



**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

POSGRADO EN CIENCIAS APLICADAS

**Análisis de estabilidad de la implementación de
leyes de control que asignan un espectro finito a
sistemas con retardos**

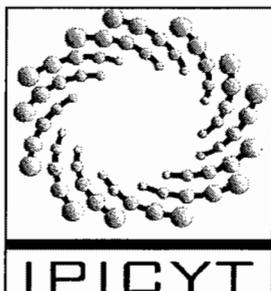
Tesis que presenta
Beatriz Tristán Tristán

Para obtener el grado de
Maestro en Ciencias Aplicadas

En la opción de
Control y Sistemas Dinámicos

Director de la Tesis:
Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar

San Luis Potosí, S.L.P., Octubre de 2007.

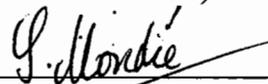


Constancia de aprobación de tesis

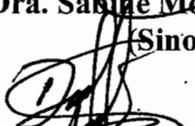
La tesis **Análisis de estabilidad de la implementación de leyes de control que asignan un espectro finito a sistemas con retardos** presentada para obtener el grado de **Maestro en Ciencias Aplicadas en la opción de Control y Sistemas Dinámicos** fue elaborada por **Beatriz Tristán Tristán** y aprobada el 5 de octubre de 2007 por los suscritos, designados por el Colegio Profesores de la División de Matemáticas Aplicadas y Sistemas Computacionales del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C.



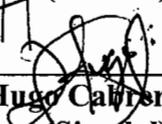
Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar
(Director de Tesis)



Dra. Sabine Mondié Cuzange
(Sinodal)



Dr. David Antonio Lizárraga Navarro
(Sinodal)



Dr. Hugo Caldera Ibarra
(Sinodal)



Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Matemáticas Aplicadas y Sistemas Computacionales del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología con el número de registro 202434.



IPICYT

Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Acta de Examen de Grado

El Secretario Académico del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 014 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Maestría en Ciencias Aplicadas en la opción de Control y Sistemas Dinámicos está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 5 días del mes de octubre del año 2007, se reunió a las 16:00 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

Dr. David Antonio Lizárraga Navarro	Presidente	IPICYT
Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar	Secretario	IPICYT
Dr. Hugo Cabrera Ibarra	Sinodal	IPICYT
Dra. Sabine Mondié Cuzange	Sinodal externo	CINVESTAV-IPN

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

**MAESTRA EN CIENCIAS APLICADAS
EN LA OPCIÓN DE CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS**

sustentó la C.

Beatriz Tristán Tristán

sobre la Tesis intitulada:

Análisis de Estabilidad de la Implementación de Leyes de Control que Asignan un Espectro Finito a Sistemas con Retardos

que se desarrolló bajo la dirección de

Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar

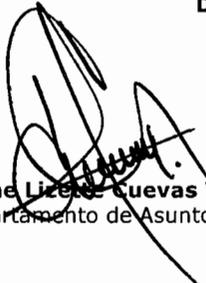
El Jurado, después de deliberar, determinó

APROBARLA

Dándose por terminado el acto a las 18:00 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fé el Secretario Académico del Instituto.

A petición de la interesada y para los fines que a la misma convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 5 días del mes octubre de 2007.


Dr. Marcial Bojiles Marín
Secretario Académico


L.C.C. Ivonne Lizaso Cuevas Velez
Jefa del Departamento de Asuntos Escolares



Agradecimientos

Al Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar por la formación académica y personal, por su paciencia y apoyo.

A los Doctores David Antonio Lizárraga, Hugo Cabrera Ibarra y a la Dra. Sabine Mondié por aceptar ser mis sinodales, por sus comentarios y aportaciones a esta tesis.

A CONACyT por la beca de Maestría y al IPICYT por el apoyo especial para el Congreso ICEEE 2007.

A todos mis profesores de Maestría (Dr. Daniel Melchor, Dr. Ricardo Femat, Dr. David Lizárraga, Dr. Hugo Cabrera, Dr. Arturo Zavala, Dr. Gerardo Escobar, Dra. Ilse Cervantes, Dr. Hubber y al Dr. Fernando Rodríguez) por un excelente trabajo como investigadores y por invertir su tiempo en la formación de los estudiantes.

A mis amigos de Matemáticas (Gris, Sosa, Manuel, Aurora, Claudia, Frank, Clara, Gerardo, Chen, Daniel, Andrés, Michael, Zamarrón, Rafa, etc.) de Ciencias Ambientales (Margarita, Sandra, Josué, Felipe, Angélica, Esteli, Belem, José, etc.) y a Gaby, al Dr. Barbahan (Miguel), Clara, Victor, Dulce, Gerson, etc.

Muy especialmente a mi familia por apoyarme durante tanto tiempo.

Resumen

El problema de control de sistemas con retardos es una tarea no trivial debido a la naturaleza infinito-dimensional de los sistemas. Uno de los resultados más importantes para este problema, es la estrategia de control conocida como Asignación de Espectro Finito; que asigna al sistema en lazo cerrado un espectro finito el cual puede ser arbitrariamente ubicado bajo ciertas condiciones de controlabilidad. Dicha estrategia de control involucra términos integrales sobre valores pasados del control y necesita ser aproximada numéricamente en una implementación práctica. Resultados recientes muestran que la implementación numérica de la ley de control demanda la estabilidad de la dinámica interna del controlador, la cual está descrita por una clase especial de ecuaciones integrales con retardo. En este trabajo de tesis se estudia la estabilidad de dichas ecuaciones integrales. Se obtienen condiciones suficientes de estabilidad dependientes del retardo para las ecuaciones integrales. Dicho resultado determina una clase de sistemas con retardo en el control para los cuales se tiene una implementación segura de la ley de control que asigna un espectro finito en lazo cerrado mediante métodos numéricos de aproximación por cuadratura.

Abstract

The control problem of time-delay systems is a not trivial task due to the infinite-dimensional nature of the addressed systems. One of the most important results on this problem is the control strategy known as Finite Spectrum Assignment (FSA) that assigns a finite spectrum to the closed-loop system, which under some controllability conditions can be arbitrarily located. This control strategy involves integral terms over the past values of the control which need to be numerically approximated in a practical implementation. Recent results show that the numerical implementation of the control law depends on the stability of the internal dynamics. In this work the stability of such integral equations is addressed. We provide delay-dependent stability conditions for the integral delay equation. The results determine a class of systems with delays in the control input for which a safe implementation of the control law that assigns a finite spectrum to the closed-loop system is guaranteed by using only standard numerical methods.

Índice general

1. Introducción	1
2. Formulación del problema	4
2.1. Ley de control que asigna espectro finito para sistemas con retardo en el control .	5
2.2. Problemas en la implementación de la ley de control	7
2.3. Condición necesaria para la estabilidad de lazo cerrado	11
2.4. Alternativas de implementación	13
2.5. Planteamiento del problema	15
3. Preliminares	17
3.1. Ecuaciones diferenciales en diferencia	18
3.2. Existencia y unicidad de soluciones	19
3.3. Estabilidad de ecuaciones diferenciales en diferencia lineales	23
4. Resultados	27
4.1. Caso escalar	28
4.1.1. Ejemplo escalar (un solo retardo)	30
4.1.2. Ejemplo escalar (múltiples retardos)	33
4.2. Caso matricial	35
4.2.1. Ejemplo matricial	37
4.3. FSA para un modelo con retardos de redes TCP/AQM	41
5. Conclusiones y trabajo a futuro	47

Notación

\mathbb{R}, \mathbb{C}	Los conjuntos de los números reales y complejos, respectivamente
\mathbb{R}^n	Espacio euclideo n -dimensional
$\mathbb{R}^{n \times m}, \mathbb{C}^{n \times m}$	Espacio de las matrices $n \times m$ en los reales y en los complejos
\mathbb{R}^+	El conjunto de los números reales no-negativos
$B_\varepsilon(s_0)$	Bola de radio ε centrada en s_0 , es decir, $B_\varepsilon(s_0) = \{s \mid s \in \mathbb{C}, s - s_0 < \varepsilon\}$
$C_{n,h}$ o $C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$	Espacio de Banach de funciones vectoriales continuas que mapean el intervalo $[-h, 0]$ a \mathbb{R}^n con la topología de convergencia uniforme
$\text{Re}(w), \text{Im}(w)$	Parte real e imaginaria de $w \in \mathbb{C}$
$\ \bullet\ $	Norma de un vector o de una matriz
$\ \phi\ _c$	La norma $\max_{-h \leq \xi \leq 0} \ \phi(\xi)\ $, para $\phi \in C_{n,h}$
A^{-1}	Inversa de la matriz A
$\det(A)$	Determinante de la matriz A
$\sigma(A)$	Espectro de la matriz A
$\lambda(A)$	Eigenvalor de la matriz A
$\rho(A)$	Radio espectral de la matriz A , $\max_i \lambda_i(A) $
$\text{diag}\{s\}_m$	Matriz diagonal $s \ m \times m$
I_n	Matriz identidad $n \times n$
\overline{X}	Cerradura del conjunto X
$C^\gamma([-h, 0], \mathbb{C})$	Espacio de Banach de funciones γ veces diferenciables que mapean el intervalo $[-h, 0]$ a \mathbb{C} con la topología de convergencia uniforme

Capítulo 1

Introducción

En el análisis de estabilidad para sistemas lineales invariantes en el tiempo una herramienta básica y muy conocida es la transformada de Laplace, la cual permite estudiar el comportamiento dinámico del sistema mediante la ubicación de un número finito de raíces del polinomio característico asociado. Para sistemas lineales con retardo la función característica asociada resulta ser un cuasipolinomio con un número infinito de raíces y determinar su ubicación no resulta tan sencillo.

La naturaleza infinito-dimensional de los sistemas con retardo hace que su control sea un problema no trivial. Para ilustrar esto, considere un sistema lineal con retardos sólo en la variable de entrada de control, procediendo de la misma forma que en sistemas lineales sin retardo uno puede tratar de usar una retroalimentación estática de estado para controlar el sistema. Esto proporcionará, en general, un sistema en lazo cerrado gobernado por un sistema lineal con retardos con un espectro infinito y controlar su ubicación no es realizable prácticamente.

A finales de los 70's Manitius y Olbrot [14] proponen una ley de control que asigna un espectro finito al sistema en lazo cerrado a sistemas con retardos, el cual puede ser ubicado arbitrariamente bajo ciertas condiciones de controlabilidad. Este resultado es extremadamente atractivo ya que idealmente permite la asignación de la dinámica en lazo cerrado mediante la ubicación de un número finito de raíces de un polinomio como en el caso de sistemas lineales sin retardo.

La ley de control propuesta en [14] involucra una integral sobre valores pasados del control que necesita ser aproximada numéricamente en una implementación práctica. En [15] se mostró

que la aproximación numérica de la integral da resultados satisfactorios para un modelo de túnel de viento. Sin embargo, recientemente en [25] y [26], a través de un ejemplo escalar, se mostró que la aproximación numérica no garantiza estabilidad en lazo cerrado, no importando la precisión de la aproximación.

El mecanismo de la inestabilidad de la implementación de la ley de control atrajo la atención de la comunidad científica (vea: [6], [18], [19], [21] y [27]) y fue propuesto como un problema abierto en [24].

En [17] y [19] se mostró que cuando la integral es aproximada numéricamente, el sistema resultante en lazo cerrado es un sistema con retardos de tipo neutro que puede ser inestable si el controlador ideal no es internamente estable. En otras palabras, la implementación práctica del controlador demanda su estabilidad interna.

La dinámica interna de la ley de control es descrita por una clase especial de ecuaciones integrales con retardo. Hasta el momento, y dentro de lo que conocemos, el análisis de estabilidad de estas ecuaciones integrales no ha recibido suficiente atención en la literatura y el objetivo de esta tesis está enfocado en ello.

Otros resultados ([21] y [27]) muestran que el sistema en lazo cerrado con retardos de tipo neutro puede ser convertido en uno de tipo retardado introduciendo un filtro pasa-bajas en el lazo de control. En [21] se cambia la estructura del control incluyendo explícitamente un filtro pasa-bajas, en el lazo de control, el cual es obtenido resolviendo una ecuación matricial. Por otro lado en [27] se propone un esquema de aproximación/implementación que implícitamente involucra un filtro pasa-bajas para el cual es necesaria la selección de una constante positiva suficientemente pequeña ε (ver la observación 2 de la página 2078). Adicionalmente, el problema del diseño del filtro será más complicado si se consideran múltiples retardos en la variable de entrada de control. Por lo tanto, la búsqueda de condiciones de estabilidad de las ecuaciones integrales con retardo para garantizar una implementación segura de la ley de control permanece como una importante línea de investigación.

En esta tesis se proporcionan condiciones de estabilidad para la ecuaciones integrales con retardos que gobiernan la dinámica interna de la ley de control para la asignación de espectro finito (FSA; por sus siglas en inglés). Los resultados ayudarán a garantizar una implementación segura con métodos numéricos mediante una selección apropiada de la ganancia del controlador.

La organización de la tesis es la siguiente. En el Capítulo 1 presentamos la introducción al problema. En el Capítulo 2 se hace la formulación del problema. En el Capítulo 3 se presentan algunos preliminares sobre sistemas con retardos que nos sirven de herramientas para resolver el problema. Los resultados se presentan en el Capítulo 4 y por último en el Capítulo 5 se presentan las conclusiones y trabajo a futuro.

Capítulo 2

Formulación del problema

Considere un sistema lineal invariante en el tiempo descrito por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (2.1)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas, A y B son matrices constantes de dimensiones apropiadas. Es bien sabido que si el par (A, B) es controlable [5] nosotros podemos con una retroalimentación estática de estado

$$u(t) = Fx(t), \quad (2.2)$$

asignar arbitrariamente una dinámica al sistema en lazo cerrado bajo una elección conveniente de la matriz de retroalimentación F . De esta forma el sistema en lazo cerrado (2.1)-(2.2) tiene la forma:

$$\dot{x}(t) = (A + BF)x(t),$$

cuya ecuación característica asociada es:

$$\det(sI - A - BF) = 0.$$

Así el sistema en lazo cerrado (2.1)-(2.2) tiene un espectro finito que puede ser arbitrariamente ubicado en un conjunto de puntos preasignado del plano complejo.

En sistemas con retardo en el control la situación es completamente distinta. Si nosotros quisiéramos aplicar la ley de control (2.2) a un sistema con retardo $h > 0$ en la entrada de control

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - h),$$

obtendríamos en lazo cerrado el sistema con retardo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BFx(t - h),$$

cuya ecuación característica es:

$$\det(sI - A - BFe^{-hs}) = 0.$$

Ahora el espectro es infinito y controlar la ubicación de un número infinito de valores propios no es realizable prácticamente. Motivados por lo anterior, Manitius y Olbrot [14] proponen una ley de control que asigna un espectro finito en lazo cerrado. Además, el espectro finito en lazo cerrado puede ser asignado arbitrariamente bajo ciertas condiciones de controlabilidad, lo cual resulta ser muy interesante dada la naturaleza de los sistemas con retardo.

2.1. Ley de control que asigna espectro finito para sistemas con retardo en el control

Considere el siguiente sistema infinito-dimensional con retardo en la entrada de control

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - h) \tag{2.3}$$

donde $h \in \mathbb{R}^+$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Manitius y Olbrot [14], motivados por el problema de asignación de espectro, proponen la siguiente ley de control

$$u(t) = Fx(t) + Fe^{-hA} \int_{-h}^0 e^{-\theta A} Bu(t + \theta) d\theta, \tag{2.4}$$

que asigna idealmente espectro finito al sistema en lazo cerrado (2.3)-(2.4). Cabe notar que esta ley de control está basada en el principio del predictor de Smith, donde se predice el comportamiento en un tiempo $t + h$ de la variable de estado de la ley de control. Es decir, tomando

$$u(t) = Gx(t + h) = Ge^{Ah} \left[x(t) + \int_{-h}^0 e^{-A(\theta+h)} Bu(t + \theta) d\theta \right]$$

y definiendo $F = Ge^{Ah}$ se obtiene (2.4).

El siguiente teorema representa el resultado principal en asignación de espectro finito para el sistema (2.3). Incluimos la prueba por razones de completez del trabajo de tesis.

Teorema 1 [14] *El espectro del sistema en lazo cerrado (2.3)-(2.4) coincide con el espectro de la matriz*

$$A + e^{-hA}BF.$$

Además asumiendo controlabilidad (respectivamente estabilizabilidad) [22] del par $(A, e^{-hA}B)$ el espectro del sistema (2.3)-(2.4) puede ser arbitrariamente ubicado en cualquier conjunto preasignado de n puntos complejos conjugados (respectivamente los valores propios inestables de A pueden ser arbitrariamente ubicados) por una elección conveniente de la matriz F .

Prueba. La ecuación característica del sistema en lazo cerrado (2.3)-(2.4) es:

$$\det \begin{bmatrix} sI - A & -Be^{-sh} \\ -F & I - FN(s) \end{bmatrix} = 0, \quad (2.5)$$

donde $N(s) = e^{-Ah} \int_{-h}^0 e^{\theta(sI-A)} d\theta B$.

Multiplicando a la derecha la matriz en (2.5) por $\begin{bmatrix} I & -N(s) \\ 0 & I \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} I & 0 \\ F & I \end{bmatrix}$ (en ese orden) obtenemos que (2.5) es equivalente a:

$$\det[(sI - A)(I - N(s)F) - BFe^{-sh}] = 0. \quad (2.6)$$

Dado que $N(s) = (sI - A)^{-1}(I - e^{-h(sI-A)})e^{-Ah}B$, tenemos que $(sI - A)N(s)F = e^{-Ah}BF -$

$e^{-sh}BF$. Sustituyendo esto en (2.6) obtenemos

$$\det[sI - A - e^{-hA}BF] = 0.$$

La conclusión del teorema sigue de los resultados clásicos en asignación de espectro y estabilización de sistemas lineales. ■

La ley de control (2.4) involucra una integral sobre valores pasados del control la cual necesita ser calculada a cada instante de tiempo t . Una realización obvia de la ley de control se obtiene definiendo

$$z(t) = \int_{-h}^0 e^{-(\theta+h)A} Bu(t+\theta) d\theta$$

y diferenciando esta nueva variable auxiliar $z(t)$

$$\dot{z}(t) = Az(t) + e^{-hA}Bu(t) - Bu(t-h),$$

con lo cual se obtiene la ley de control

$$u(t) = F(x(t) + z(t)).$$

Cuando el sistema en lazo abierto es inestable, la nueva variable $z(t)$ es gobernada por una ecuación inestable y esta realización debe ser descartada debido a que involucra una cancelación de polos inestables en el controlador por ceros inestables del sistema. Motivados por lo anterior Manitius y Olbrot [14] sugieren aproximar numéricamente la integral en instantes sucesivos de tiempo.

2.2. Problemas en la implementación de la ley de control

En [15] se mostró que la aproximación numérica de la integral proporciona resultados satisfactorios para un modelo de túnel de viento desarrollado en el Centro de Investigaciones Langley de la NASA. Sin embargo en 1999 fueron reportados resultados mediante un ejemplo escalar que la aproximación numérica utilizando métodos de integración de tipo cuadratura puede no garantizar la estabilidad en lazo cerrado sin importar el grado de precisión de la

aproximación [26].

Observemos que $z(t)$, utilizando el método de aproximación rectangular (rectángulos inscritos), se puede escribir como:

$$z_q(t) = e^{-hA} \frac{h}{q} \sum_{p=0}^{q-1} e^{\frac{p}{q}hA} Bu \left(t - \frac{p}{q}h \right), \quad (2.7)$$

usando el método trapezoidal

$$z_q(t) = e^{-hA} \left[\frac{h}{2q} \left(Bu(t) + e^{hA} Bu(t-h) \right) + \frac{h}{q} \sum_{p=1}^{q-1} e^{\frac{p}{q}hA} Bu \left(t - \frac{p}{q}h \right) \right] \quad (2.8)$$

y usando Simpson

$$z_q(t) = e^{-hA} \frac{h}{3q} \left(Bu(t) + e^{hA} Bu(t-h) \right) + e^{-hA} \frac{2h}{3q} \sum_{p=1}^{q/2-1} \left(4e^{\frac{2p-1}{q}hA} Bu \left(t - \frac{p}{q}h \right) + 2e^{\frac{2p}{q}hA} Bu \left(t - \frac{p}{q}h \right) \right) \quad (2.9)$$

donde q es la precisión de la aproximación.

Para análisis posteriores notemos que la aproximación numérica mediante cualquiera de los métodos anteriores (2.7), (2.8), (2.9) se puede escribir como:

$$z_q(t) = e^{-hA} \sum_{p=0}^q \eta_p e^{\frac{p}{q}hA} Bu \left(t - \frac{p}{q}h \right), \quad (2.10)$$

donde η_p depende del método de aproximación en cuestión.

Con el fin de ilustrar el mecanismo de inestabilidad de la implementación numérica de la ley de control presentamos, para un ejemplo escalar, las simulaciones numéricas pertinentes.

Consideremos el siguiente sistema escalar:

$$\dot{x}(t) = ax(t) + u(t-h), \quad (2.11)$$

con $a \in \mathbb{R}^+$ y $h \geq 0$.

La ley de control

$$u(t) = fx(t) + fe^{-ha} \int_{-h}^0 e^{-\theta a} u(t+\theta) d\theta. \quad (2.12)$$

asigna al sistema en lazo cerrado (2.11)-(2.12) el valor propio $\lambda = a + fe^{-ha}$. Tomando $a = 1$, $h = 1$ y escogiendo $f = -4$, obtenemos $\lambda = -0.47$. En las Figuras 2.1, 2.2 y 2.3 se presentan las simulaciones numéricas del sistema en lazo cerrado utilizando (2.7), (2.8) y (2.9) respectivamente.

En estas Figuras se puede observar que se tiene inestabilidad para cualquiera de los tres métodos de integración, donde aunque aparentemente convergen al origen, en determinado tiempo se empiezan a observar oscilaciones crecientes (en amplitud). Otra cosa que se puede observar es que en principio, si se cambia a un mejor método de aproximación lo que se esperaría es un mejor resultado, sin embargo se observa que el método de Simpson que se supone, aproxima mejor la integral, proporciona peores resultados.

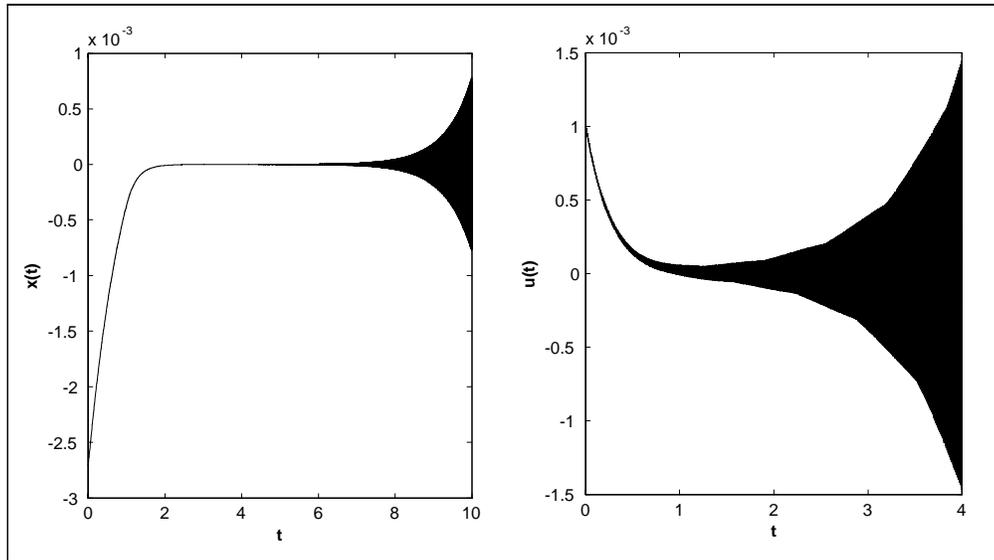


Fig. 2.1 Simulación numérica del sistema en lazo cerrado (2.11)-(2.12), usando el método rectangular ($q = 100$).

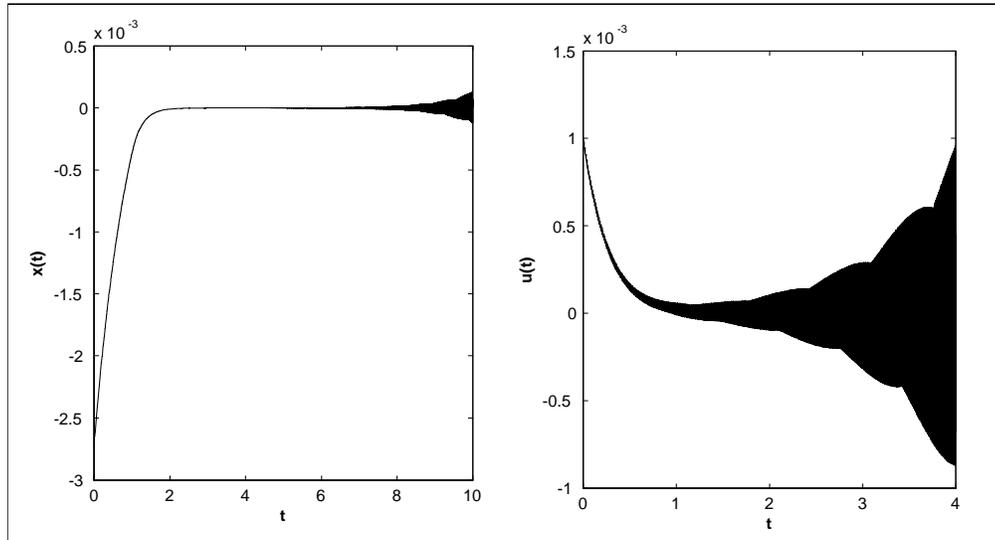


Fig. 2.2 Simulación numérica del sistema en lazo cerrado (2.11)-(2.12), usando el método trapecoidal ($q = 100$).

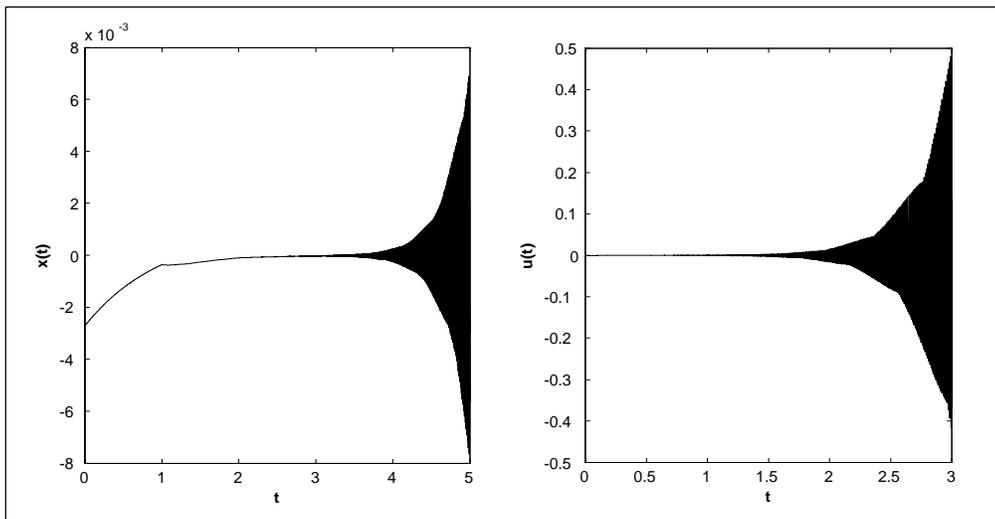


Fig 2.3 Simulación numérica del sistema en lazo cerrado (2.11)-(2.12), usando Simpson ($q = 100$).

Los resultados anteriores atrajeron la atención de la comunidad científica y un esfuerzo considerable fue dedicado a entender el mecanismo de inestabilidad de la aproximación numérica de la ley de control (2.12) (vea [6], [19], [21], [27]).

2.3. Condición necesaria para la estabilidad de lazo cerrado

Un resultado definitivo en el problema de implementación de las leyes de control ha sido demostrado por Mondié, Dambrine y Santos en [19]. Cuando la integral es aproximada numéricamente, el sistema resultante en lazo cerrado es un sistema con retardos de tipo neutro que puede ser inestable si el controlador no es internamente estable. Dada la importancia de este resultado en este trabajo de tesis incluimos una versión ligeramente modificada del resultado.

Teorema 2 [19] *Considere el sistema (2.3) donde A no es Hurwitz y $(A, e^{-hA}B)$ es estabilizable. La implementación numérica de (2.4) mediante un método de cuadratura numérica resulta en un sistema en lazo cerrado inestable si la dinámica interna de (2.4) descrita por*

$$\tilde{u}(t) = Fe^{-hA} \int_{-h}^0 e^{-\theta A} B \tilde{u}(t + \theta) d\theta \quad (2.13)$$

es inestable

Prueba. Sean

$$M(s) = \int_{-h}^0 e^{\theta(sI-A)} d\theta \text{ y } M_q(s) = \sum_{p=1}^q \eta_p e^{-\frac{p}{q}h(sI-A)}.$$

Entonces la función característica en lazo cerrado (2.3)-(2.4) utilizando la aproximación numérica (2.10) es:

$$g_q(s) = \det[(sI_n - A)(I_n - M_q(s)e^{-hA}BF) - BFe^{-sh}].$$

El cuasipolinomio $g_q(s)$ es de tipo neutro y una condición necesaria para su estabilidad es que

$$p_q(s) = \det[I_n - M_q(s)e^{-hA}BF] \quad (2.14)$$

sea estable.

Para una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ se tiene que el error entre la integral $I(f) = \int_{-h}^0 f(\theta) d\theta$ y su aproximación $I_q(f)$, obtenida mediante un método de cuadratura de paso constante con

precisión q , esta dado por la expresión

$$I(f) - I_q(f) \leq -\frac{\alpha h^{\beta+1}}{\gamma q^{\beta+1}} f^{(\beta)}(\xi_0),$$

donde α, β, γ son enteros positivos que dependen del método de aproximación y la precisión q escogidos, $\xi_0 \in [-h, 0]$, y si $f \in C^\beta([-h, 0], \mathbb{C})$, véase [2].

Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} & \left\| \left(I_n - M(s)e^{-hA}BF \right) - \left(I_n - M_q(s)e^{-hA}BF \right) \right\| \\ & \leq \left\| e^{-hA}BF \right\| \sum_{i=1}^n \left| I(e^{\theta(s-\lambda_i)}) - I_q(e^{\theta(s-\lambda_i)}) \right| \\ & \leq \left\| e^{-hA}BF \right\| \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{q^{\beta-1}}. \end{aligned}$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ son los valores propios de la matriz A y

$$k_i = \left(\frac{\alpha h^{\beta+1}}{\gamma} \right) \max_{\theta \in [-h, 0]} \left| (s - \lambda_i)^\beta e^{\theta(s-\lambda_i)} \right|, i = 1, 2, \dots, n.$$

Así $I_n - M_q(s)e^{-hA}BF$ converge uniformemente $I_n - M(s)e^{-hA}BF$ implicando la convergencia uniforme de $p_q(s)$ a $p(s) = \det[I_n - M(s)e^{-hA}BF]$.

Ahora consideremos que $s_0 \in \mathbb{C}$ es un cero de $p(s)$, es decir $p(s_0) = 0$. Debido a que $p_q(s)$ y $p(s)$ son cuasipolinomios, entonces son funciones analíticas en $B_\varepsilon(s_0)$.

Sea

$$\rho = \min_{|s-s_0|=\varepsilon} |p(s)| > 0$$

De la convergencia uniforme de $p_q(s)$ a $p(s)$ existe $Q(\rho) > 0$ (suficientemente grande) tal que

$$|p_q(s) - p(s)| < |p(s)|, \forall q \geq Q, \forall s : |s - s_0| = \varepsilon.$$

Del teorema de Rouché [1] se sigue que $p(s)$ y $p(s) + (p_q(s) - p(s)) = p_q(s)$ tienen el mismo número de ceros dentro de $B_\varepsilon(s_0)$. Entonces para q suficientemente grande, cada cuasipolinomio $p_q(s)$ tiene un cero s_0^q en una vecindad de s_0 tal que $s_0^q \rightarrow s_0$ cuando $q \rightarrow \infty$. Así, para q suficientemente grande, una condición necesaria para la estabilidad de $g_q(s)$ es la estabilidad

de $p(s)$.

El teorema se concluye observando que:

$$\begin{aligned}
p(s) &= \det \left[I_m - F e^{-hA} (sI - A)^{-1} \left(I - e^{-h(sI-A)} \right) B \right] \\
&= \det \left[I_n - B F e^{-hA} (sI - A)^{-1} \left(I - e^{-h(sI-A)} \right) \right] \\
&= \det \left[I_n - e^{-hA} (sI - A)^{-1} \left(I - e^{-h(sI-A)} \right) B F \right]
\end{aligned} \tag{2.15}$$

es la función característica de (2.13). ■

2.4. Alternativas de implementación

El teorema anterior establece que la implementación práctica del controlador (2.4) demanda su estabilidad interna. Adicionalmente, el teorema muestra que la dinámica interna del controlador está descrita por una clase especial de ecuaciones integrales con retardos. Este resultado implica limitaciones al método de asignación de espectro finito para la estabilización de sistemas con retardo en el control. Lo anterior motivó la búsqueda de alternativas de implementación en la literatura. Así, resultados recientes reportados en [21] y [27] proponen la introducción de un filtro pasa-bajas en el lazo de control que convierte el sistema en lazo cerrado de tipo neutro en uno de tipo retardado.

El enfoque desarrollado en [21] cambia la estructura de la ley de control, introduciendo explícitamente en el lazo de control un filtro pasa-bajas en la forma siguiente:

$$\dot{u}(t) = A_f u(t) + B_f (e^{Ah} x(t) + \int_{-h}^0 e^{-A\theta} B u(t + \theta) d\theta), \tag{2.16}$$

donde A_f y B_f son matrices de diseño que determinan el filtro pasa-bajas.

La matriz característica en lazo cerrado (2.3)-(2.16) se puede escribir como:

$$D^{ideal}(s) = (sI - A_f) D(s) - B_f N(s), \tag{2.17}$$

donde $N(s)$ y $D(s)$ son coprimas derechas satisfaciendo $(sI - A)^{-1} B = N(s) D^{-1}(s)$.

Así, el espectro en lazo cerrado (2.3)-(2.16) es finito y se muestra que siempre es posible

encontrar matrices A_f y B_f tales que el espectro consiste de $n + m$ valores propios preasignados. Tales matrices satisfacen la siguiente ecuación:

$$-A_f D(s) - B_f N(s) = D^{ideal}(s) - \text{diag}\{s\}_m D(s). \quad (2.18)$$

Por otro lado, cuando la integral es aproximada por sumas se tiene que $D^{ideal}(s)$ se transforma en:

$$D_q(s) = \left\{ sI - A_f - B_f \sum_{p=0}^q \eta_p e^{-\frac{p}{q}h(sI-A)} B \right\} D(s) - B_f e^{hA} N(s) e^{-hs}, \quad (2.19)$$

que corresponde a un *cuasipolinomio de tipo retardado*. Los cuasipolinomios de tipo retardado tienen un número finito de ceros a la derecha de cualquier línea vertical en el plano complejo a diferencia de los de tipo neutro.

El siguiente resultado mostrado en [21] garantiza una implementación segura de la ley de control propuesta (2.16):

Proposición 3 [21]. *Asumiendo que los parámetros A_f y B_f en la ley de control (2.16) son tales que la matriz de lazo cerrado ideal (2.17) es Hurwitz. Cuando el término integral en (2.16) es aproximado por un método de paso constante como (2.10), entonces existe q en (2.19) tal que la matriz característica del lazo cerrado (2.19) es asintóticamente estable.*

Una segunda alternativa es la propuesta por Zhong en [27], donde se analiza el problema desde otra perspectiva. Sin embargo este enfoque también modifica la ley de control incluyendo un filtro pasa-bajas.

En [27] se muestra que una mejor aproximación de la integral es

$$\int_{-h}^0 e^{-A\theta} B u(t + \theta) d\theta \approx \left(e^{\frac{h}{q}A} - I \right) A^{-1} \sum_{p=0}^{q-1} e^{-\frac{p}{q}h(sI-A)} B u \left(t - i \frac{h}{q} \right),$$

donde en el espacio frecuencial es representado por la expresión

$$Z_{f0}(s) = \left(\frac{1 - e^{-\frac{h}{q}s}}{s} \right) \left(\frac{e^{\frac{h}{q}A} - I}{\frac{h}{q}} \right) A^{-1} \sum_{p=0}^{q-1} e^{-\frac{p}{q}h(sI-A)} B.$$

Para una implementación de Z_{f0} en el dominio s se propone la siguiente expresión

$$Z_{f\epsilon}(s) = \left(\frac{1 - e^{-\frac{h}{q}(s+\epsilon)}}{1 - e^{-\frac{h}{q}\epsilon}} \right) \left(\frac{e^{\frac{h}{q}A} - I}{s/\epsilon + 1} \right) A^{-1} \sum_{p=0}^{q-1} e^{-\frac{p}{q}h(sI-A)} B.$$

Aquí la constante positiva ϵ tiene que ser escogida tan pequeña como sea posible (vease [27], observación 2, pag. 2078). Sin embargo no existe un procedimiento simple para escoger $\epsilon > 0$. De igual manera la otra alternativa de un filtro propuesta en [21] requiere resolver una ecuación matricial.

Además, si se quisiera extender estas dos alternativas de implementación a sistemas con múltiples retardos, el diseño de múltiples filtros pasa-bajos sería más complicado.

2.5. Planteamiento del problema

Manituis y Olbrot proponen una ley de control para sistemas lineales invariantes en el tiempo con retardo en la variable de entrada de control que en una implementación práctica usando métodos numéricos tradicionales se muestra que para algunos valores de parámetros es estable [15] y para otros valores de parámetros no [26]. Se muestra además que el problema de estabilidad es debido a que el sistema en lazo cerrado es un sistema con retardos de tipo neutro [25], [26].

El análisis de estabilidad de (2.4) no ha sido suficientemente explorado en la literatura porque la atención ha sido enfocada en la introducción de un filtro pasa-bajas en el lazo de control como una forma de solucionar el problema de implementación, ver [21] y [27].

Como es bien sabido la introducción de un filtro pasa-bajas en el lazo de control representa una alternativa para solucionar el problema, ello puede hacer que la implementación sea innecesariamente complicada (en el diseño de múltiples filtros pasa-bajas) en el caso en que los parámetros de (2.3) son tales que (2.13) es estable.

De ahí que la búsqueda para las condiciones de estabilidad de (2.13) permanece como una importante línea de investigación en el problema de FSA para sistemas con retardo.

Es importante mencionar que ecuaciones integrales con retardo similares, también aparecen en el análisis de estabilidad de la dinámica adicional introducida por algunas transformaciones

de sistemas comunmente usadas para obtener condiciones de estabilidad dependientes del retardo para sistemas con retardo, ver [11] y [12].

El objetivo de esta tesis es encontrar condiciones que garanticen la estabilidad de la dinámica interna de la ley de control (2.13) para una clase de sistemas con múltiples retardos en la entrada de control.

Capítulo 3

Preliminares

Sabemos que muchos sistemas son descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE's, por sus siglas en inglés). Sin embargo personajes como Euler, Bernoulli, Lagrange, Laplace y Poisson incluían en sus modelos matemáticos a las ecuaciones diferenciales funcionales (FDE's, por sus siglas en inglés) en lugar de las ODE's. Esto es dado que este tipo de ecuaciones son más realistas porque incluyen información del pasado de los estados del sistema, se puede decir que el principio de causalidad es sólo una primera aproximación de la realidad [8]. Varios ejemplos de sistemas descritos por FDE son ilustrados en [7], [8] y [13], de entre ellos están el sistema depredador-presa, modelos en viscoelasticidad, en dinámica de poblaciones, en sistemas en transmisión de señales, en sistemas biológicos, en medicina, en ecología, en economía y otras ciencias.

Las FDE's representan una clase de ecuaciones infinito-dimensionales y una característica de este tipo de ecuaciones es que necesitan una función como valor inicial para construir su solución en el tiempo. Además, los efectos en cualquier cambio del sistema no son instantáneos, es decir dependen del pasado de los estados.

Una clase particular de FDE's son las ecuaciones diferenciales en diferencia (DDE, por sus siglas en inglés). Asumiremos que $C_{n,h} \equiv C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ es el conjunto de las funciones continuas mapeando el intervalo $[-h, 0]$ a \mathbb{R}^n , h es una constante positiva que representa el retardo. Designamos la norma de un elemento $\phi \in C_{n,h}$ como $\|\phi\| = \max_{-h \leq \theta \leq 0} \|\phi(\theta)\|$, además definimos $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $-h \leq \theta \leq 0$.

3.1. Ecuaciones diferenciales en diferencia

La forma más general de una DDE de orden n y diferencia m es:

$$f(t, x(t), x(t - h_1), \dots, x(t - h_m), \dots, x^{(n)}(t), \dots, x^{(n)}(t - h_m)) = 0. \quad (3.1)$$

Una subclase de (3.1) con un solo retardo en la variable de estado es:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - h)),$$

donde si $h = 0$ la ecuación se transforma en una ODE.

Otra subclase de (3.1) son los sistemas lineales con retardos no commensurados de tipo neutro, de la forma:

$$\dot{x}(t) - \sum_{k=1}^m B_k \dot{x}(t - h_k) = A_0 x(t) + \sum_{k=1}^m A_k x(t - h_k), \quad h_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, m. \quad (3.2)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ y A_0, A_k y B_k son de dimensiones apropiadas (para $k = 1, 2, \dots, m$). Se dice que si $h_k = kh, k = 1, \dots, m$, en (3.2) el sistema es de retardos commensurados.

Este tipo de ecuaciones es de tipo retardado si se escribe de la siguiente forma:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{k=1}^m A_k x(t - h_k), \quad h_k \geq 0.$$

Básicamente en una ecuación diferencial en diferencias de tipo retardada la razón de cambio del estado presente depende del pasado y presente de los estados. Una ecuación diferencial en diferencias de tipo neutro representa un sistema en que la razón de cambio del estado presente depende de la razón de cambio del estado pasado, así como también de valores pasados y presentes de los estados. Otro caso es la ecuación de tipo avanzada que puede representar un sistema en que la razón de cambio del estado presente, depende de valores presentes y futuros del estado.

3.2. Existencia y unicidad de soluciones

Considere

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-h)). \quad (3.3)$$

Supongamos que f es continua con respecto a todos sus argumentos. Dada una función inicial $\varphi_0(t)$ continua en un intervalo $[t_0 - h, t_0]$, se forma el siguiente sistema

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \varphi_0(t-h)), t \in [t_0, t_0 + h].$$

Considérese una solución de este sistema determinada por una condición inicial $x(t_0) = \varphi_0(t_0)$. Sea $\varphi_1(t)$ esta solución, la cual existe debido a la hipótesis de continuidad de la función f .

Si esta solución está definida en todo el intervalo $[t_0, t_0 + h]$, entonces se puede formar el nuevo sistema:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \varphi_1(t-h)), t \in [t_0 + h, t_0 + 2h].$$

Considérese una solución de este sistema determinada por la condición inicial $x(t_0 + h) = \varphi_1(t_0 + h)$. Sea $\varphi_2(t)$ ésta solución. En general, asumiendo que $\varphi_{k-1}(t)$ está definida en el intervalo $[t_0 + (k-2)h, t_0 + (k-1)h]$ se forma el sistema

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \varphi_{k-1}(t-h)), t \in [t_0 + (k-1)h, t_0 + kh]$$

y se considera una solución de este sistema con condición inicial

$$x(t_0 + (k-1)h) = \varphi_{k-1}(t_0 + (k-1)h).$$

Sea $\varphi_k(t)$ esta solución. Así, una solución del sistema (3.3), $x(t)$ definida por la condición inicial $\varphi_0(t)$ estará determinada por

$$x(t) = \varphi_k(t), t \in [t_0 + (k-1)h, t_0 + kh], k = 0, 1, 2, \dots$$

La función $x(t)$ es continua como consecuencia de su construcción. Además la función $x(t)$ es

diferenciable y tiene una derivada continua en los puntos interiores de los intervalos $[t_0 + (k-1)h, t_0 + kh]$, $k \geq 1$. En el punto t_0 , únicamente la derivada derecha existe.

Si $f(t, x, y)$ satisface la condición de Lipschitz con respecto a x , independientemente de y , entonces existe una única solución la cual coincide con $\varphi_0(t)$ en el intervalo $[t_0 - h, t_0]$. Bajo esta condición las funciones $\varphi_k(t)$ son únicamente determinadas y cada solución coincide con $\varphi_k(t)$ en el intervalo $[t_0 + (k-1)h, t_0 + kh]$, $k \geq 1$.

El análisis anterior puede extenderse a sistemas con retardo de tipo neutro de la forma:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-h), \dot{x}(t-h))$$

con una función inicial $\varphi_0(t)$ continua y diferenciable en $[t_0 - h, t_0]$.

En el caso de DDE lineales con un solo retardo de la forma

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t-h)$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$, dada una condición inicial $\varphi(t) \in C_{n,h}$, se tiene que $x(t)$ debe satisfacer:

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-h, 0],$$

$$x(t) = e^{at} \left(\varphi(0) + \int_0^t e^{-a\xi} b x(\xi - h) d\xi \right), t \geq 0.$$

Es claro que $x(t)$ tiene primera derivada continua para $t > 0$ y tiene una derivada continua en $t = 0$ si y sólo si $\varphi(t)$ tiene derivada en $t = 0$ y satisface que

$$\dot{\varphi}(0) = a\varphi(0) + b\varphi(-h).$$

Para ilustrar la construcción de soluciones tomemos el siguiente ejemplo escalar [1]. Sea

$$\dot{x}(t) = x(t-1) \tag{3.4}$$

y supóngase $x(t) = 1, -1 \leq t \leq 0$. Utilizando el método de pasos y por inducción se puede

mostrar que la solución de (3.4) es:

$$x(t) = \sum_{j=0}^N \frac{(t-j+1)^j}{j!}, \quad \forall t \in [N-1, N], \quad N = 1, 2, \dots$$

En la Figura 3.1 graficamos esta solución.

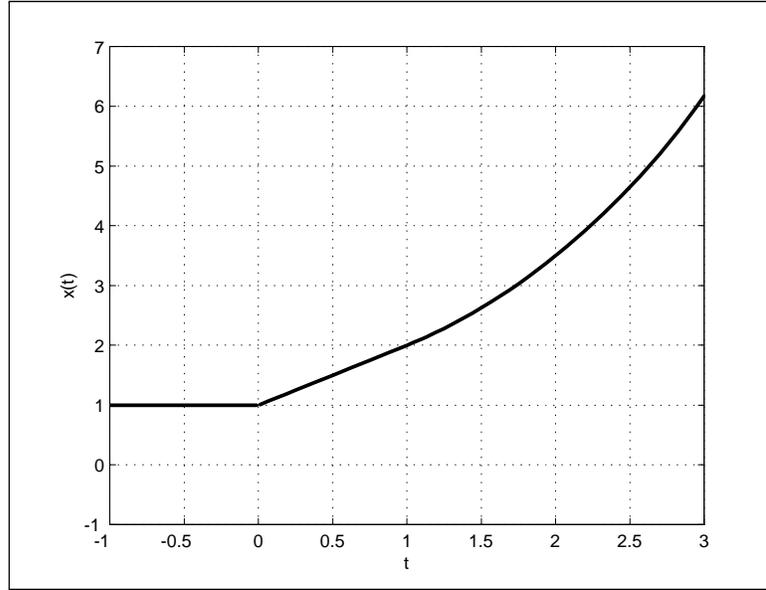


Fig. 3.1 Solución de (3.4).

Notar que la ecuación (3.4) implica que $\dot{x}(t)$ es continua para todo $t > 0$. De la gráfica se puede apreciar que la función se suaviza conforme se incrementa el tiempo. Esta es una característica de los sistemas de tipo retardado.

Cabe notar que para sistemas con retardo de tipo neutro no ocurre un suavizamiento de las soluciones conforme se incrementa el tiempo. Observemos un sistema con un solo retardo descrito por

$$\dot{x}(t) - c\dot{x}(t-h) = ax(t) + bx(t-h) \quad h > 0 \quad (3.5)$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Teorema 4 [8, Cap.1] Si $c \neq 0$ y ϕ es una función continua diferenciable en $[-h, 0]$, entonces existe una única función $x : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, que coincide con ϕ en $[-h, 0]$, es continuamente

diferenciable excepto en los puntos $kh, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ y satisface la ecuación (3.5). Esta solución no puede tener más derivadas que ϕ y es continuamente diferenciable si y sólo si:

$$\dot{\phi}(0) \equiv c\dot{\phi}(-h) + a\phi(0) + b\phi(-h).$$

Para ejemplificar el teorema consideremos el sistema [13]

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \dot{x}(t-1), & 0 \leq t < \infty \\ x(t) &= \phi(t), & -1 \leq t \leq 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde $\phi(t)$ es continuamente diferenciable en $[-h, 0]$. Utilizando el método de pasos se puede mostrar que la solución de (3.6) es:

$$x(t) = \phi(t-j) + j[\phi(0) - \phi(-1)], \quad j-1 \leq t \leq j, \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

Si designamos una condición inicial $\phi(t) = t^2, -1 \leq t \leq 0$ la solución (3.7) se reescribe como $x(t) = (t-j)^2 - j$ para $j-1 \leq t \leq j$ con $j = 1, 2, \dots$. En la Figura 3.2 se observa la solución de $x(t)$ para $-1 \leq t \leq 3$.

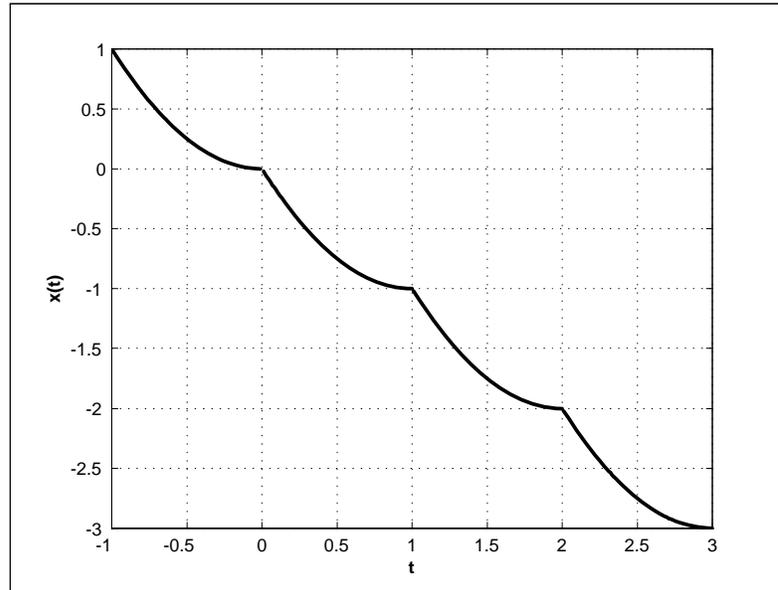


Fig. 3.2 Solución de (3.6).

Para este ejemplo $\dot{\phi}(0) \neq \dot{\phi}(-1)$, entonces $\dot{x}(t)$ tiene discontinuidades en $t = 0, 1, \dots$. Además la función no se suaviza conforme se incrementa el tiempo.

3.3. Estabilidad de ecuaciones diferenciales en diferencia lineales

Consideremos una DDE lineal de tipo retardada

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + \sum_{k=1}^m A_kx(t - h_k) \quad (3.8)$$

donde $A_0, A_1, \dots, A_m \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $h_k \in \mathbb{R}^+$. La función característica asociada a (3.8) es:

$$p(s; e^{-h_1s}, \dots, e^{-h_ms}) = \det \left(sI - A_0 - \sum_{k=1}^m A_k e^{-h_k s} \right) \quad (3.9)$$

Cabe mencionar que la función característica (3.9) pertenece a un grupo de funciones llamadas polinomios exponenciales o cuasipolinomios. Un cuasipolinomio es una función entera analítica para toda $s \in \mathbb{C}$, cuya principal característica es que tiene un número infinito de ceros.

Definición 5 [7, Cap. 2] *La función característica (3.9) se dice estable si*

$$p(s; e^{-h_1s}, \dots, e^{-h_ms}) \neq 0, \forall s \in \bar{\mathbb{C}}_+ \quad (3.10)$$

Se dice que (3.9) es estable independiente del retardo si (3.10) se satisface para todo $h_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, m$. El sistema (3.8) se dice estable si la función característica (3.9) es estable y se dice estable independiente del retardo si su función característica es estable independiente del retardo.

De aquí que el sistema (3.8) es estable independiente del retardo si la estabilidad persiste con respecto a todos los valores posibles de retardo. De otra manera, si el sistema es estable solo para un subconjunto de retardos positivos, entonces se dice que la estabilidad es dependiente del retardo.

En un cuasipolinomio de tipo retardado, las raíces de módulo grande se encuentran en el semiplano izquierdo abierto en el plano complejo, las cuales son un número infinito. Las raíces de modulo no tan grande se encuentran dentro de una vecindad centrada en el origen del plano complejo, estas raíces son un número finito.

Además, en un cuasipolinomio de tipo retardado, a la derecha de cualquier línea vertical en el plano complejo, existe un número finito de raíces, el número de raíces aumenta cuando la línea vertical se desplaza a la izquierda.

Para sistemas lineales de tipo retardado garantizar que un cuasipolinomio característico tenga todas las raíces con parte real negativa es equivalente a decir que es exponencialmente estable. Esto no se cumple para sistemas DDE de tipo neutro, la existencia de raíces de la ecuación característica asociada a un sistema de tipo neutro con parte real negativa no implica que el sistema sea exponencialmente estable, es más puede incluso no ser ni siquiera estable en el sentido de Lyapunov, por lo que en un sistema descrito por:

$$\dot{x}(t) - \sum_{k=1}^m B_k \dot{x}(t - h_k) = A_0 x(t) + \sum_{k=1}^m A_k x(t - h_k), \quad h_k \geq 0. \quad (3.11)$$

cuya función característica asociada es:

$$p(s; e^{-h_1 s}, \dots, e^{-h_m s}) = \det \left(s \left(I - \sum_{k=1}^m B_k e^{-h_k s} \right) - \sum_{k=0}^m A_k e^{-h_k s} \right), \quad (3.12)$$

garantizar que (3.12) tenga todas las raíces con parte real negativa no es suficiente.

Definición 6 [7, Cap. 3] *La ecuación característica (3.12) es estable si existe un $\alpha < 0$ tal que:*

$$p(s; e^{-h_1 s}, \dots, e^{-h_m s}) \neq 0, \forall s \in \bar{\mathbb{C}}_{\alpha+} \quad (3.13)$$

donde $\bar{\mathbb{C}}_{\alpha+} := \{s : \mathbb{R}(s) \geq \alpha\}$. Se dice estable independiente del retardo si (3.13) se cumple para todo $h_k \geq 0, k = 1, 2, 3, \dots, m$. El sistema neutral (3.11) se dice estable si la función característica (3.12) es estable. Es estable independiente del retardo si su función característica es estable independiente del retardo.

Es importante comparar las definiciones de estabilidad para sistemas con retardo de tipo

neutro y de tipo retardado. Primero, para sistemas de tipo retardado existen un número finito de ceros de su función característica a la derecha de cualquier línea vertical en el plano complejo, esto no es necesariamente el caso para un sistema de tipo neutro. Para satisfacer la condición (3.13) es necesario que todos los ceros de la función característica estén a la izquierda de alguna línea vertical $\text{Re}(s) = \alpha$ para algún $\alpha < 0$.

Una condición necesaria para garantizar la estabilidad del sistema (3.11) es garantizar la estabilidad de la ecuación en diferencias:

$$x(t) - \sum_{k=1}^m B_k x(t - h_k) = 0, \quad h_k \geq 0. \quad (3.14)$$

Definición 7 [7, Cap. 3] *La ecuación en diferencias (3.14) se dice estable si existe un $\alpha < 0$ tal que*

$$\det \left(I - \sum_{k=1}^m B_k e^{-h_k s} \right) \neq 0, \forall s \in \bar{\mathbb{C}}_{\alpha+} \quad (3.15)$$

Para garantizar la estabilidad de (3.14) en el caso de retardos commensurables se tiene el siguiente resultado:

Lema 8 [7, Cap. 3] *Dado $h_k = kh, k = 1, \dots, m$. El sistema (3.14) es estable para todo $h \geq 0$ si y sólo si $\rho(B) < 1$, donde:*

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & \cdots & B_{m-1} & B_m \\ I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & I & 0 \end{pmatrix}.$$

Esta condición necesaria y suficiente de estabilidad no es suficiente para garantizar la estabilidad de (3.11).

El siguiente resultado proporciona condiciones de estabilidad para el sistema (3.11).

Teorema 9 [7, Cap. 3] *Dado $h_k = kh, k = 1, \dots, m$. El sistema (3.11) se dice estable independiente del retardo si y sólo si*

$$1) \rho(B) < 1,$$

- 2) A_0 es estable,
 3) $(I - \sum_{k=1}^m B_k) \sum_{k=1}^m A_k$ es estable, y
 4) $\rho(M_m(j\omega)) < 1$ donde

$$M_m(s) := \begin{pmatrix} \Phi(s)F_1(s) & \cdots & \Phi(s)F_1(s) & \Phi(s)F_1(s) \\ I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & I & 0 \end{pmatrix},$$

con $\Phi(s) := (sI - A)^{-1}$ y $F_k(s) = sB_k + A_k$, $k = 1, \dots, m$.

Existe una gran cantidad de resultados que pueden ser mencionados para el estudio de estabilidad de sistemas con retardos de tipo retardado y neutro utilizando herramientas frecuenciales y en el dominio del tiempo (enfoque de Lyapunov). Para una descripción más detallada de tales métodos, véase [1], [8], [7] y [13].

Capítulo 4

Resultados

Sabemos que muchos sistemas son descritos por DDE's con retardos y que la naturaleza infinito-dimensional de estos sistemas hace que su control sea un problema no trivial. La ley de control propuesta en [14] resuelve el problema de FSA para sistemas lineales con retardo en la entrada de control, sin embargo, como ya hemos visto, para una implementación segura de esta ley se tiene que garantizar que su dinámica interna (descrita por una clase especial de ecuaciones integrales con retardo) sea estable.

Las alternativas de implementación en [21] y [27] modifican la estructura de la ley de control añadiendo un filtro pasa-bajas y estas teorías no pueden ser extendidas fácilmente a sistemas con múltiples retardos en la entrada de control. Adicionalmente, estas alternativas de implementación pueden hacer innecesariamente complicada la implementación (en el diseño de varios filtros pasa-bajas) en el caso de aquellos parámetros del sistema para los cuales la dinámica interna del controlador es estable.

Dado esto, en este capítulo presentamos los resultados principales del trabajo de tesis. Primeramente, consideremos el caso de sistemas lineales escalares de múltiples retardos en la entrada de control y posteriormente extendemos los resultados al caso matricial. En ambos casos se obtienen condiciones suficientes para la estabilidad asintótica de las ecuaciones integrales con retardo que gobiernan la dinámica interna de las correspondientes leyes de control que asignan un espectro finito a los sistemas en lazo cerrado.

Se presentan varios ejemplos numéricos que ilustran el potencial de los resultados obtenidos. Finalmente se presenta una interesante aplicación a un modelo de redes TCP/AQM con retar-

dos.

4.1. Caso escalar

Consideremos la siguiente clase de sistemas lineales escalares con múltiples retardos en la entrada de control:

$$\dot{x}(t) = ax(t) + \sum_{j=1}^r b_j u(t - h_j), \quad (4.1)$$

donde $a, b_1, b_2, \dots, b_r \in \mathbb{R}$ y $0 \leq h_1 < h_2 < \dots < h_r$.

La ley de control

$$u(t) = fx(t) + f \sum_{j=1}^r \int_{-h_j}^0 e^{-a(h_j+\theta)} b_j u(t+\theta) d\theta, \quad (4.2)$$

asigna al sistema en lazo cerrado (4.1)-(4.2) el valor propio

$$\lambda = a + \left(\sum_{j=1}^r e^{-ah_j} b_j \right) f.$$

Así, escogiendo adecuadamente la ganancia de retroalimentación f , es posible ubicar el valor propio λ del sistema en lazo cerrado en cualquier número real preasignado.

La aplicación de la ley de control (4.2) demanda la implementación del término integral en cada instante de tiempo. Cuando $a > 0$, la realización de este término como la solución de una ecuación diferencial debe ser descartado siempre que se involucre una cancelación polo-cero.

Como se sugiere en [14], una posible solución a este problema es usando métodos numéricos para aproximar el término integral. Como sabemos, si la integral a la derecha en (4.2) es aproximada por una suma finita, entonces el sistema en lazo cerrado puede ser inestable si (4.2) no es internamente estable [6] y [25]. La dinámica interna de (4.2) es descrita por la siguiente ecuación integral:

$$\tilde{u}(t) = f \sum_{j=1}^r \int_{-h_j}^0 e^{-a(h_j+\theta)} b_j \tilde{u}(t+\theta) d\theta. \quad (4.3)$$

La función característica asociada a (4.3) es

$$p(s) = 1 - f \sum_{j=1}^r b_j e^{-ah_j} \int_{-h_j}^0 e^{\theta(s-a)} d\theta. \quad (4.4)$$

Desarrollando las integrales, (4.4) se reescribe como:

$$p(s) = 1 - f \sum_{j=1}^r b_j e^{-ah_j} \left(\frac{1 - e^{-h_j(s-a)}}{s - a} \right).$$

Todos los ceros de $p(s)$ coinciden con ser ceros del cuasipolimomio tipo retardado:

$$q(s) = s - a - f \sum_{j=1}^r b_j e^{-ah_j} + f \sum_{j=1}^r b_j e^{-sh_j} = (s - a)p(s).$$

El único cero de $q(s)$ que no es cero de $p(s)$ es $s = a$. Dado esto se tiene el siguiente resultado:

Proposición 10 *Una condición necesaria y suficiente para garantizar la estabilidad exponencial de (4.3) es que todos los ceros de la función característica $p(s)$ tengan parte real negativa.*

El siguiente teorema proporciona condiciones suficientes de estabilidad dependientes del retardo para (4.3).

Teorema 11 *Si*

$$\sum_{j=1}^r \max_{\theta \in [-h_j, 0]} |f b_j e^{-a(h_j + \theta)}| h_j < 1 \quad (4.5)$$

entonces todos los ceros de (4.4) tienen parte real negativa.

Prueba. Primero observemos que para todo $h > 0$ y cualquier s con $Re(s) \geq 0$ se cumple

$$\left| \int_{-h}^0 e^{\theta s} d\theta \right| = \left| \frac{1 - e^{-hs}}{s} \right| \leq h.$$

Procediendo por contraposición, suponemos que $p(s)$ tiene un cero, s_0 , con parte real no negativa.

Entonces

$$1 = \sum_{j=1}^r f b_j e^{-ah_j} \int_{-h_j}^0 e^{\theta(s-a)} d\theta$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} 1 &\leq \sum_{j=1}^r \max_{\theta \in [-h_j, 0]} \left| f b_j e^{-a(h_j + \theta)} \right| \left| \frac{1 - e^{-h_j s_0}}{s_0} \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^r \max_{\theta \in [-h_j, 0]} \left| f b_j e^{-a(h_j + \theta)} \right| h_j. \end{aligned}$$

La última desigualdad completa la demostración. ■

Corolario 12 *Si $a < 0$ y $\sum_{j=0}^r |f b_j e^{-a h_j}| h_j < 1$, entonces los ceros de $p(s)$ tienen parte real negativa.*

Corolario 13 *Si $a > 0$ y $\sum_{j=0}^r |f b_j| h_j < 1$, entonces los ceros de $p(s)$ tienen parte real negativa.*

4.1.1. Ejemplo escalar (un solo retardo)

Consideremos el siguiente sistema escalar:

$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t - h). \quad (4.6)$$

En este caso la ley de control (4.2) se simplifica como

$$u(t) = f \left(x(t) + e^{-h} \int_{-h}^0 e^{-\theta} u(t + \theta) d\theta \right) \quad (4.7)$$

y (4.3) como

$$\tilde{u}(t) = f e^{-h} \int_{-h}^0 e^{-\theta} \tilde{u}(t + \theta) d\theta. \quad (4.8)$$

Del Corolario 13 obtenemos que (4.8) es exponencialmente estable si $|f| < 1/h$. En la Figura 4.1, graficamos la región determinada por $1 + f e^{-h} < 0$ (condición de estabilidad para el lazo cerrado) y la condición de estabilidad $|f| h < 1$ en el plano (h, f) . Denotamos a la intersección de estas dos regiones como R_s .

Seleccionando $h = 1$, correspondiente al ejemplo ampliamente estudiado en la literatura (ver: [6], [19], [21] y [27]) encontramos que no existe f en la región R_s que garantice la estabilidad de (4.8). Por lo tanto, no podemos garantizar una implementación segura de (4.7) por métodos

de tipo cuadratura. Esto simplemente explica la inestabilidad de la implementación de la ley de control reportada en la literatura cuando f es seleccionada para asignar un valor propio de $\lambda = -1$, ver [25] y [26].

Por otro lado, es claro que existen algunos pares (h, f) para los cuales la estabilización puede ser garantizada. De la Figura 4.1 podemos encontrar un valor de retardo máximo para el cual se pueda garantizar la estabilización. Así tenemos que para $h \in (0, 0.5670)$ se cumple que la ecuación de la dinámica interna (4.8) y el lazo cerrado (4.6)-(4.7) son estables.

Notemos que cuando el retardo h tiende a cero, la ganancia de retroalimentación tiende a infinito lo que implica que la estabilidad puede ser garantizada usando la colocación arbitraria de polos en correspondencia con el caso de los sistemas lineales sin retardo ($h = 0$).

En la Figura 4.2 presentamos una simulación numérica usando el método trapezoidal ($q = 100$) para la aproximación de la integral con $h = 0.3$ y $f = -2$, junto con la respuesta ideal en lazo cerrado. Para estos valores en particular se asigna en lazo cerrado un valor propio $\lambda = -0.4816$.

En la Figura 4.3 comparamos la respuesta del sistema en lazo cerrado utilizando el método trapezoidal para la aproximación de la integral cambiando el paso de integración ($q = 100$, $q = 50$ y $q = 10$). Cabe mencionar que para estos valores de parámetros si reducimos aún más el paso de integración se generan errores de aproximación y no de estabilidad.

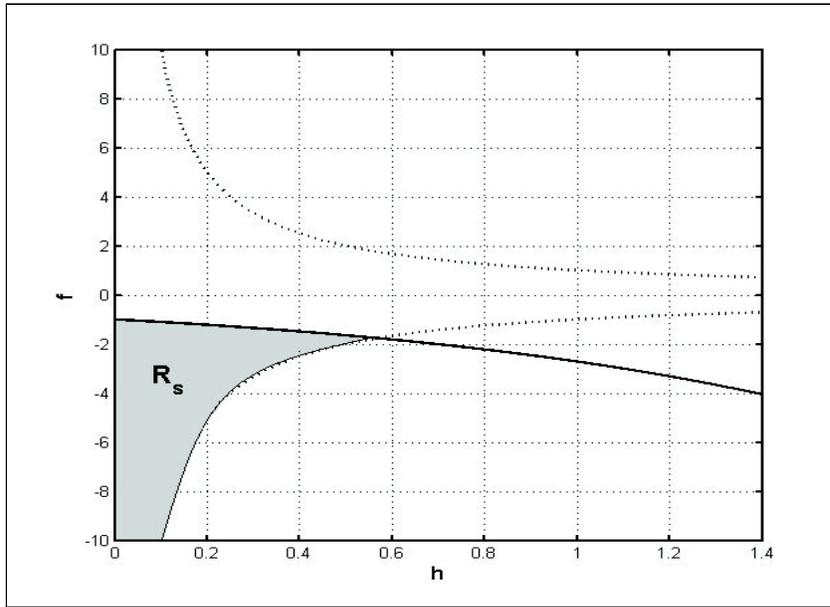


Fig. 4.1 Región de estabilidad de (4.8) determinada por $|f|h < 1$ (- -) y región de estabilidad para el sistema en lazo cerrado ideal determinada por $1 + ke^{-h} < 0$ (-)

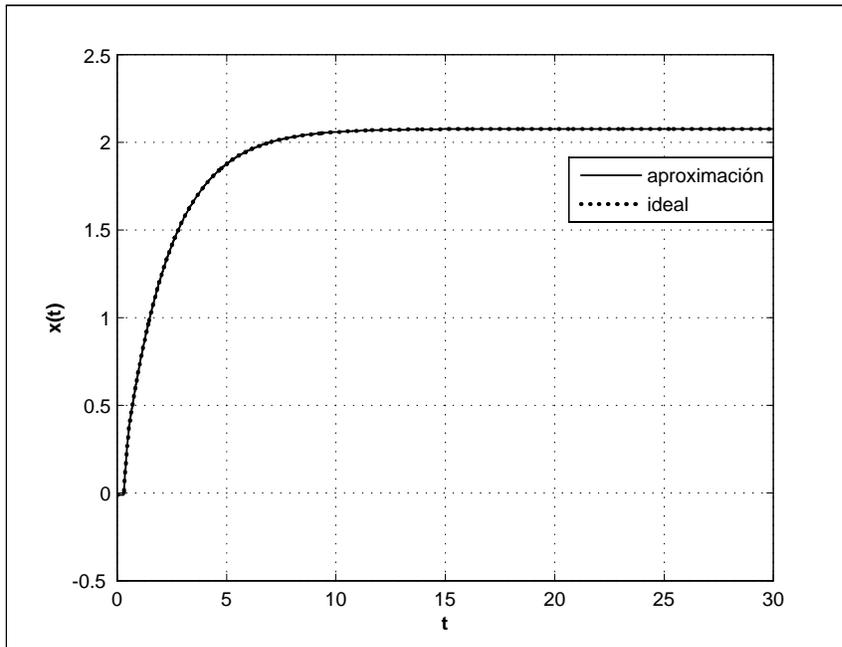


Fig. 4.2 Simulación numérica aproximando (4.7) con el método trapezoidal ($q = 100$) y respuesta en lazo cerrado ideal.

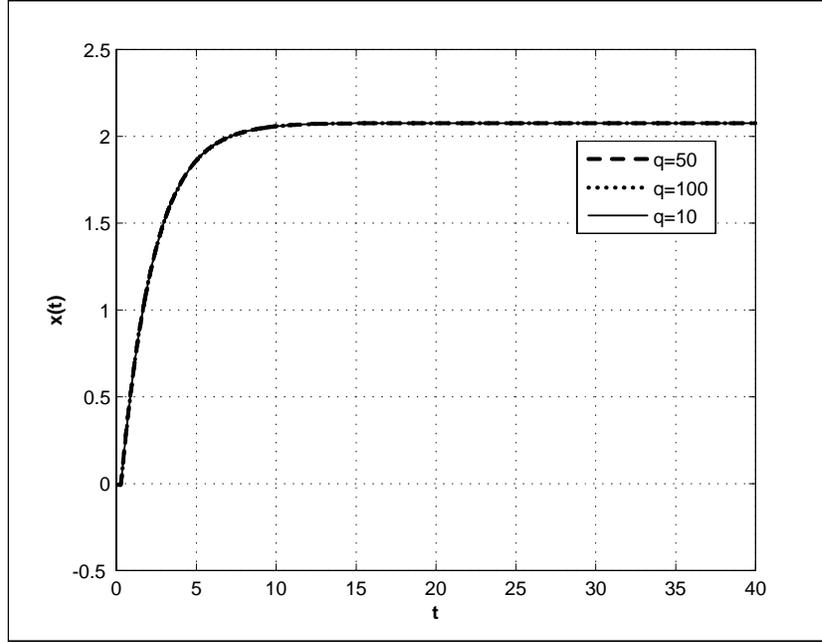


Fig. 4.3 Simulación numérica aproximando (4.7) con el método trapezoidal para $q = 100$, $q = 50$ y $q = 10$.

4.1.2. Ejemplo escalar (múltiples retardos)

Para ilustrar el potencial de estos resultados consideraremos ahora el siguiente sistema escalar con dos retardos en la entrada:

$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t - 0.3) + u(t - 0.5). \quad (4.9)$$

Para este caso la ley de control (4.2) es:

$$u(t) = f \left(x(t) + \int_{-0.3}^0 e^{-(0.3+\theta)} u(t+\theta) d\theta + \int_{-0.5}^0 e^{-(0.5+\theta)} u(t+\theta) d\theta \right) \quad (4.10)$$

y (4.3)

$$\tilde{u}(t) = f \left(\int_{-0.3}^0 e^{-(0.3+\theta)} \tilde{u}(t+\theta) d\theta + \int_{-0.5}^0 e^{-(0.5+\theta)} \tilde{u}(t+\theta) d\theta \right). \quad (4.11)$$

Del Corolario 13 obtenemos que si $|f| < 1.25$ entonces (4.11) es exponencialmente estable. Para garantizar la estabilidad en lazo cerrado de este sistema se busca que el valor propio $\lambda = 1 - f(e^{-0.5} + e^{-0.3})$ sea negativo, lo que implica que $f < -0.7422$ garantizará esta condición.

Entonces, para $f \in (-1.25, -0.7422)$, tanto la dinámica interna de la ley de control (4.11) como el sistema en lazo cerrado ideal (4.9)-(4.10) son estables.

Cabe notar que el valor propio del sistema en lazo cerrado puede ser ubicado en el intervalo $(-0.6824, 0)$, lo cual, para propósitos de estabilización, es más que suficiente.

En la Figura 4.4 presentamos una simulación numérica con la aproximación de la ley de control (4.10) (usando el método trapezoidal) para $f = -1$ y la comparamos con la respuesta en lazo cerrado ideal asociada al valor propio en lazo cerrado ideal $\lambda = -0.3473$.

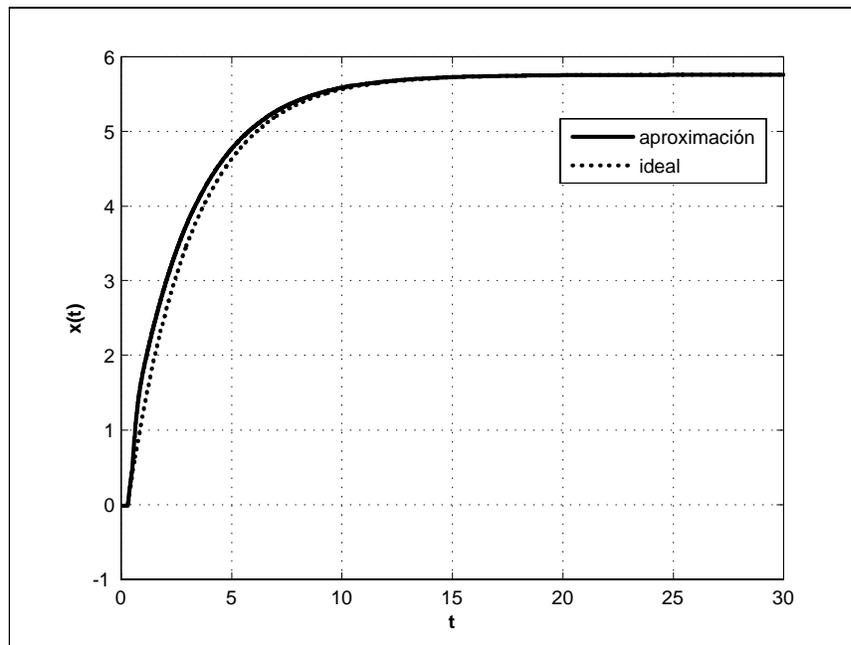


Fig. 4.4 Simulación numérica aproximando (4.10) con el método trapezoidal ($q=100$) y respuesta ideal en lazo cerrado.

Como puede verse en estos ejemplos, para algunos valores de parámetros satisfaciendo condiciones simples de verificar, la estabilidad del lazo cerrado puede ser lograda en el espíritu del enfoque original propuesto en [14] sin la necesidad de introducir algún filtro pasa-bajos en el lazo de control como ocurre en [21] y [27]. Por otro lado, para aquellos valores de parámetros que no

satisfacen las condiciones de estabilidad, las alternativas de implementación que involucren un filtro pasa-bajas en el lazo de control proporcionan una solución al problema de estabilización.

4.2. Caso matricial

En esta sección se extienden los resultados a la clase de sistemas matriciales con múltiples retardos en la entrada de control denotada por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{j=1}^r B_j u(t - h_j), \quad (4.12)$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_j \in \mathbb{R}^{n \times m}$ para $j = 1, \dots, r$ con $0 \leq h_1 < h_2 < \dots < h_r$.

La ley de control

$$u(t) = Fx(t) + F \sum_{j=1}^r e^{-h_j A} \int_{-h_j}^0 e^{-A\theta} B_j u(t + \theta) d\theta \quad (4.13)$$

asigna un espectro finito al sistema en lazo cerrado, el cual coincide con el espectro de la matriz $A + \sum_{j=1}^r e^{-h_j A} B_j F$.

La ecuación integral que determina la dinámica interna de la ley control tiene la siguiente forma:

$$\tilde{u}(t) = F \sum_{j=1}^r \int_{-h_j}^0 e^{-A(h_j + \theta)} B_j \tilde{u}(t + \theta) d\theta \quad (4.14)$$

cuya función característica es:

$$\begin{aligned} p(s) &= \det \left(I_m - F \sum_{j=1}^r \int_{-h_j}^0 e^{-A(h_j + \theta)} B_j e^{\theta s} d\theta \right) \\ &= \det (I_m - FM(s)), \end{aligned} \quad (4.15)$$

donde

$$M(s) = \sum_{j=1}^r (sI_n - A)^{-1} \left(I_n - e^{-h_j(sI_n - A)} \right) e^{-Ah_j} B_j.$$

Todos los ceros de $p(s)$ coinciden con ser ceros del cuasipolinomio de tipo retardado $q(s)$

$$\begin{aligned}
q(s) &= \det \left(sI_n - A - \sum_{j=1}^r e^{-Ah_j} (I - e^{-h_j(sI-A)}) B_j F \right) \\
&= \det (sI_n - A) \det (I_n - M(s)F) \\
&= \det (sI_n - A) \det (I_m - FM(s)) \\
&= \det (sI_n - A) p(s).
\end{aligned}$$

Los únicos ceros de $q(s)$ que no son ceros de $p(s)$ son los valores propios de la matriz A .

Proposición 14 *Una condición necesaria y suficiente para garantizar la estabilidad exponencial de (4.14) es que todos los ceros de la función característica $p(s)$ tengan parte real negativa.*

El siguiente teorema provee condiciones suficientes de estabilidad dependientes del retardo para (4.14).

Teorema 15 *Si*

$$\sum_{j=1}^r \max_{\theta \in [-h_j, 0]} \left\| F B_j e^{-A(h_j+\theta)} \right\| h_j < 1 \tag{4.16}$$

entonces todos los ceros de $p(s)$ tienen parte real negativa.

Prueba. Sabemos que

$$\left| \frac{1 - e^{-hs}}{s} \right| \leq h, \quad \forall s \mid \operatorname{Re}(s) \in \mathbb{R}^+.$$

Ahora asumimos que $p(s)$ tiene un cero, s_0 , con parte real no negativa. Entonces existe un vector complejo v , distinto de cero, tal que

$$\left(sI_m - F \sum_{j=1}^r \int_{-h_j}^0 e^{-A(h_j+\theta)} B e^{\theta s_0} d\theta \right) v = 0.$$

Se sigue que

$$I_m = F \sum_{j=0}^r \int_{-h_j}^0 e^{-A(h_j+\theta)} B e^{\theta s_0} d\theta$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
1 &\leq \sum_{j=1}^r \max_{\theta_j \in [-h_j, 0]} \left\| FB_j e^{-A(h_j + \theta_j)} \right\| \left| \frac{1 - e^{-h_j s_0}}{s_0} \right| \\
&\leq \sum_{j=1}^r \max_{\theta_j \in [-h_j, 0]} \left\| FB_j e^{-A(h_j + \theta_j)} \right\| h_j.
\end{aligned}$$

La última desigualdad prueba el teorema. ■

4.2.1. Ejemplo matricial

Un ejemplo que resulta ilustrativo para un sistema matricial es el usado en [6], [14] y [19], donde consideran un sistema de la forma:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= u(t - h) \\
\dot{x}_2(t) &= x_1(t) + x_2(t)
\end{aligned} \tag{4.17}$$

En este caso, la ley de control (4.13) es:

$$u(t) = f_1 x_1(t) + f_2 x_2(t) + (f_2 - f_1) \int_{-h}^0 u(t + \theta) d\theta + f_2 e^{-h} \int_{-h}^0 e^{-\theta} u(t + \theta) d\theta \tag{4.18}$$

El espectro del sistema en lazo cerrado (4.17)-(4.18) es determinado por los ceros del polinomio característico:

$$g(s) = s^2 + s(-1 - f_1 - f_2(e^{-h} - 1)) + f_1 - f_2. \tag{4.19}$$

El polinomio $g(s)$ es estable si y sólo si

$$f_1 > f_2 \quad \text{y} \quad f_2 > -\frac{1 + f_1}{(e^{-h} - 1)}. \tag{4.20}$$

Por otro lado, la dinámica interna de la ley de control (4.14) es descrita por la ecuación

$$\tilde{u}(t) = (f_2 - f_1) \int_{-h}^0 \tilde{u}(t + \theta) d\theta + f_2 e^{-h} \int_{-h}^0 e^{-\theta} \tilde{u}(t + \theta) d\theta. \tag{4.21}$$

Aplicando el Teorema 15 se tiene que (4.21) es exponencialmente estable si

$$\max_{\theta \in [-h, 0]} \left| f_1 + f_2(e^{-h-\theta} - 1) \right| h < 1. \quad (4.22)$$

En la Figura 4.5 se muestra un esquema representativo de la región de estabilidad determinado por (4.20) y (4.22) en el plano (f_1, f_2) . Los puntos de intersección de las líneas determinadas por las cotas de las regiones de estabilidad con los ejes coordenados están definidos por $a = -1/(e^{-h} - 1)$ y $b = a/h$.

Donde el punto de intersección de $f_1 = f_2$ y $f_2 = -\frac{1+f_1}{(e^{-h}-1)}$ es $(-e^h, -e^h)$ y el punto $c = (-\alpha, -\alpha)$, donde $\alpha = e^h$.

Es claro que para garantizar la existencia de pares (f_1, f_2) tales que (4.21) y (4.19) sean estables se debe satisfacer que

$$\alpha h < 1. \quad (4.23)$$

De la desigualdad (4.23) podemos calcular un valor de retardo h máximo para el cual se puede garantizar la estabilización. Así, para $h \in (0, 0.57)$ se cumple que tanto (4.21) como el sistema en lazo cerrado (4.17)-(4.18) son estables.

En la Figura 4.6 se muestra entre líneas punteadas la región de estabilidad del sistema en lazo cerrado (4.17)-(4.18) y la región de estabilidad de la dinámica interna de la ley de control seleccionando $h = 0.1$. Seleccionando $f_1 = -1.6$ y $f_2 = -2$, se asigna idealmente los valores propios $\lambda_1 = -0.2 + 0.59i$ y $\lambda_2 = -0.2 - 0.59i$. En las Figuras 4.6 y 4.7 se grafica la respuesta a entrada escalón de cada uno de los estados del sistema utilizando el método trapezoidal de aproximación (con un paso de $q = 100$).

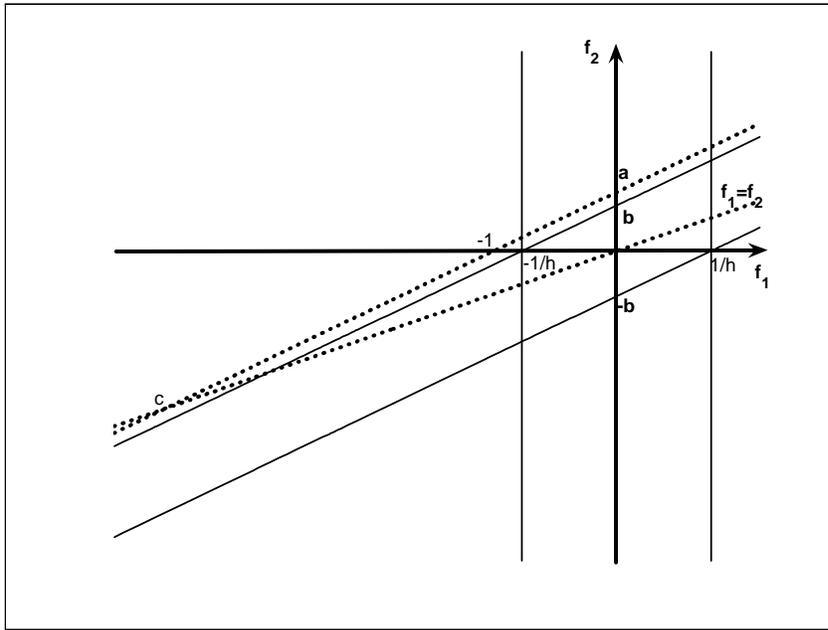


Fig. 4.5 Esquema representativo de la región de estabilidad para (4.19) (- -) y (4.21) (-).

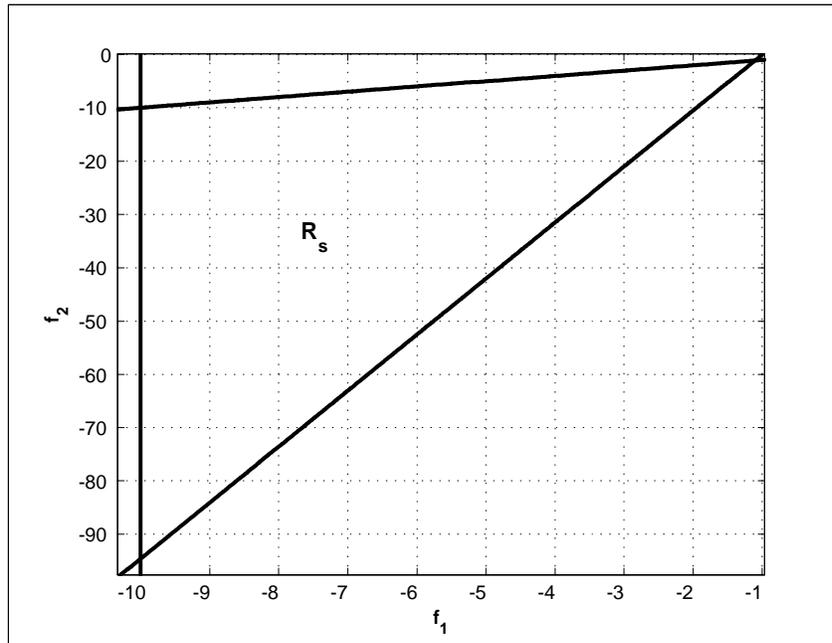


Fig. 4.6 Región de estabilidad para la ley de control y para el sistema en lazo cerrado (4.17)-(4.18).

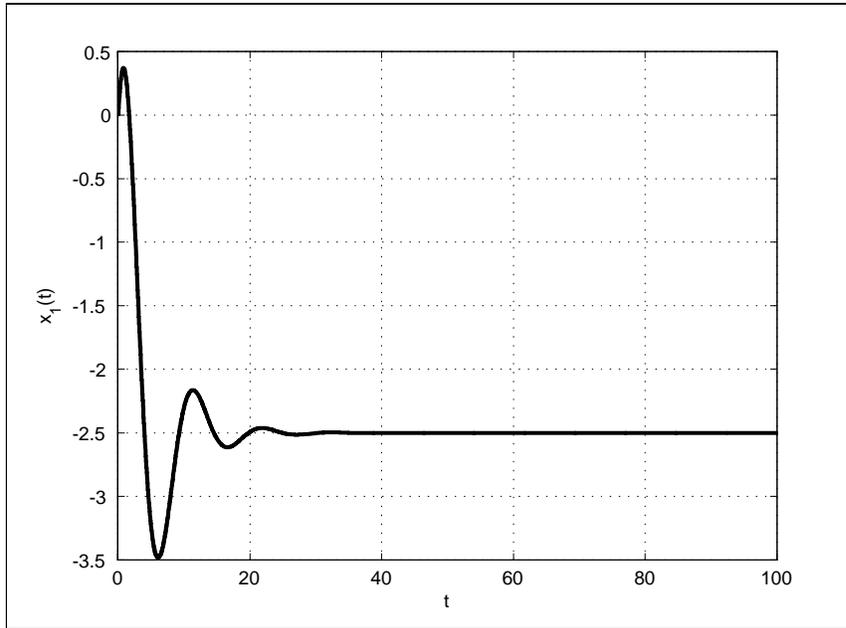


Fig. 4.7 Respuesta del estado $x_1(t)$ utilizando el método trapezoidal para aproximar el término integral en (4.18).

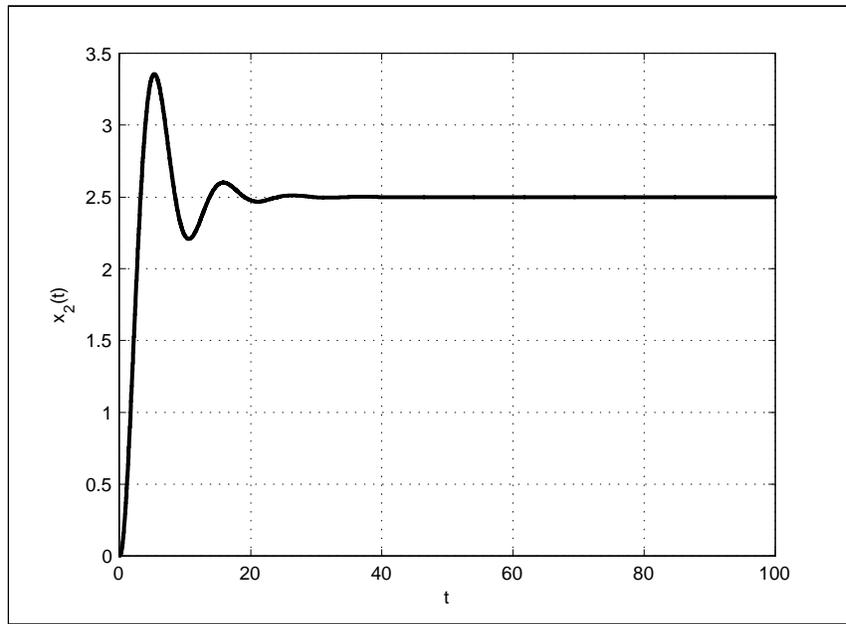


Fig. 4.8 Respuesta del estado $x_2(t)$ utilizando el método trapezoidal para aproximar el término integral en (4.18).

4.3. FSA para un modelo con retardos de redes TCP/AQM

Consideremos un modelo ampliamente estudiado que describe aproximadamente el comportamiento de una red TCP/AQM (ver [4], [9], [10], [16], [23]). Tal modelo, que relaciona los valores promedio de las variables clave de red de n fuentes homogéneas controladas por TCP (Transmission Control Protocol) y un único ruteador congestionado, está descrito por las siguientes ecuaciones diferenciales no-lineales con retardo:

$$\begin{aligned}\dot{w}(t) &= \frac{1}{\tau} - \frac{1}{2\tau}w^2(t)p(t-\tau), \\ \dot{q}(t) &= \frac{n}{\tau}w(t) - c,\end{aligned}\tag{4.24}$$

donde $w(t)$ denota el promedio del tamaño de la ventana [paquetes], $q(t)$ es el promedio de la longitud de la cola [paquetes], $\tau \in \mathbb{R}^+$ es el tiempo promedio de viaje redondo [segundos], $c \in \mathbb{R}^+$ denota la capacidad de transmisión [paquetes/segundo], $n \in \mathbb{R}^+$ es el número de sesiones TCP y $p(\cdot)$ es la función de probabilidad del marcado de paquetes, la cual representa la estrategia de control AQM. Para un equilibrio deseado q_0 , el punto de equilibrio (w_0, q_0, p_0) de (4.24) está definido por:

$$w_0^2 p_0 = 2 \text{ y } w_0 = \frac{\tau c}{n}.$$

El sistema (4.24) es un modelo aceptable para investigar el comportamiento alrededor del punto de equilibrio para algunas clases de redes TCP/AQM bajo la suposición de que $w_0 \gg 1$, el cual ha sido utilizado y validado por muchos investigadores (ver [4], [9] y [16]). Motivados por la interpretación de control retroalimentado, controladores P (proporcional) y PI (proporcional-integral) fueron propuestos como estrategias AQM en [10] y controladores \mathcal{H}^∞ en [23] para la versión linealizada del modelo. Se mostró que tales controladores mejoran el desempeño obtenido con controladores estándar como RED (Random Early Detection; por sus siglas en inglés). Los controladores propuestos resultan en sistemas en lazo cerrado con retardo para los cuales condiciones de estabilidad han sido encontradas, ver [10] y [16].

En esta sección aplicamos la técnica de Asignación de Espectro Finito para el sistema linealizado de (4.24) explotando los resultados de este trabajo para garantizar una implementación

segura del controlador.

La linealización de (4.24) alrededor del punto de equilibrio (w_0, q_0, p_0) es

$$\dot{\xi}(t) = A\xi(t) + b\tilde{p}(t - \tau), \quad (4.25)$$

donde $\xi(t) = \begin{pmatrix} \tilde{w}(t) \\ \tilde{q}(t) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -\frac{2n}{\tau^2 c} & 0 \\ \frac{n}{\tau} & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -\frac{\tau c^2}{2n^2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{w}(t) = w(t) - w_0$, $\tilde{q}(t) = q(t) - q_0$ y $\tilde{p}(t) = p(t) - p_0$.

La ley de control correspondiente que asigna un espectro finito en lazo cerrado a (4.24) tiene la siguiente forma:

$$\tilde{p}(t) = F\xi(t) + F \int_{-\tau}^0 e^{-A(\tau+\theta)} b\tilde{p}(t + \theta) d\theta,$$

donde $F = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \end{pmatrix}$ es un vector de ganancias a ser asignado. Cálculos sencillos llevan a la siguiente expresión para la ley de control:

$$\begin{aligned} \tilde{p}(t) = & f_1 \tilde{w}(t) + f_2 \tilde{q}(t) - \frac{\tau c^2}{2n^2} f_1 \int_{-\tau}^0 e^{\frac{2n}{\tau^2 c}(\tau+\theta)} \tilde{p}(t + \theta) d\theta \\ & - \frac{\tau^2 c^3}{4n^2} f_2 \int_{-\tau}^0 \left(1 - e^{\frac{2n}{\tau^2 c}(\tau+\theta)}\right) \tilde{p}(t + \theta) d\theta. \end{aligned} \quad (4.26)$$

El espectro en lazo cerrado ideal es determinado por los ceros del polinomio

$$m(\lambda) = \lambda^2 + \left[\frac{2n}{\tau^2 c} + \frac{\tau c^2}{2n^2} f_1 e^{\frac{2n}{\tau c}} + \frac{\tau^2 c^3}{4n^2} f_2 \left(1 - e^{\frac{2n}{\tau c}}\right) \right] \lambda + \frac{c^2}{2n} f_2.$$

El polinomio $m(\lambda)$ es estable (todos sus ceros tienen parte real estrictamente negativa) si y sólo si

$$f_2 > 0 \text{ y } \frac{2n}{\tau^2 c} + \frac{\tau c^2}{2n^2} f_1 e^{\frac{2n}{\tau c}} + \frac{\tau^2 c^3}{4n^2} f_2 \left(1 - e^{\frac{2n}{\tau c}}\right) > 0. \quad (4.27)$$

La dinámica interna del controlador (4.26) es descrita por la ecuación integral con retardo

$$z(t) = -\frac{\tau c^2}{2n^2} f_1 \int_{-\tau}^0 e^{\frac{2n}{\tau^2 c}(\tau+\theta)} z(t + \theta) d\theta - \frac{\tau^2 c^3}{4n^2} f_2 \int_{-\tau}^0 \left(1 - e^{\frac{2n}{\tau^2 c}(\tau+\theta)}\right) z(t + \theta) d\theta. \quad (4.28)$$

Aplicando la condición del Teorema 15 tenemos que (4.28) es exponencialmente estable si

$$\max_{\theta \in [-\tau, 0]} \frac{\tau^2 c^2}{2n^2} \left| e^{\frac{2n}{\tau^2 c}(\tau + \theta)} f_1 + \frac{\tau c}{2} \left(1 - e^{\frac{2n}{\tau^2 c}(\tau + \theta)} \right) f_2 \right| < 1. \quad (4.29)$$

En la Figura 4.9 graficamos las regiones de estabilidad determinadas por (4.27) y (4.29) en el plano (f_1, f_2) . Denotamos con R_s a la intersección de las dos regiones. Los puntos de intersección de las líneas determinadas por las cotas de las regiones de estabilidad con los ejes coordenados están definidos por $a = -\frac{8n^3}{\tau^4 c^4} \left(\frac{1}{1 - e^{-\frac{2n}{\tau c}}} \right)$, $b = -\frac{4n^3}{\tau^3 c^3} e^{-\frac{2n}{\tau c}}$, $d = \frac{2n^2}{\tau^2 c^2} e^{-\frac{2n}{\tau c}}$, $e = \frac{2n^2}{\tau^2 c^2}$ y $g = -\frac{4n^2}{\tau^3 c^3} \left(\frac{1}{1 - e^{-\frac{2n}{\tau c}}} \right)$.

Donde se cumplen que

$$\frac{a}{b} = \frac{g}{-d} = \frac{2}{\tau c e^{-\frac{2n}{\tau c}} \left(1 - e^{-\frac{2n}{\tau c}} \right)},$$

y tomando en cuenta que $w_0 \gg 1$,

$$a < g \text{ y } b > -d.$$

Observación 16 Para cualesquiera parametros (n, τ, c) existe un par (f_1, f_2) dentro de la región de estabilidad R_s para el que se cumple que tanto la ecuación integral con retardo (4.28) como el sistema en lazo cerrado (4.25)-(4.26) son estables. Por lo tanto, una implementación segura de la ley de control (4.26) usando métodos de aproximación numéricos de tipo cuadratura puede ser lograda.

En la Figura 4.10 se muestra la región de estabilidad R_s para los parámetros de Red $n = 40$ sesiones TCP, $\tau = 0.7$ segundos y $c = 300$ paquetes/segundos.

Una simulación numérica con la aproximación de la ley de control (4.26) (usando el método trapezoidal), seleccionando las ganancias del controlador $(f_1, f_2) = (0.07, 0.0006)$ dentro de la región R_s , es representada en las Figura 4.11, 4.12 y 4.13. Para estos valores en particular se tiene que los valores propios de lazo cerrado ideal son $\lambda_1 = -1.55$ y $\lambda_2 = -0.43$. Cabe mencionar que para las simulaciones se utilizó, el modelo linealizado con diferentes condiciones iniciales y a su vez diferentes referencias.

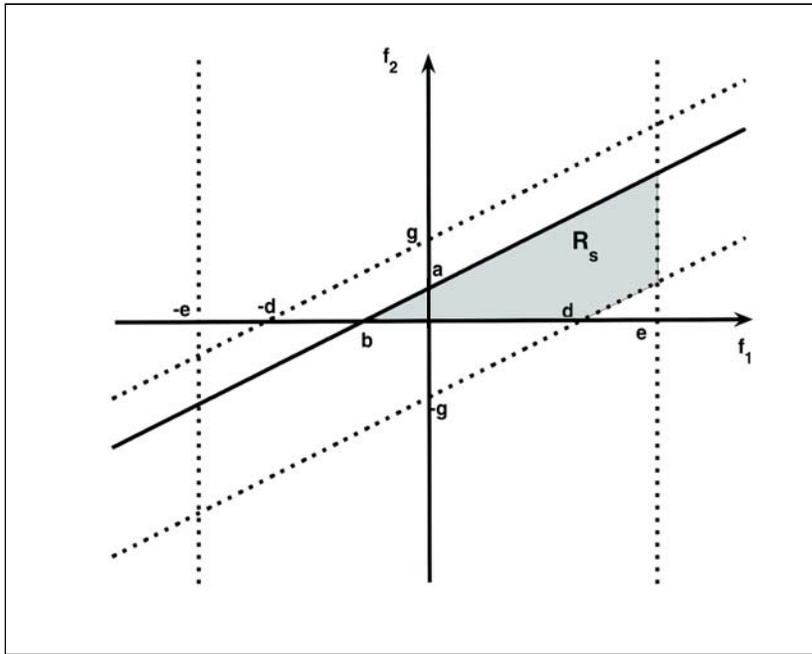


Fig. 4.9 Esquema representativo de la región de estabilidad.

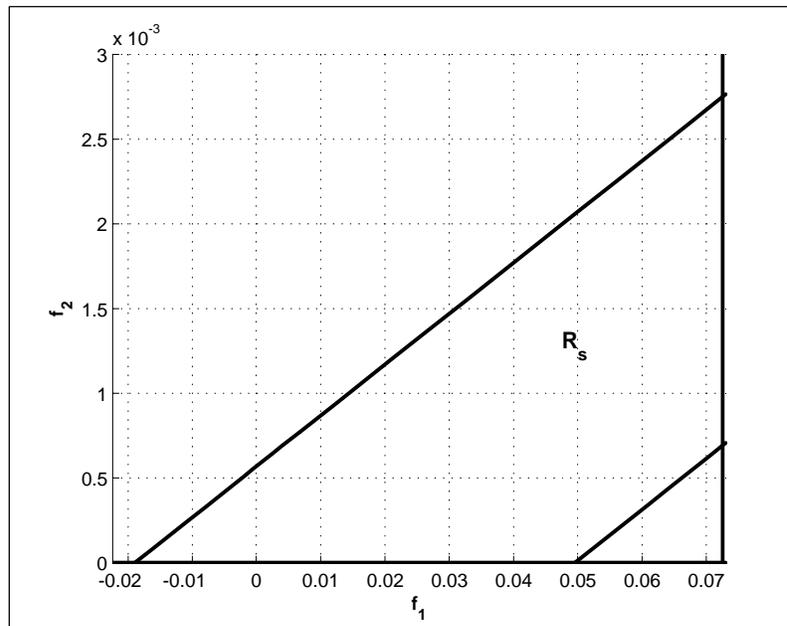


Fig. 4.10 Región de estabilidad del sistema en lazo cerrado (4.24)-(4.26) y región de estabilidad de ley de control (4.28), seleccionando $n = 40$, $\tau = 0.7$ y $c = 300$.

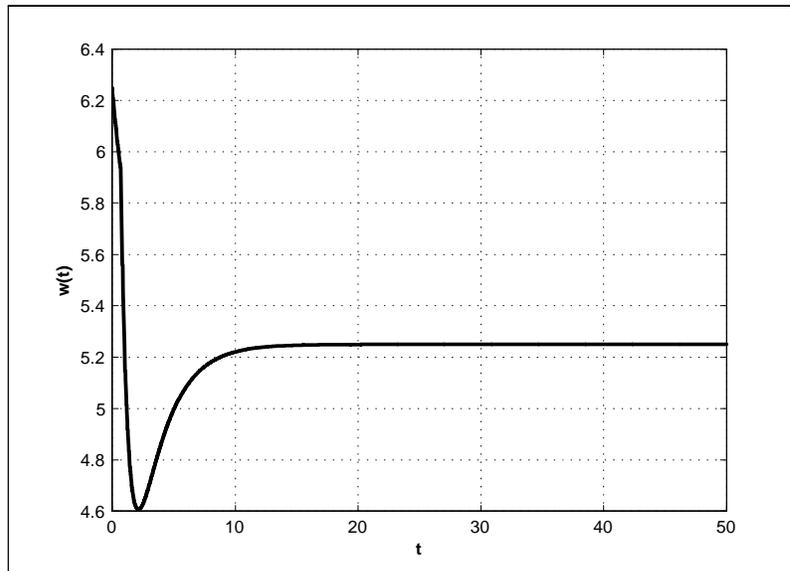


Fig. 4.11 Respuesta del estado $w(t)$

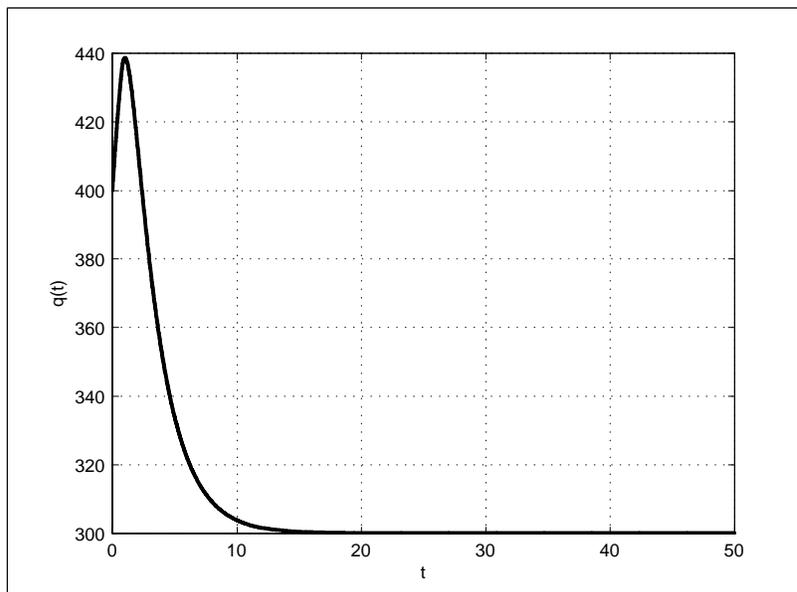


Fig. 4.12 Respuesta del estado $q(t)$

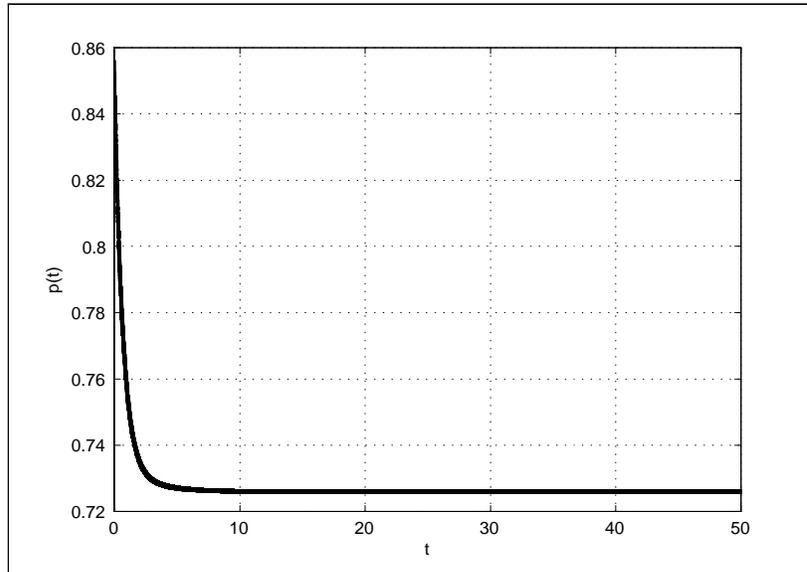


Fig. 4.13 Entrada del sistema $p(t)$.

Esta aplicación muestra que existen sistemas para los cuales se puede lograr la estabilización en lazo cerrado en el espíritu original de la técnica de FSA propuesta por Manitius y Olbrot en [14], sin la necesidad de introducir algún filtro pasa-bajas en el lazo de control como ocurre en algunos resultados recientes [21] y [27].

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo a futuro

En esta tesis nos enfocamos en el problema de estabilidad de la dinámica interna de la ley de control que asigna un espectro finito a sistemas con múltiples retardos en la entrada de control.

Conclusiones.

1.- La dinámica interna es descrita por una clase especial de ecuaciones integrales para la cual proporcionamos condiciones suficientes de estabilidad dependientes del retardo. Primeramente, consideremos el caso de sistemas lineales escalares de múltiples retardos en la entrada de control y posteriormente extendemos los resultados al caso matricial.

2.- Los resultados determinan una clase de sistemas con retardo en el control para los cuales se tiene una implementación segura de la ley de control que asigna un espectro finito en lazo cerrado mediante métodos numéricos de aproximación por cuadratura.

3.- Además, dichos resultados presentan una alternativa para garantizar una implementación segura de la ley de control a aquellas encontradas en la literatura que involucran un filtro pasabajas en el lazo de control.

4.- El potencial de los resultados obtenidos se ejemplifica con el problema de Congestión en Redes en Internet, donde, como se muestra, siempre se puede garantizar una implementación segura de la ley de control que asigna un espectro finito en lazo cerrado para cualesquiera parámetros del sistema.

Trabajo a futuro

1.- Analizar la robustez de la ecuación integral con retardo que describe la dinámica interna del controlador ante variación de parámetros del sistema y ganancia del controlador.

2.- Extender los resultados a sistemas con retardos en los estados. Esto es dado que dentro del mismo artículo de Manitius y Olbrot [14] proponen una ley de control que asigna espectro finito a sistemas con múltiples retardos en los estados, dicha ley de control contiene términos integrales que para una implementación práctica necesitan ser aproximados por métodos numéricos.

Bibliografía

- [1] R. Bellman, "*Differential Difference Equations*", Academic Press, 1963.
- [2] R. L. Burden, J. Douglas Faires, "*Análisis Numérico*", 3° edición, 1985.
- [3] M. Cardelli, V. Van Assche, J. J. Loiseau, "*About numerical approximations of a stabilizing distributed delay control law*", Institut de Recherche en Communication et Cybernetique de Nantes.
- [4] V. Castillo, "*Análisis de estabilidad de controladores proporcional integral para el control de congestión en Internet*", Tesis de Maestría, IPICYT 2006
- [5] Chi-Tsong Chen, "*Linear System Theory and Design*", 3° edición, 1999.
- [6] K. Engelborghs, M. Dambrine, D. Roose, "*Limitations of a class of stabilization methods for delay systems*", IEEE Trans. Automat. Control Vol. 46, No. 2, pp. 336-339, 2001
- [7] K. Gu, L. Kharitonov, J. Chen, "*Stability of Time-Delay Systems*", Birkhauser, Boston, 2003.
- [8] J. K. Hale, S. M. Verduyn Lunel, "*Introduction to Functional Differential Equations*", Springer Verlag, 1993.
- [9] C. V. Hollot, Y. Chait, "*Nonlinear Stability Analysis for a class of TCP/AQM Networks*", Proceeding of the 40th IEEE Conference on Decision and Control, Orlando, USA, 2001.
- [10] C. V. Hollot, V. Misra V., D. Towsley, W. B. Wong, "*Analysis and Design of Controllers for AQM Routers Supporting TCP Flows*", IEEE Trans Automatic Control, Vol. 47, Issue 6, Junio 2002, 945-956.

- [11] V. L. Kharitonov, D. Melchor-Aguilar, "*On delay-dependent stability conditions*", Systems & Control Letters Vol. 40, pp.71-76, 2000.
- [12] V. L. Kharitonov, D. Melchor-Aguilar, "*On delay-dependent stability conditions for time varying systems*", Systems & Control Letters Vol. 46, pp.173-180, 2002.
- [13] V. Kolmanovski, A. Myshkis, "*Introduction to the theory and applications of functional differential equations*", Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [14] A. Z. Manitius, W. Olbrot, "*Finite Spectrum Assignment Problem for Systems with Delays*", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-24, No. 4, pp. 541-553, Agosto 1979.
- [15] A. Z. Manitius, "*Feedback controllers for a wind tunnel involving a delay: an analytical design and numerical simulation*", IEEE Trans. Automat. Control, Vol. 29, No. 12, 1984.
- [16] W. Michiels, D. Melchor, S. I. Niculescu, "*Analysis of some classes of TCP/AQM networks*", International Journal of Control, Vol. 79, No. 9, pp 1136-1114, Septiembre 2006.
- [17] W. Michiels, S. Mondié, D. Roose, M. Dambrine, "*The effect of approximating distributed delay control laws on stability*", Springer-Verlag, Lecture Notes in Computational Sciences and Engineering, Vol. 38, pp 207-220, 2004
- [18] L. Mirkin, "*Are distributed-delay control laws intrinsically unapproximable?*", presented at the 4th IFAC Workshop on Time Delay Systems, (TDS'03), Rocquencourt, Francia, Septiembre, 2003.
- [19] S. Mondié, M. Dambrine, O. Santos, "*Approximation of control laws with distributed delays: A necessary condition for stability*", Kybernetika, vol. 38, No. 5, pp. 541-551, 2002
- [20] S. Mondié, S. I. Niculescu, J. J. Loiseau, "*Delay Robustness of closed loop finite assignment for input delay systems*". in 3rd IFAC, Conf. Time Delay Systems, Santa Fe. NM, Diciembre 2001
- [21] S. Mondié, W. Michiels, "*Finite Spectrum Assignment of Unstable Time Delay Systems With a Safe Implementation*", IEEE Trans. on Automat Control, Vol. 48, No. 12, pp.2207-2212, Diciembre 2003

- [22] A. Olbrot, "*Stabilizability, detectability and spectrum assignment for linear autonomous systems with general time delays*", IEEE Trans. on Automat Control, Vol. 23, No. 5, pp.887-890, 1978.
- [23] P. F. Quet, H. Ozbay, "*On the design of AQM supporting TCP flows using robust control theory*", IEEE Trans. Automatic Control, 49, Junio 2004, pp. 1031-1036.
- [24] J. P. Richard, Time-delay-Systems: "*An overview of some recent advances and open problems*", Automatica, Vol. 39, No. 10, pp. 1667-1694, 2003.
- [25] O. Santos, S. Mondie, "*Control laws involving distributed time delays: robustness of the implementation*" in Proc. Amer. Control Conf., Chicago Illinois, pp. 2479-2480, Junio 2000.
- [26] V. Van Assche, M. Dambrine, F. Lafay, P. Richard, "*Some problems arising in the implementation of distributed-delay control laws*", in Proc. 38th IEEE Conf. Decision and Control, Phoenix, Arizona, pp. 4668-4672, 1999.
- [27] Q. C. Zhong, "*On Distributed Delay in Linear Control Laws- Part I: Discrete-Delay Implementations*", IEEE Trans. on Automat. Control, Vol. 49, No. 11, Noviembre 2004.