proposición 13	$0 \leq h \leq 0,988$
Proposición 14	$0 \leq h \leq 0,313$
Corolario 17	$0 \leq h \leq 1,999$

Cuadro 4.1: Comparación de retardo máximo para caso nominal del ejemplo 1.

Observamos en la tabla, que en éste ejemplo el Corolario 17 (condición LMI) nos permite obtener condiciones de estabilidad exponencial robusta para valores de retardo mayores.

### Caso perturbado en $A$ .

Ahora consideremos el sistema perturbado

$$z(t) = \int_{-h}^0 e^{(A+\Delta A)\theta} z(t+\theta) d\theta, \quad (4.65)$$

donde

$$\|\Delta A\| \leq \rho_A. \quad (4.66)$$

En la siguiente tabla podemos encontrar los resultados obtenidos para el sistema descrito por (4.65) y (4.66) utilizando la condiciones de estabilidad exponencial robusta de la Proposición 14 y el Corolario 21 (condición LMI). Denotaremos F.R. como *Fuera de Rango*.

<b>Método.</b>	$h = 0,2$	$h = 0,5$	$h = 1,1$
Proposición 14	$0 \leq \rho_A \leq 4,344$	F.R.	F.R.
Corolario 21	$0 \leq \rho_A \leq 2,325$	$0 \leq \rho_A \leq 0,704$	$0 \leq \rho_A \leq 0,104$

Cuadro 4.2: Comparación de máximas perturbaciones en  $A$  para varios valores de retardo  $h$ .

Como podemos observar en éste ejemplo, con la Proposición 13 no es posible obtener condiciones de estabilidad robusta para el sistema descrito por (4.65) y (4.66), no obstante con las condiciones de estabilidad robusta, la Proposición 14 y el Corolario 21, si es posible obtener un resultado y como podemos notar, el Corolario 21 nos permite obtener condiciones de estabilidad robusta para valores de retardo mayores.

En particular, para el Corolario 21, si consideramos un valor de retardo  $h = 1,1$ , la constante positiva  $\gamma = 0,3$  y  $\rho_A = 0,05$ , las matrices  $P$  y  $Q$  que encuentran solución a las desigualdades

matriciales (4.50), (4.51) y (4.52) son:

$$P = \begin{pmatrix} 0,2134 & -0,0837 \\ -0,0837 & 0,0628 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0,0189 & -0,0061 \\ -0,0061 & 0,0318 \end{pmatrix}.$$

### Ejemplo 2.

Para el siguiente ejemplo tomaremos el sistema escalar integral con retardo de la forma

$$x(t) = \int_{-h}^0 F(\theta) x(t + \theta) d\theta, \quad (4.67)$$

donde  $F(\theta) = -c_1\theta + c_2$ ,  $\theta \in [-h, 0]$ . El sistema (4.67) describe la dinámica interna del controlador

$$u(t) = C \left( e^{Ah} x(t) + \int_{-h}^0 e^{-A\theta} B u(t + \theta) d\theta \right), \quad (4.68)$$

donde

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

El correspondiente sistema lineal

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - h),$$

representa un doble integrador con retardo en la entrada, el cual es común encontrar en sistemas mecánicos.

En particular vamos a considerar que  $c_1 = -0,0005$  y  $c_2 = -0,0267$ . Cabe mencionar que para estos valores particulares de ganancia el controlador ideal (4.68) asigna los polos del sistema en lazo cerrado (4.67)-(4.68) en  $\lambda_{1,2} = -0,0134 \pm 0,0179i$ .

### Caso nominal.

Vamos a encontrar condiciones de estabilidad exponencial para la dinámica interna del controlador (4.68) utilizando la Proposición 13 (condición de norma), la Proposición 14 (condición

de norma) y el Corolario 17 (condición LMI).

<b>Método.</b>	<b>Retardo máximo <math>h</math></b>
Proposición 13	$0 \leq h \leq 6,039$
Proposición 14	$0 \leq h \leq 2,638$
Corolario 17	$0 \leq h \leq 24,375$

Cuadro 4.3: Comparación de retardo máximo para caso nominal del ejemplo 2.

Claramente, para la dinámica interna del controlador cuya forma se describe por (4.68), el Corolario 17 nos permite investigar la estabilidad exponencial robusta para valores de retardo más grandes que aquellos obtenidos por la Proposición 13 y la Proposición 14.

### Caso perturbación en $C$ .

Ahora consideremos que la dinámica interna del controlador tiene perturbaciones en la matriz de ganancia  $C$ . El sistema perturbado es de la forma

$$x(t) = \int_{-h}^0 B(C + \Delta C) e^{-A\theta} x(t + \theta) d\theta, \quad (4.69)$$

donde

$$\|\Delta C\| \leq \rho_C. \quad (4.70)$$

La siguiente tabla nos muestra los resultados obtenidos para distintos valores de retardo  $h$ . En éste caso,  $\rho_A = \rho_B = 0$ , por lo que tenemos a nuestra disposición las condiciones de estabilidad exponencial robusta mostradas en la Proposición 13 (condición de norma), la Proposición 14 (condición de norma) así como también el Corolario 19 (condición LMI).

<b>Método.</b>	$h = 2$	$h = 5$	$h = 10$
Proposición 13	$0 \leq \rho_C \leq 0,1804$	$0 \leq \rho_C \leq 0,01181$	F.R.
Proposición 14	$0 \leq \rho_C \leq 0,0409$	F.R.	F.R.
Corolario 19	$0 \leq \rho_C \leq 0,1439$	$0 \leq \rho_C \leq 0,0219$	$0 \leq \rho_C \leq 0,00441$

Cuadro 4.4: Comparación de máximas perturbaciones en  $C$  para varios valores de retardo  $h$ .

En particular, para  $h = 10$ , la constante positiva  $\gamma = 0,3$  y  $\rho_C = 0,002$ , las matrices  $P$ ,  $Q$  y

$X$  que satisfacen las desigualdades matriciales (4.40), (4.41) y (4.42) son

$$\begin{aligned}
 P &= \begin{pmatrix} 0,0000188 & -0,00018 \\ -0,00018 & 0,0210743 \end{pmatrix}, \\
 Q &= \begin{pmatrix} 0,00006 & 0,0001139 \\ 0,0001139 & 0,0189982 \end{pmatrix}, \\
 X &= \begin{pmatrix} 707,0615 & -0,002 \\ -0,002 & 0,7811 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Como se observa en la tabla 4.4, para cuando tenemos un valor de retardo  $h = 2$ , las condiciones de estabilidad exponencial robusta provistas por la Proposición 13 son menos conservadoras que las obtenidas por la Proposición 14 y el Corolario 19, sin embargo, para un valor de retardo  $h = 10$ , con el Corolario 19 es posible encontrar condiciones de estabilidad robusta mientras que la Proposición 13 y la Proposición 14 ya no es posible puesto que el valor de retardo no pertenece al rango de estabilidad exponencial robusta provistas por éstas condiciones tal y como es mostrado en la tabla 4.3.

Para un valor de retardo  $h = 5$ , la Figura 4-1 ilustra en el espacio de coeficientes de la ganancia  $C$ , la bola obtenida por el resultado del Corolario 19.

Se tiene que para cualquier vector de ganancia  $C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix}$  dentro de la bola con radio  $\rho_C = 0,0219$  y centro en  $\begin{pmatrix} -0,0005 & -0,0267 \end{pmatrix}$ , el sistema nominal correspondiente es exponencialmente estable.

Para corroborar esto, vamos a seleccionar un vector de ganancia  $C_1 = \begin{pmatrix} 0,0008 & -0,03 \end{pmatrix}$  (véase Figura 4-1) cuyos valores  $c_1$  y  $c_2$  que estén localizados dentro de la bola con radio  $\rho_C = 0,0219$ . Para estos valores de ganancia  $C_1$  y un valor de retardo  $h = 5$ , utilizando la condición de estabilidad exponencial para un sistema nominal, es decir, el Corolario 17, las matrices  $P$  y  $Q$  que satisfacen las desigualdades matriciales (4.30) y (4.31) son:

$$\begin{aligned}
 P &= \begin{pmatrix} 7,0542 & -4,5403 \\ -4,5403 & 109,8931 \end{pmatrix}, \\
 Q &= \begin{pmatrix} 5,2559 & 10,8261 \\ 10,8261 & 237,154 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

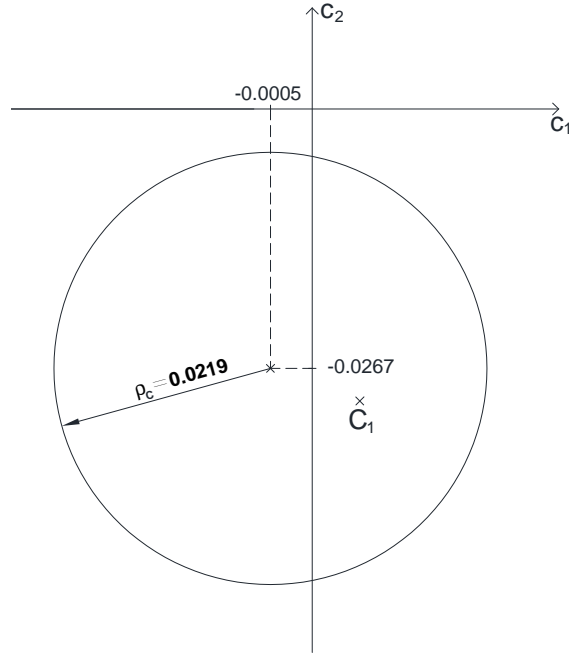


Figura 4-1: Bola en el espacio de coeficientes de la ganancia  $C$ .

lo que corrobora que el sistema nominal con la nueva ganancia  $C_1$  es exponencialmente estable.

### Caso perturbación en $B$ y $C$ .

Ahora consideremos que la dinámica interna del controlador tiene perturbaciones en las matrices  $B$  y  $C$ , el sistema perturbado es de la forma

$$x(t) = \int_{-h}^0 (B + \Delta B)(C + \Delta C) e^{A\theta} x(t + \theta) d\theta.$$

Con la Proposición 13, para  $h = 5$ , y una cota de perturbación  $\rho_C = 0,002$ , se encontró que la desigualdad (4.7) se mantiene para todos los valores positivos de  $\rho_B$  que satisfacen

$$\rho_B \leq 0,341.$$

Ahora, utilizando el Corolario 18, para  $h = 5$ , las constantes  $\gamma_1 = 0,3$  y  $\gamma_2 = 0,3$ , una cota de perturbación  $\rho_C = 0,002$ , se encontró solución factible de las desigualdades matriciales



lineales (4.34), (4.35), (4.36) y (4.37) para todos los valores positivos de  $\rho_B$  que satisfacen

$$\rho_B \leq 0,5696.$$

Observamos que para éste ejemplo, el Corolario 18 nos permite encontrar mejores condiciones de estabilidad exponencial robusta respecto a la Proposición 13.

Para estos valores de  $h$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\rho_C$  y seleccionando  $\rho_B = 0,3$ , las matrices  $P$ ,  $Q$ ,  $X$  y  $Y$  que satisfacen las desigualdades matriciales (4.34), (4.35), (4.36) y (4.37) del Corolario 18 (condición LMI) son

$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} 0,00027745 & -0,00061624 \\ -0,00061624 & 0,00729419 \end{pmatrix}, \\ Q &= \begin{pmatrix} 0,00036576 & 0,001386 \\ 0,001386 & 0,0238109 \end{pmatrix}, \\ X &= \begin{pmatrix} 0,197826 & -0,0029631 \\ -0,0029631 & 0,1041284 \end{pmatrix}, \\ Y &= \begin{pmatrix} 70,75866 & 0,028829 \\ 0,028829 & 0,935844 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### Caso perturbación en $A$ , $B$ y $C$ .

Ahora consideremos que la dinámica interna del controlador tiene perturbaciones en todas las matrices del sistema, es decir,

$$z(t) = \int_{-h}^0 (B + \Delta B)(C + \Delta C) e^{(A + \Delta A)\theta} z(t + \theta) d\theta.$$

Por el Teorema 15, si consideramos un retardo  $h = 5$ , las constantes  $\gamma_1 = 0,08$ ,  $\gamma_2 = 0,3$  y  $\gamma_3 = 0,3$ , las cotas de perturbaciones  $\rho_B = 0,05$ , y  $\rho_C = 0,002$ , se encontró solución factible de las desigualdades matriciales lineales (4.9), (4.10), (4.11), (4.12) y (4.13) para todos los valores positivos de  $\rho_A$  que satisfacen

$$\rho_A \leq 0,0015.$$

En particular, para estos valores de  $h$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$ ,  $\rho_B$ ,  $\rho_C$  y seleccionando  $\rho_A = 0,0005$ , las matrices  $P$ ,  $Q$ ,  $X$  y  $Y$  que satisfacen las desigualdades matriciales (4.9), (4.10), (4.11), (4.12) y (4.13) del Teorema 15 (condición LMI) son

$$\begin{aligned}
 P &= \begin{pmatrix} 0,0001887 & -0,0005915 \\ -0,0005915 & 0,006361 \end{pmatrix}, \\
 Q &= \begin{pmatrix} 0,00022351 & 0,0007624 \\ 0,0007624 & 0,013878 \end{pmatrix}, \\
 X &= \begin{pmatrix} 0,198363 & -0,0018484 \\ -0,0018484 & 0,0893895 \end{pmatrix}, \\
 Y &= \begin{pmatrix} 70,75635 & 0,0045102 \\ 0,0045102 & 0,4663434 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Cuando existen perturbaciones en todas las matrices del sistema, la cota de las perturbaciones donde aún el sistema permanece exponencialmente estable disminuye conforme nos aproximamos al máximo valor de retardo para cuando el sistema nominal es exponencialmente estable.

## Capítulo 5

# Conclusiones y trabajo a futuro.

### Conclusiones.

En éste trabajo de tesis se estudia la estabilidad exponencial robusta de una clase de sistemas integrales con retardo con kernel exponencial.

En particular se tienen las siguiente conclusiones principales.

1. Construcción de funcionales de Lyapuno-Krasovskii apropiadas para el estudio de la estabilidad y la estabilidad robusta de sistemas integrales con retardos con un kernel exponencial.
2. Obtención de varias condiciones suficientes de estabilidad exponencial robusta:
  - Basadas en norma,
  - En términos de desigualdades lineales matriciales (LMI).
3. Comparación mediante ejemplos numéricos de las condiciones obtenidas. Los ejemplos nos muestran que en general los resultados LMI proporcionan mejores resultados al permitir obtener condiciones de robustez para valores de retardo mayor. Por otro lado, las condiciones basadas en norma pueden ser más fáciles de verificar.

## Trabajo futuro.

1. Combinar los resultados obtenidos del Teorema 15 con una formulación LMI que garantice la estabilidad del sistema en lazo cerrado libre de retardo (2.2)-(2.3) con perturbaciones.
2. Analizar el problema de estabilidad robusta de los sistemas integrales con retardos de la forma

$$x(t) = \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 (B_j + \Delta B_j) (C_j + \Delta C_j) e^{(A_j + \Delta A_j)\theta} x(t + \theta) d\theta,$$

donde  $\Delta A_j$ ,  $\Delta B_j$  y  $\Delta C_j$  con  $j = 1, 2, \dots, m$  son matrices desconocidas que representan las incertidumbres del sistema.

Se pretende considerar varios casos de incertidumbres tales como:

- Acotadas en norma,
  - Politópicas y subpolitópicas,
  - Estructuradas.
3. Extender los resultados al análisis de estabilidad robusta a sistemas integrales con kernel de tipo polinomial y/o trascendentales.

# Apéndice A

## Apéndice.

### El problema fundamental LMI.

Una estricta desigualdad matricial lineal (LMI) tiene como forma general

$$F(x) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0, \quad (\text{A.1})$$

donde

$$x = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_m)^T \in \mathbb{R}^m$$

es un vector que está compuesto de  $m$  variables, y  $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, m$  son  $m+1$  matrices constantes dadas. Una LMI también puede ser no estricta donde ”  $>$  ” se reemplaza por ”  $\geq$  ”. Hay que observar que las variables aparecen linealmente en el lado izquierdo de la desigualdad. El problema fundamental LMI es encontrar si existe o no un  $x \in \mathbb{R}^m$  tal que (A.1) se satisfice, véase [2].

Claramente

$$F(x) < 0,$$

puede ser escrita como

$$-F(x) > 0,$$

la cual está en la forma (A.1) estándar. También, un conjunto de LMIs puede ser visto como

una LMI. Por ejemplo,

$$F^{(i)}(x) > 0, \quad i = 1, 2$$

es equivalente a

$$\begin{pmatrix} F^{(1)}(x) & 0 \\ 0 & F^{(2)}(x) \end{pmatrix} > 0.$$

Para comodidad, las variables aparecen de manera frecuente en forma matricial. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} PA + A^T P &< 0, \\ P &> 0, \end{aligned}$$

la desigualdad de Lyapunov, es una LMI con matriz simétrica  $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  como su variable, la cual es equivalente a  $\frac{1}{2}n(n+1)$  variables escalares independientes y puede ser escrita en la forma estándar de (A.1). Con éste entendimiento, es una costumbre común dejar una LMI con variables matriciales.

Otro hecho importante que vale la pena mencionar es que la definitividad positiva de una matriz implica la definitividad positiva de todos sus menores principales, donde un menor principal es una matriz (digamos,  $m \times m$ ) que consiste de los elementos en la  $i_1, i_2, \dots, i_m$ -ésima filas y columnas de la matriz original ( $i_1, i_2, \dots, i_m$  distinto). Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} > 0,$$

implica que

$$a > 0, \quad d > 0, \quad f > 0,$$

y

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} > 0, \quad \begin{pmatrix} a & c \\ c & f \end{pmatrix} > 0, \quad \begin{pmatrix} d & e \\ e & f \end{pmatrix} > 0.$$

## A.1. Desigualdades Matriciales Lineales.

En muchos problemas prácticos, los parámetros pueden aparecer de manera no lineal en su forma más sencilla. El hecho que muchos de ellos pueden ser transformados en una forma de desigualdad lineal matricial es una observación importante.

**Proposición 24** [5] *Para cualquier matriz no singular  $A$ , la desigualdad matricial*

$$F > 0, \tag{A.2}$$

*se cumple si y sólo si*

$$A^T F A > 0. \tag{A.3}$$

Este hecho obvio tiene algunas consecuencias importantes. De manera especial, podemos seleccionar  $A$  que sea una versión de bloque de "matrices elementales", en cual caso, multiplicar por la izquierda  $F$  por  $A$  es equivalente a una de las siguientes operaciones sobre la matriz  $F$ :

1. Multiplicar algún bloque fila por una matriz no singular,
2. Multiplicar por la izquierda un bloque fila por una matriz y sumarlo a otro bloque columna,
3. Intercambiar dos bloques fila.

La Proposición 24 implica que podemos realizar una serie de operaciones mencionadas con antelación sobre (A.2) y las operaciones correspondientes sobre las columnas para llegar a una desigualdad matricial equivalente. Un caso especial muy importante de lo anterior es el siguiente *Complemento de Schur*.

**Corolario 25** [5] *(Complemento de Schur) Para matrices  $A, B, C$ , la desigualdad*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix} > 0 \tag{A.4}$$

*es equivalente a las siguientes dos desigualdades*

$$A > 0, \tag{A.5}$$

$$C - B^T A^{-1} B > 0. \quad (\text{A.6})$$

## A.2. Desigualdades Integrales Cuadráticas.

La siguiente desigualdad integral es conocida como la Desigualdad de Jensen, la cual juega un papel importante en el problema de estabilidad de sistemas con retardo de tiempo así como en sistemas integrales con retardo.

**Lema 26** [5, 14] (*Desigualdad de Jensen*) Para cualquier matriz constante  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $M = M^T > 0$ , los vectores  $\xi_j \in \mathbb{R}^n$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , el escalar  $\gamma > 0$  y la función vectorial  $\omega : [0, \gamma] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tales que las integrales en cuestión están bien definidas, entonces

$$\begin{aligned} \gamma \int_0^\gamma \omega^T(\beta) M \omega(\beta) d\beta &\geq \left( \int_0^\gamma \omega(\beta) d\beta \right)^T M \left( \int_0^\gamma \omega(\beta) d\beta \right), \\ m \sum_{j=1}^m \xi_j^T M \xi_j &\geq \left( \sum_{j=1}^m \xi_j^T \right) M \left( \sum_{j=1}^m \xi_j \right). \end{aligned}$$

## A.3. Desigualdad Vectorial.

La siguiente desigualdad juega un papel muy importante en la obtención de condiciones de estabilidad. Muy reciente se utilizó como herramienta para la derivación de una nueva condición de estabilidad en sistemas integrales perturbados, véase [17].

**Lema 27** (*Desigualdad Vectorial*) Suponiendo que las funciones vectoriales  $\xi(\cdot) \in \mathbb{R}^n$  y  $\sigma(\cdot) \in \mathbb{R}^n$  están definidas en el intervalo  $\Omega$ . Entonces para cualquier matriz definida positiva  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , la siguiente desigualdad se cumple

$$2 \int_{\Omega} \xi^T(\theta) \sigma(\theta) d\theta \leq \int_{\Omega} \{ \xi^T(\theta) X \xi(\theta) + \sigma^T(\theta) X^{-1} \sigma(\theta) \} d\theta.$$

## A.4. Propiedades del Determinante.

La siguiente propiedad del determinante es bien conocida.



Para cuales quiera matrices  $A, B, C, D$ , se tiene que

$$\det \left[ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \right] = \det[A] \det[C], \quad (\text{A.7})$$

$$\det \left[ \begin{pmatrix} A & 0 \\ D & C \end{pmatrix} \right] = \det[A] \det[C]. \quad (\text{A.8})$$

Con ayuda de la propiedad anterior se muestra el siguiente resultado:

**Lema 28** Sean las matrices  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , entonces

$$\det [I_n - AB] = \det [I_m - BA].$$

**Prueba.** Consideremos los siguientes productos de matrices por bloques:

$$\begin{pmatrix} I_n & A \\ B & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -A \\ 0 & I_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ B & I_m - BA \end{pmatrix},$$

y

$$\begin{pmatrix} I_n & A \\ B & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -B & I_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n - AB & A \\ 0 & I_m \end{pmatrix}.$$

Por un lado, utilizando (A.7) y (A.8) se tiene que

$$\det \left[ \begin{pmatrix} I_n & A \\ B & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -A \\ 0 & I_m \end{pmatrix} \right] = \det \left[ \begin{pmatrix} I_n & A \\ B & I_m \end{pmatrix} \right],$$

y

$$\det \left[ \begin{pmatrix} I_n & A \\ B & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -B & I_m \end{pmatrix} \right] = \det \left[ \begin{pmatrix} I_n & A \\ B & I_m \end{pmatrix} \right].$$

Por otro lado, de (A.7) y (A.8) se sigue

$$\det \left[ \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ B & I_m - BA \end{pmatrix} \right] = \det [I_m - BA],$$

y

$$\det \left[ \begin{pmatrix} I_n - AB & A \\ 0 & I_m \end{pmatrix} \right] = \det [I_n - AB].$$

Entonces

$$\det [I_n - AB] = \det [I_m - BA].$$

■

# Bibliografía

- [1] Bellman, R., Cooke, K.L., Differential difference equations, Academic Press, New York, 1963.
- [2] Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., and Balakrishnan, V., Linear matrix inequalities in system and control theory, SIAM, Philadelphia, 1994.
- [3] Engelborghs, K., Dambrine, M. and Roose, K. D., Limitations of a class of stabilization methods for delay systems, IEEE Trans. on Autom. Control, 46(2), 336-339, 2001.
- [4] Gu, K. and Niculescu, S.-I., Additional dynamics introduced in model system transformation, IEEE Trans. on Autom. Control, 45(3), 572-275, 2000.
- [5] Gu, K., Kharitonov, V.L. and Chen, J., Stability of time-delay systems. Birkhäuser, Boston, 2003.
- [6] Hale, J. and Verduyn-Lunel, S.M., Introduction to Functional Differential Equations. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [7] Keel, L. H. and Bhattacharyya, S.P., Robust, fragile or optimal?, IEEE Trans. on Autom. Control, 42, 1098-1105, 1997.
- [8] Kharitonov, V. and Melchor-Aguilar, D., On delay-dependent stability conditions. Syst. Control Lett., 40, 71-76, 2000.
- [9] Kharitonov, V. and Melchor-Aguilar. D., Additional dynamics for general class of time-delay systems. IEEE Trans. on Autom. Control, 48, 1060-1064, 2003.

- [10] Kolmanovskii, V.B. and Myshkis, A., Introduction to the theory and applications of functional differential equations. Kluwer, The Netherlands, 1999.
- [11] Mäkilä, P.M., Keel, L. H. and Bhattacharyya, S.P., Comments on robust, fragile or optimal? and Author's reply, IEEE Trans. on Autom. Control, 43, 1265-1268, 1998.
- [12] Manitus, A.Z. and Olbrot, A.W., Finite spectrum assignment problem for systems with delay. IEEE Trans. on Autom. Control, 24(4), 541-553, 1979.
- [13] Melchor-Aguilar, D. and Tristán-Tristán, B., On the implementation of control laws for finite spectrum assignment: the multiple delays case. Proceedings of 4th IEEE Conference on Electrical and Electronics Engineering, México City, México, 2007.
- [14] Melchor-Aguilar, D., On the exponential stability of a class of integral delay systems, 8th IFAC Workshop on Time-Delay Systems, Sinaia, Rumania, September, 2009.
- [15] Melchor-Aguilar, D., Kharitonov V. and Lozano R., Stability conditions for integral delay systems. Int. J. Robust Non. Control, 20, 1-15, 2010.
- [16] Melchor-Aguilar, D., On stability of integral delay systems, Appl. Mathematics Comp., 217, 3578-3584, 2010.
- [17] Melchor-Aguilar, D. and Mondié, S., Robust stability of some classes of integral delay systems, 8th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control, Mérida, Yucatán, October, 2011.
- [18] Michiels, W., Mondié, S., Roose, D. and Dambrine, M., The effect of the approximating distributed delay control law on stability, in Advances of Time-Delay Systems, Lect. Notes Comput. Sci. Eng., 38, 207-220, Springer-Verlag, 2004.
- [19] Michiels, W., and Niculescu, S.-I., Stability and stabilization of time-delay systems, SIAM, USA, 2007.
- [20] Mondié, S., Dambrine, M. and Santos, O., Approximation of control laws with distributed delays: a necessary condition for stability, Kybernetika, 38(5), 541-551, 2002.

- [21] Mondié, S. and Michiels, W., Finite spectrum assignment of unstable time-delay systems with a safe implementation, *IEEE Trans. on Autom. Control*, 48(12), 2207-2212, 2003.
- [22] Myshkis, A.D., General theory of differential equations with delays, *Uspehi Math. Nauk*, 4, 99-141, 1949 (Engl. Transl. AMS, 55, 1-62, 1951).
- [23] Niculescu, S.-I., Delay effects on stability. A robust control approach. *Lecture Notes in Control and Information Science*, Vol. 269, Springer, Berlin, 2001.
- [24] Queinnec, I., Tarbouriech, S., Garcia, G., and Niculescu, S.-I., *Lecture Notes in Control and Information Sciences: Biology and Control Theory, Current Challenges*, Springer, Berlin, 2007.
- [25] Richard, J.-P., Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems, *Automatica*, 39(10), 1667-1694, 2003.
- [26] Van Assche, V., Dambrine, M. and Lafay, J.-F., Some problems arising in the implementation of distributed-delay control laws, in *Proceedings of 38th IEEE Conference Decision Control*, Phoenix, AZ, 4668-4672, 1999.
- [27] Zhong, Q.-C., On distributed delay in linear control laws-part I: discrete-delay implementations, *IEEE Trans. on Autom. Control*, 49(11), 2074-2080, 2004.