



**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

POSGRADO EN CIENCIAS APLICADAS

**Estabilización en tiempo finito vs asintótica:
un estudio comparativo**

Tesis que presenta

Virgilio Vicencio Salas Solís

Para obtener el grado de

Maestro en Ciencias Aplicadas

En la opción de

Control y Sistemas Dinámicos

Director de la Tesis:

Dr. Arturo Zavala Río

San Luis Potosí, S.L.P., Diciembre de 2015



Constancia de aprobación de la tesis

La tesis “**Estabilización en tiempo finito vs asintótica: un estudio comparativo**” presentada para obtener el Grado de Maestro en Control y Sistemas Dinámicos fue elaborada por **Virgilio Vicencio Salas Solís** y aprobada el **catorce de diciembre del dos mil quince** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Dr. Arturo Zavala Río
Director de la tesis

Dr. David Antonio Lizárraga Navarro
Jurado en el Examen

Dr. Diego Langarica Córdoba
Jurado en el Examen



Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. Arturo Zavala Río.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología con número de registro 298569.



Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Acta de Examen de Grado

El Secretario Académico del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 017 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Maestría en Control y Sistemas Dinámicos está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 14 días del mes de diciembre del año 2015, se reunió a las 11:00 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

Dr. David Antonio Lizárraga Navarro	Presidente	IPICYT
Dr. Arturo Zavala Río	Secretario	IPICYT
Dr. Diego Langarica Córdoba	Sinodal	IPICYT

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

MAESTRO EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

sustentó el C.

Virgilio Vicencio Salas Solís

sobre la Tesis intitulada:

Estabilización en tiempo finito vs asintótica: un estudio comparativo

que se desarrolló bajo la dirección de

Dr. Arturo Zavala Río

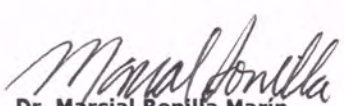
El Jurado, después de deliberar, determinó

APROBARLO

Dándose por terminado el acto a las 12:25 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fe el Secretario Académico del Instituto.

A petición del interesado y para los fines que al mismo convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 14 días del mes de diciembre de 2015.


Mtra. Ivonne Lizette Cuevas Vélez
Jefa del Departamento del Posgrado


Dr. Marcial Bonilla Marín
Secretario Académico



Agradecimientos

A mi asesor, el Dr. Arturo Zavala Río, por su invaluable liderazgo, apoyo, confianza, motivación y paciencia, además de la amistad brindada. Sin su dirección no hubiera podido finalizar este proyecto.

Al técnico M. en C. Francisco Javier Cárdenas Flores, por las facilidades brindadas para la fase experimental.

Al CONACyT, por el apoyo económico brindado para la realización de mis estudios durante la realización de esta tesis.

Dedicatoria

A Keren, que siempre me ha dado su apoyo incondicional y comprensión, y a mi hija Eneida, faro de mi vida cuya luz sobrepasa cualquier tiniebla.

A mis padres y hermanos, gracias a ellos nunca me he sentido solo.

A mis compañeros y amigos, con los que pasé gratos momentos en el Instituto.

Resumen

En el presente trabajo se comparan dos tipos de estabilización en el control de posicionamiento de un péndulo actuado: en tiempo finito y asintótica. Esto con el fin de corroborar las ventajas de la primera sobre la segunda que se mencionan en la literatura, como son: respuestas más rápidas y robustez. Una ley de control de tipo $SP-SD-gc$ se utiliza para el péndulo. Mediante la manipulación de un parámetro de ésta se obtienen los dos tipos de convergencia. Para la estabilización en tiempo finito se utilizan resultados obtenidos a partir de homogeneidad local del campo vectorial. Las comparaciones se realizan mediante simulaciones computacionales y pruebas en un banco experimental (*Mechatronics Kit*), sobre las cuales se corroboraron las diferencias entre ambos tipos de estabilización. Se determinaron las condiciones sobre las que se tiene un mejor desempeño en tiempo finito.

Abstract

In this work, two types of convergence in position control of an actuated pendulum are compared: finite time and asymptotic stability. This in order to corroborate the advantages of the former over the latter that are mentioned in literature, such as: faster convergence and robustness. An $SP-SD-gc$ control law is implemented on the model of a pendulum. By manipulating a parameter in the control law both types of convergence are obtained. Global finite time stability is characterized through local homogeneity of the vector field. Comparisons are made using computer simulations and experimental tests on an electromechanical kit (*Mechatronics Kit*), on which the differences between both types of stability are corroborated. Conditions on which finite time stability has a better performance are determined.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Notación	1
1.2. Preliminares matemáticos	1
1.3. Robots manipuladores	8
1.4. Dinámica del péndulo actuado	9
1.5. Antecedentes	11
1.6. Motivación	12
2. Ley de control	13
2.1. Controlador Proporcional-Derivativo con compensación de gravedad	13
2.2. Controlador SP-SD-gc	15
3. Simulaciones	21
3.1. Funciones de saturación y tiempo de estabilización	22
3.2. Rapidez de convergencia	23
3.2.1. Variación del parámetro β_1	29
3.3. Perturbaciones	30
4. Resultados experimentales	34
5. Conclusiones y perspectivas	39
6. Bibliografía	43

Capítulo 1

Introducción

1.1. Notación

Denotaremos el conjunto de los números reales como \mathbb{R} y el conjunto de vectores n -dimensionales cuyos elementos son números reales como \mathbb{R}^n ($n > 1$). $\|\cdot\|$ convencionalmente denotará la norma Euclídiana estándar (norma 2), *i.e.* $\|x\| = [x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2]^{1/2}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, con x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, representando el i -ésimo elemento de x .

1.2. Preliminares matemáticos

Comencemos por exponer las herramientas matemáticas que sirven de base para el análisis a desarrollar en este trabajo. Considere un sistema autónomo de orden n

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.1}$$

donde $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\{0\} \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$, es un campo vectorial continuo tal que $f(0) = 0$; $x(t; x_0)$ denotará la solución del sistema con condición inicial x_0 ,

i.e. $x(0; x_0) = x_0$. Adicionalmente consideraremos, a lo largo de esta tesis, que $f(x)$ es localmente Lipchitz-continuo en $\mathcal{D} \setminus \{0\}$. Las siguientes definiciones establecen los conceptos de base en los que reposa la teoría de estabilidad de Lyapunov.

Definición 1.2.1. *El punto de equilibrio $x = 0$ del sistema (1.1) es:*

- *Estable si, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que*

$$\|x_0\| < \delta \implies \|x(t; x_0)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0$$

- *inestable si no es estable;*
- *asintóticamente estable si es estable y δ se puede escoger de tal manera que:*

$$\|x_0\| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t; x_0) = 0 \quad (1.2)$$

- *global asintóticamente estable si es estable y adicionalmente $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t; x_0) = 0$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$.*

El siguiente resultado matemático establece condiciones suficientes para determinar las propiedades de estabilidad del origen de un sistema lineal $\dot{x} = Ax$. Los valores propios de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ serán denotados como $\lambda_i, i = 1, \dots, n$, y su parte real como $\text{Re}(\lambda_i)$.

Teorema 1.2.1. *El punto de equilibrio $x = 0$ de $\dot{x} = Ax$ es estable si y sólo si todos los valores propios de A satisfacen $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0$ y para todo valor propio con $\text{Re}(\lambda_i) = 0$ y multiplicidad algebraica $q_i \geq 2$, $\text{rank}(A - \lambda_i I) = n - q_i$, donde n es la dimensión de x . El punto de equilibrio $x = 0$ es (globalmente) asintóticamente estable si y sólo si todos los valores propios de A satisfacen $\text{Re}(\lambda_i) < 0, i = 1, 2, \dots, n$.*

Toda $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ cuyos valores propios satisfacen $Re(\lambda_i) < 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, es denominada *matriz Hurwitz*.

Método directo de Lyapunov

El método directo de Lyapunov es una herramienta para el análisis de sistemas no lineales. Es una generalización del concepto de energía asociado a un sistema mecánico, cuyo movimiento es estable si su energía decrece a lo largo de sus trayectorias.

La parte medular de esta teoría de estabilidad se centra en proponer funciones escalares —llamadas *funciones candidatas de Lyapunov*— y examinar la variación de tales funciones a lo largo de las trayectorias del sistema. Mediante este método no se necesita conocer explícitamente las soluciones de un sistema dinámico expresado en la forma (1.1). Una función escalar continua $V : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, donde $0 \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$, es denominada *definida positiva* si $V(x) > 0, \forall x \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$ y $V(0) = 0$. Si esta condición se cumple con $-V(x)$, entonces la función es llamada *definida negativa*. Si solamente se cumple que $V(x) \geq 0$, respectivamente $V(x) \leq 0, \forall x \in \mathcal{D}$, entonces es denominada *semi-definida positiva*, respectivamente *semidefinida negativa*.

Otra propiedad que se requiere de las funciones escalares mencionadas arriba está asociada con la dinámica: la derivada de $V(x)$ a lo largo de las trayectorias de (1.1), denotada como $\dot{V}(x)$, debe ser al menos semidefinida negativa, *i.e.*

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \leq 0$$

Cuando $V(x)$ cumple también con la segunda propiedad, entonces es llamada *función de Lyapunov*. Con estos conceptos podemos determinar las propiedades de estabilidad de puntos de equilibrio de sistemas no lineales mediante los

teoremas del método directo de Lyapunov, enunciados a continuación.

Teorema 1.2.2. *Sea $x = 0$ un punto de equilibrio de (1.1) y $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ un dominio que contenga al origen. Si existe una función escalar continuamente diferenciable $V : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:*

$$\begin{aligned} V(x) > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D} \setminus \{0\}, \quad V(0) = 0 \\ \dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathcal{D} \end{aligned} \tag{1.3}$$

entonces $x = 0$ es un punto de equilibrio estable del sistema (1.1). Si $\dot{V}(x)$ es definida negativa entonces el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

Teorema 1.2.3. *Suponga que existe una función escalar continuamente diferenciable $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:*

- $V(x)$ es definida positiva
- $\dot{V}(x)$ es definida negativa
- $V(x)$ es radialmente desacetada, i.e. $V(x) \rightarrow \infty$ cuando $\|x\| \rightarrow \infty$

entonces el punto de equilibrio es global asintóticamente estable.

Si $\dot{V}(x)$ cumple la condición (1.3) sin ser definida negativa, la estabilidad asintótica puede determinarse a través de la Teoría de Invarianza, basada en la siguiente definición:

Definición 1.2.2. *Un conjunto M es denominado conjunto invariante con respecto a (1.1) si*

$$x_0 \in M \implies x(t; x_0) \in M \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Es denominado positivamente invariante con respecto a (1.1) si

$$x_0 \in M \implies x(t; x_0) \in M \quad \forall t \geq 0$$

El siguiente resultado fue tomado de [7, Corolario 7.2.1]:

Corolario 1.2.1. *Sea $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$, suponga que existe una función escalar definida positiva $V : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\dot{V}(x) \leq 0$ para toda $x \in \mathcal{D}$. Suponga que el origen $x = 0$ es el único subconjunto invariante contenido en*

$$Z = \{x \in \mathcal{D} : \dot{V}(x) = 0\}$$

Entonces el origen $x = 0$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable de (1.1). Si el enunciado se cumple con $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$ y V es radialmente desacotada, entonces la estabilidad asintótica del origen es global.

Ahora establecemos las siguientes definiciones y herramientas analíticas, tomadas de [11], las cuales son fundamentales para el trabajo desarrollado en esta tesis.

Definición 1.2.3. *El origen es un punto de equilibrio estable en tiempo finito de (1.1) si es estable (en el sentido de Lyapunov) y existe una vecindad abierta $N \subset \mathcal{D}$ del origen, positivamente invariante con respecto a (1.1), y una función definida positiva $\mathcal{T} : N \rightarrow \mathbb{R}^+$ —llamada tiempo de asentamiento— tal que $x(t; x_0) \neq 0, \forall t \in [0, \mathcal{T}(x_0)), \forall x_0 \in N \setminus \{0\}$, y $x(t; x_0) = 0, \forall t \geq \mathcal{T}(x_0), \forall x_0 \in N$. El origen es globalmente estable en tiempo finito si lo anterior se cumple con $N = \mathcal{D} = \mathbb{R}^n$.*

Definición 1.2.4. *Una función continua $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada (función de) saturación generalizada con cota $M > 0$ si es no-decreciente, Lipchitz-continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ y satisface:*

1. $\zeta\sigma(\zeta) > 0 \quad \forall \zeta \neq 0, \quad \sigma(0) = 0;$
2. $|\sigma(\zeta)| \leq M \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}.$

Toda función que cumple con la definición 1.2.4 tiene las siguientes propiedades, demostradas en [11].

Lema 1.2.1. *Sea $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de saturación generalizada con cota M , y sea k una constante positiva. Entonces*

1. $\int_0^\zeta \sigma(kr)dr > 0 \quad \forall \zeta \neq 0$;
2. $\int_0^\zeta \sigma(kr)dr \rightarrow \infty$ cuando $|\zeta| \rightarrow \infty$.

En [11] se establece una noción local de homogeneidad para funciones y campos vectoriales. El concepto local se enuncia en términos de familias de dilataciones —también llamada familia de dilaciones— δ_ε^r , definidas como $\delta_\varepsilon^r(x) = (\varepsilon^{r_1}x_1, \dots, \varepsilon^{r_n}x_n)^T$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall \varepsilon > 0$, con $r = (r_1, \dots, r_n)$, donde los coeficientes de dilatación r_1, \dots, r_n son reales positivos. Dado un vector de coeficientes de dilatación r , una vecindad del origen $D \subset \mathbb{R}^n$ es denominada δ_ε^r -conexa si, para cada $x \in D$, $\delta_\varepsilon^r(x) \in D$, para todo $\varepsilon \in (0, 1)$.

Definición 1.2.5. *Dado un vector de coeficientes de dilatación r , una función $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, resp. campo vectorial $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, es localmente homogénea de grado α con respecto a la familia de dilataciones δ_ε^r —o equivalentemente, es denominada localmente r -homogénea de grado α — si existe una vecindad abierta δ_ε^r -conexa del origen en $D \subset \mathbb{R}^n$ —denominada dominio de homogeneidad— tal que:*

$$V(\delta_\varepsilon^r(x)) = \varepsilon^\alpha V(x)$$

resp.

$$f_i(\delta_\varepsilon^r(x)) = \varepsilon^{\alpha+r_i} \delta_\varepsilon^r(f_i(x)) \tag{1.4}$$

$i = 1, 2, \dots, n$, para cada $x \in D$ y todo $\varepsilon > 0$ tal que $\delta_\varepsilon^r(x) \in D$.

Teorema 1.2.4. *Considere que f en (1.1) es un campo vectorial localmente r -homogéneo de grado k , con dominio de homogeneidad $D \subset \mathbb{R}^n$. Entonces, el origen es un punto de equilibrio globalmente estable en tiempo finito del sistema (1.1) si y sólo si es global asintóticamente estable y $k < 0$.*

El concepto de estabilización como problema de control —omitiendo el caso de dependencia explícita del tiempo en la dinámica del sistema y en la retroalimentación— se define en la literatura, e.g. [5], [9], de la siguiente forma:

Definición 1.2.6. *El problema de **estabilización** por retroalimentación de estado para el sistema*

$$\dot{x} = f(x, u)$$

consiste en el diseño de una ley de control por retroalimentación

$$u = \gamma(x)$$

tal que el origen $x = 0$ sea un punto de equilibrio asintóticamente estable del sistema en lazo cerrado

$$\dot{x} = f(x, \gamma(x))$$

Observación 1.2.1. *Se hablará de **estabilización en tiempo finito** cuando el diseño de la ley de control por retroalimentación $u = \gamma(x)$ sea tal que el origen $x = 0$ sea un punto de equilibrio estable en tiempo finito del sistema en lazo cerrado $\dot{x} = f(x, \gamma(x))$. Si el problema de estabilización no requiere convergencia en tiempo finito, sino que la convergencia sea estrictamente en tiempo infinito, se hablará de **estabilización asintótica**.*

1.3. Robots manipuladores

Daremos un breve repaso sobre la teoría de robots manipuladores. Para mayor información sobre el tema se puede consultar [4].

Un robot manipulador es un brazo mecánico articulado formado por eslabones conectados a través de uniones o articulaciones que permiten un movimiento relativo entre dos eslabones consecutivos. El movimiento de cada articulación puede ser traslacional o rotacional. En el contexto de esta tesis se consideran sólo articulaciones rotacionales. Los grados de libertad de un robot manipulador se determinan por su número de articulaciones. Para los sistemas actuados, se tiene que a cada grado de libertad del sistema le corresponde un actuador, que puede ser electromecánico, neumático, etc., el cual genera un par —o fuerza— de acuerdo a la señal que reciba para mover el eslabón a una posición requerida. Para propósitos analíticos, las variables de posición de cada articulación, q_1, q_2, \dots, q_n , se agrupan en el vector de posiciones q :

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

De igual forma, las velocidades y aceleraciones articulares se denotan y agrupan respectivamente como sigue:

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \quad \ddot{q} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \vdots \\ \ddot{q}_n \end{bmatrix}$$

Se procede de la misma manera con el conjunto de fuerzas o pares generados

por los actuadores del robot, en el vector τ :

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_n \end{bmatrix}$$

La dinámica de los robots manipuladores se expresa vectorialmente a través del siguiente modelo (compacto):

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau$$

donde $H(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz simétrica definida positiva llamada matriz de inercia; $C(q, \dot{q})\dot{q}$, $g(q) \in \mathbb{R}^n$ son, respectivamente, los vectores de fuerzas generalizadas centrífugas y de Coriolis, y de gravedad. En vista de los objetivos de esta tesis, será suficiente considerar el caso particular de un manipulador de un grado de libertad, puntualmente el caso del péndulo actuado.

1.4. Dinámica del péndulo actuado

Para obtener el modelo dinámico del péndulo actuado procedemos a partir de la ecuación de movimiento, obtenida a través de la segunda ley de Newton, ya que, debido a que es solamente un grado de libertad, el análisis no se complica con este método. En la Figura 1.1 se muestra el diagrama de un péndulo actuado.

Despreciando la fricción, el modelo dinámico está dado por

$$J\ddot{q} = \tau - \tau_g$$

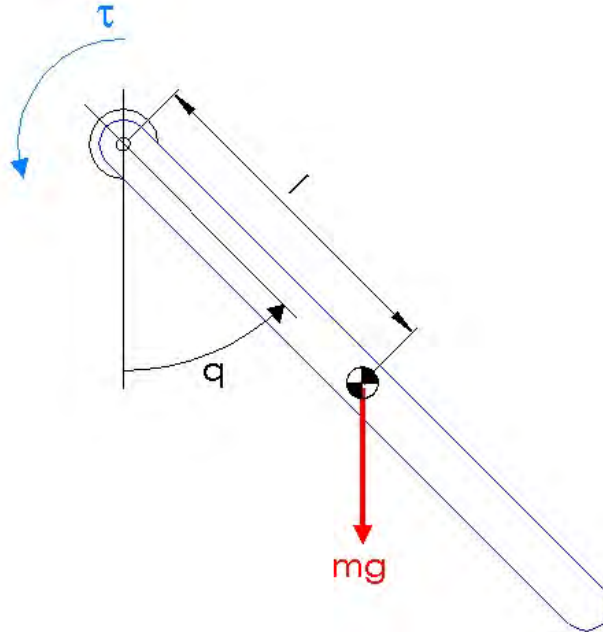


Figura 1.1: Diagrama del péndulo actuado.

donde $J = ml^2$ es el momento de inercia del péndulo con respecto al eje de giro; $\tau_g = mgl \sin q$ es el par generado por la componente del peso en la dirección perpendicular al péndulo; m, g, l representan respectivamente la masa, aceleración gravitacional y la distancia del pivote al centro de masa; q es la posición angular que se tiene entre el eje vertical y el péndulo, con sentido positivo antihorario tomando como posición de referencia $q = 0$ la postura vertical hacia abajo. Así, sustituyendo en el modelo anterior \ddot{q} obtenemos lo siguiente:

$$ml^2 \ddot{q} + mgl \sin q = \tau \quad (1.5)$$

Como se puede apreciar, el péndulo es un caso particular de robots manipuladores (sistemas mecánicos) de un grado de libertad.

1.5. Antecedentes

La naturaleza física de los actuadores supone restricciones en el diseño de leyes de control para el posicionamiento de robots manipuladores, debido a que los actuadores solamente trabajan en un rango de operación. Dentro de la literatura se encuentran trabajos que demuestran estabilización global asintótica con entradas acotadas para tal tipo de sistemas mecánicos. Santibáñez *et al.* [8] propusieron un esquema de saturación donde utilizan una función para cada una de los términos de la ley de control (el término gravitacional es un componente ya acotado) donde utilizan funciones de saturación convencionales. Zavala-Río y Santibáñez [12] presentaron dos esquema de saturación donde obtienen respuestas más rápidas que los anteriores; estos autores utilizan funciones de saturación generalizadas. López-Araujo *et al.* demostraron la estabilización asintótica global a través de un esquema de saturación generalizado, del cual las propuestas anteriores resultan ser casos particulares; en este trabajo también se propone un esquema generalizado de control adaptable. Sin embargo, todas estas propuestas resuelven diversas formulaciones del problema de estabilización asintótica, *i.e.* implicando convergencia —a los equilibrios deseados— en tiempo infinito.

Por otro lado la estabilización en tiempo finito de robots manipuladores ha sido tratada haciendo uso de la teoría de modos deslizantes [1], o mediante homogeneidad (en el sentido convencional) del campo vectorial en lazo cerrado [3]. Sin embargo en tales trabajos no se consideran entradas acotadas; bajo tal restricción de entrada, el campo vectorial del sistema representado en espacio de estado no cumple la condición de homogeneidad. Zavala-Río y Fantoni [11] relajan tal condición, estableciendo una noción local de homogeneidad, lo que permite lograr estabilización en tiempo finito con entradas acotadas.

1.6. Motivación

Estudios recientes, como en [11], presentan una alternativa para controladores en tiempo finito —FTC, por sus siglas en inglés: *Finite Time Controller*— evitando el uso de funciones discontinuas, con una estructura que permite una implementación con entradas acotadas. Diversos trabajos previos que abordan la estabilización en tiempo finito, *e.g* [2], [10], [13], [14], argumentan que los FTC presentan ventajas sobre los controladores asintóticos, como son: menor tiempo de estabilización, menor sensibilidad a incertidumbres, mejor respuesta ante perturbaciones y mayor precisión en el seguimiento y posicionamiento. Estas características representan evidentemente una mejor alternativa para casos donde la precisión, rapidez y robustez son esenciales en el desempeño de robots manipuladores. Sin embargo, los trabajos citados sólo mencionan tales características pero no las ponen en evidencia ni muestran a través de simulaciones o experimentos que permitan la comparación de controladores asintóticos con FTC. La motivación de este trabajo se genera a partir de que no existen comparaciones puntuales de estos tipos de control, además de emplear resultados recientes sobre estabilización en tiempo finito —FTS, por sus siglas en inglés: *Finite Time Stability*— [11], y observar las condiciones bajo las cuales presenta ventaja la estabilización en tiempo finito sobre la estabilización asintótica.

Además, como contribuciones directas de este trabajo, determinaremos las condiciones sobre las cuales el FTC presenta una mejor respuesta respecto a tiempo de estabilización y ante perturbaciones, en comparación con el controlador asintótico. Por otro lado, propondremos una manera de estructurar el FTC que asegure respuestas más rápidas que cuando se tiene estabilización asintótica.

Capítulo 2

Ley de control

2.1. Controlador Proporcional-Derivativo con compensación de gravedad

Antes de comenzar con la ley de control, retomemos la dinámica del péndulo definida en la ecuación (1.5), reproducida aquí para facilidad de lectura:

$$ml^2\ddot{q} + mgl \sin q = \tau \quad (2.1)$$

En el controlador PD-gc (por sus siglas en inglés: *Proportional Derivative with gravity compensation*) se compensan los términos gravitacionales del modelo a través de la retroalimentación. Es un controlador diseñado sin considerar restricciones de entrada. Para el caso del péndulo actuado se expresa de la siguiente forma:

$$\tau = -k_1\bar{q} - k_2\dot{q} + mgl \sin(\bar{q} + q_d) \quad (2.2)$$

donde $\bar{q} = q - q_d$, para cualquier posición deseada constante $q_d \in \mathbb{R}$, y k_i , $i = 1, 2$, son constantes positivas.

Así pues, la dinámica en lazo cerrado (2.1)–(2.2) toma la siguiente forma:

$$ml^2\ddot{q} = -k_1\bar{q} - k_2\dot{q} \quad (2.3)$$

donde vemos que la parte no lineal del sistema, correspondiente a los efectos gravitacionales, se ha eliminado. Definiendo como variables de estado $x_1 = \bar{q}$ y $x_2 = \dot{q}$, las ecuaciones de estado del sistema están dadas por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{ml^2}(k_1x_1 + k_2x_2) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Expresando este modelo en forma vectorial se tiene

$$\dot{x} = Ax$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{ml^2} & -\frac{k_2}{ml^2} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Calculando los valores propios de A , se obtiene

$$\lambda_{1,2} = -\frac{k_2}{2ml^2} \pm \sqrt{\left(\frac{k_2}{2ml^2}\right)^2 - \frac{k_1}{ml^2}}$$

donde $k_1 > 0$ y $k_2 > 0$ son condiciones necesarias y suficientes para que la matriz A sea Hurwitz. Así pues, aplicando el Teorema 1.2.1, se concluye que el origen $x = 0$ es un punto de equilibrio global asintóticamente estable del sistema en lazo cerrado (2.4).

2.2. Controlador SP-SD-gc

En los controladores SP-SD-gc (*Saturated Proportional Saturated Derivative with gravity compensation*) tiene como objetivo la estabilización de robots manipuladores con entradas acotadas evitando saturarlas. A través de su estructura se asegura que las señales de control permanezcan en un rango específico para evitar que lleguen a los niveles de saturación de las entradas.

Para que el péndulo pueda ser estabilizado en cualquier configuración deseada de equilibrio $q_d \in \mathbb{R}$, se requiere que el par máximo T_{max} del actuador que genera el par de entrada cumpla la siguiente condición:

$$T_{max} > mgl$$

Consideremos que el valor absoluto de la entrada τ adopta los valores de la salida del controlador u hasta el valor máximo T_{max} en el que se satura, *i.e.*

$$\tau = T_{max} \text{sat} \left(\frac{u}{T_{max}} \right) \quad (2.5)$$

donde $\text{sat}(\cdot)$ es la función de saturación convencional (unitaria), *i.e.* $\text{sat}(\zeta) = \text{sgn}(\zeta) \min\{|\zeta|, 1\}$. El algoritmo de control se define a través de la siguiente expresión:

$$u(\bar{q}, \dot{q}) = -\sigma_1(k_1\bar{q}) - \sigma_2(k_2\dot{q}) + mgl \sin(\bar{q} + q_d) \quad (2.6)$$

donde $\bar{q} = q - q_d$, para cualquier posición deseada constante q_d , $k_1 > 0$, $k_2 > 0$; $\sigma_i(x)$, $i = 1, 2$, son funciones de saturación generalizadas con cotas $M_i > 0$, tales que

$$M_1 + M_2 < T_{max} - mgl \quad (2.7)$$

y

$$\sigma_i(\zeta) = \text{sign}(\zeta)|\zeta|^{\beta_i} \quad (2.8)$$

$\forall \zeta \in D_i = \{\zeta \in \mathbb{R} : |\zeta| \leq L_i\}$, donde $0 < L_i \leq M_i^{1/\beta_i}$ y

$$0 < \beta_1 \leq 1 \quad , \quad \beta_2 = \frac{2\beta_1}{1 + \beta_1} \quad (2.9)$$

Notemos que la ley de control expresada en (2.6) tiene una estructura análoga a la de un controlador tipo PD-cg. En este caso se busca restringir la entrada u acotando cada una de las acciones P y D de manera individual (el término gravitacional es un componente ya acotado).

Tomando las variables de estado definidas anteriormente —*i.e.* $x_1 = \bar{q}$ y $x_2 = \dot{q}$ — y el vector de estado $x = (x_1, x_2)^T$, mostremos las propiedades de estabilidad del origen $x = 0$ del sistema en lazo cerrado (2.1), (2.5), (2.6).

Proposición 2.2.1. *Considere el sistema (2.1), (2.5) en lazo cerrado con la ley de control (2.6), con β_1 y β_2 cumpliendo (2.9) y cotas M_1 y M_2 positivas que satisfagan la desigualdad (2.7). Entonces, a lo largo de las trayectorias, se tiene que $|\tau(t)| = |u(t)| < T_{max}$, $\forall t \geq 0$, y se garantiza que el origen $x = 0$ es un punto de equilibrio global asintóticamente estable.*

Demostración

De (2.6) se tiene que

$$\begin{aligned} |u(x_1, x_2)| &= |-\sigma_1(k_1 x_1) - \sigma_2(k_2 x_2) + mgl \sin(x_1 + q_d)| \\ &\leq |\sigma_1(k_1 x_1)| + |\sigma_2(k_2 x_2)| + |mgl \sin(x_1 + q_d)| \\ &\leq M_1 + M_2 + mgl \end{aligned}$$

por lo que de (2.7) se observa que

$$|u(x_1, x_2)| < T_{max} \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

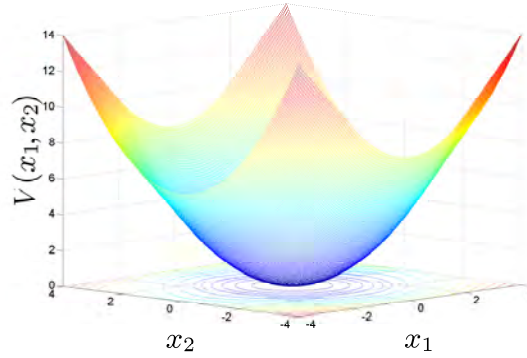


Figura 2.1: $V(x) = \frac{1}{2}ml^2x_2^2 + \int_0^{x_1} \sigma_1(k_1r)dr$.

De esto y (2.5) se tiene que a lo largo de las trayectorias del sistema en lazo cerrado:

$$|\tau(t)| = |u(t)| < T_{max} \quad \forall t \geq 0$$

Así, el sistema en lazo cerrado (2.1), (2.5), (2.6) se puede expresar de la siguiente forma en ecuaciones de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{ml^2} (\sigma_1(k_1x_1) + \sigma_2(k_2x_2)) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Definamos la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}ml^2x_2^2 + \int_0^{x_1} \sigma_1(k_1r)dr \quad (2.11)$$

la cual es la expresión de la energía mecánica total del sistema en lazo cerrado (energía potencial y cinética). El primer término del lado derecho de (2.11) es un término cuadrático. Del Lema 1.2.1 observamos que el segundo término es

positivo para $x_1 \neq 0$, y

$$|x_1| \rightarrow \infty \implies \int_0^{x_1} \sigma(k_1 r) dr \rightarrow \infty$$

para cualquier $k_1 > 0$. Por ende, se concluye que V es definida positiva y radialmente desacotada. En la Figura 2.1 se aprecia la forma que toma V .

La derivada de V a lo largo de las trayectorias del sistema, \dot{V} , está dada por la siguiente expresión:

$$\dot{V}(x_1, x_2) = ml^2 x_2 \dot{x}_2 + \dot{x}_1 \sigma_1(k_1 x_1)$$

Sustituyendo \dot{x}_1 y \dot{x}_2 de las ecuaciones del sistema en lazo cerrado (2.10) y reduciendo obtenemos

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -x_2 \sigma_2(k_2 x_2) \quad (2.12)$$

Así, por el punto 1 de la Definición 1.2.4 observamos de (2.12) que $\dot{V}(x_1, x_2)$ es semidefinida negativa, por lo que V es una función de Lyapunov. Definiendo

$$Z \triangleq \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \dot{V}(x_1, x_2) = 0\}$$

se tiene que

$$Z = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$$

De (2.10), notemos que $x(t) \in Z \quad \forall t \geq 0 \iff x_2(t) \equiv 0 \implies \dot{x}_2(t) \equiv 0 \implies \sigma_1(k_1 x_1(t)) \equiv 0 \iff x_1(t) \equiv 0$, por lo que se concluye que el origen es el único invariante en Z . Así, aplicando el Corolario 1.2.1, se concluye que el origen $x = 0$ es un punto de equilibrio global asintóticamente estable del sistema en lazo cerrado (2.10). \triangle

Ahora probemos que, con la misma ley de control, se tiene estabilización en tiempo finito cuando $0 < \beta_1 < 1$.

Proposición 2.2.2. *Considere el sistema (2.1), (2.5) en lazo cerrado con la ley de control (2.6) bajo la satisfacción de (2.7) y (2.9) tomando $0 < \beta_1 < 1$. Entonces, a lo largo de las trayectorias, se tiene que $|\tau(t)| = |u(t)| < T, \forall t \geq 0$, y se garantiza que el origen $x = 0$ es un punto de equilibrio globalmente estable en tiempo finito.*

Demostración

Primero necesitamos corroborar que $|\tau(t)| = |u(t)| < T_{max}, \forall t \geq 0$, lo cual quedó demostrado en la proposición anterior, ya que se utilizaron solamente las características generales de las funciones de saturación para ello. Así, sólo queda por demostrar la estabilidad en tiempo finito.

Ahora, definamos $r = (2, 1 + \beta_1)^T$ y obsérvese que, para todo $x \in D \triangleq D_1 \times D_2$, el sistema en lazo cerrado (2.10) queda expresado como $\dot{x} = f(x)$ con

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{1}{ml^2} [\text{sgn}(x_1)|k_1x_1|^{\beta_1} + \text{sgn}(x_2)|k_2x_2|^{\beta_2}] \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

donde las funciones de saturación han sido sustituidas de acuerdo a como se definieron a través de (2.8) en el dominio considerado D . Verifiquemos ahora que $f(x)$ es localmente r -homogéneo de grado α . Obsérvese, por un lado, que para cada $x \in D$ se tiene que $0 < \varepsilon^r x_i < x_i, \forall \varepsilon \in (0, 1)$ y por lo tanto $\delta_\varepsilon^r(x) \in D, \forall x \in D$. Por otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned} f(\delta_\varepsilon^r(x)) &= \begin{pmatrix} \varepsilon^{1+\beta_1}x_2 \\ -\frac{1}{ml^2} [\text{sgn}(\varepsilon^2x_1)|k_1(\varepsilon^2x_1)|^{\beta_1} + \text{sgn}(\varepsilon^{1+\beta_1}x_2)|k_2(\varepsilon^{1+\beta_1}x_2)|^{\beta_2}] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varepsilon^{1+\beta_1}x_2 \\ -\frac{1}{ml^2} [\varepsilon^{2\beta_1}\text{sgn}(x_1)|k_1x_1|^{\beta_1} + \varepsilon^{(1+\beta_1)\beta_2}\text{sgn}(x_2)|k_2x_2|^{\beta_2}] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Recordando que $\beta_2 = \frac{2\beta_1}{1 + \beta_1}$:

$$\begin{aligned}
f(\delta_\varepsilon^r(x)) &= \begin{pmatrix} \varepsilon^{1+\beta_1}x_2 \\ -\frac{1}{ml^2} \left[\varepsilon^{2\beta_1} \operatorname{sgn}(x_1)|k_1x_1|^{\beta_1} + \varepsilon^{2\beta_1} \operatorname{sgn}(x_2)|k_2x_2|^{\beta_2} \right] \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \varepsilon^{1+\beta_1}x_2 \\ -\frac{\varepsilon^{2\beta_1}}{ml^2} \left[\operatorname{sgn}(x_1)|k_1x_1|^{\beta_1} + \operatorname{sgn}(x_2)|k_2x_2|^{\beta_2} \right] \end{pmatrix} \\
&= \varepsilon^{\beta_1-1} \begin{pmatrix} \varepsilon^2x_2 \\ -\frac{\varepsilon^{1+\beta_1}}{ml^2} \left[\operatorname{sgn}(x_1)|k_1x_1|^{\beta_1} + \operatorname{sgn}(x_2)|k_2x_2|^{\beta_2} \right] \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

para cada $x \in D$ y todo $\varepsilon > 0$ tal que $\delta_\varepsilon^r(x) \in D$, de donde se observa que la expresión (1.4) de la Definición 1.2.5 es satisfecha. Entonces, $f(x)$ es localmente r -homogéneo de grado $\alpha = \beta_1 - 1$, con dominio de homogeneidad D . Además, como $0 < \beta_1 < 1$, entonces $\alpha < 0$. Así, podemos aplicar el Teorema 1.2.4 con lo que concluimos que el origen $x = 0$ del sistema en lazo cerrado (2.10) es globalmente estable en tiempo finito. \triangle

Si bien contamos con una ley de control que, manejando el parámetro β_1 , nos permite tener dos tipos de estabilización, cuando se tenga estabilización en tiempo finito denominaremos la ley de control como controlador en tiempo finito (FTC), mientras que al tener estabilización asintótica, con $\beta_1 = 1$, nos referiremos a la ley de control como controlador asintótico.

Capítulo 3

Simulaciones

En este capítulo mostramos los resultados obtenidos a través de simulaciones computacionales a partir de la dinámica del péndulo actuado:

$$ml^2\ddot{q} + mgl \sin q = \tau \quad (3.1)$$

con cota en el actuador $T_{max} > 0$, *i.e.*

$$\tau = T_{max} \text{sat} \left(\frac{u}{T_{max}} \right) \quad (3.2)$$

y de la ley de control considerada:

$$u(\bar{q}, \dot{q}) = -\sigma_1(k_1\bar{q}) - \sigma_2(k_2\dot{q}) + mgl \sin(\bar{q} + q_d) \quad (3.3)$$

usando *Simulink* de *Matlab*. Para efectos de ejecución en las simulaciones consideramos los valores paramétricos mostrados en el Cuadro 3.1. Para satisfacer la condición (2.7), *i.e.* $M_1 + M_2 < T_{max} - mgl$, se fijaron las cotas de las saturaciones generalizadas σ_1 y σ_2 de acuerdo a los valores mostrados en el Cuadro 3.2. Para cada $i = 1, 2$, y toda $\zeta \in \mathbb{R}$, las funciones de saturación

Cuadro 3.1: Parámetros de simulación.

m [kg]	g [m/s ²]	l [m]	T_{max} [N]
1	9.81	1	60

Cuadro 3.2: Cotas de saturación.

M_1 [N]	M_2 [N]
20	20

generalizadas implementadas en simulación fueron definidas como:

$$\sigma_i(\zeta) = \text{sgn}(\zeta) \min\{|\zeta|^{\beta_i}, M_i\} \quad (3.4)$$

con $0 < \beta_1 < 1$ y $\beta_2 = \frac{2\beta_1}{1 + \beta_1}$ para el controlador en tiempo finito y $\beta_1 = \beta_2 = 1$ para el controlador asintótico.

3.1. Funciones de saturación y tiempo de estabilización

Comencemos por visualizar la forma de las funciones de saturación generalizadas definidas a través de (3.4), la cual se muestra en la Figura 3.1.

Observación 3.1.1. *Notemos que en la región donde el valor del argumento de las funciones de saturación es menor a la unidad, i.e. $|\zeta| < 1$, las funciones de saturación del FTC arrojan valores mayores, en magnitud, que las funciones de saturación del controlador asintótico. Esto se debe a que en el FTC, β_1 y β_2 son menores a la unidad. En cambio, fuera de esta región —a la que denominaremos $D_a = (-1, 1)$ — y hasta que las funciones de saturación generalizadas del FTC se saturan, las funciones de saturación en la estabilización*

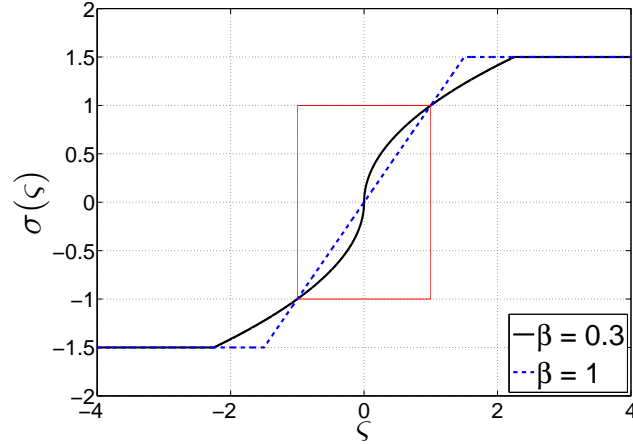


Figura 3.1: Funciones $\sigma(\zeta) = \text{sgn}(\zeta) \min\{|\zeta|^\beta, M\}$, con $M = 1.5$.

asintótica arrojan valores mayores.

Con $x = (\bar{q}, \dot{q})^T$, definimos el tiempo de estabilización t_s de la siguiente forma:

$$t_s = \inf \{ \bar{t}_s \geq 0 : \|x(t)\| \leq a, \forall t \geq \bar{t}_s \} \quad (3.5)$$

para alguna $a > 0$ lo suficientemente pequeña. A través de esta definición de t_s podemos determinar el tiempo de estabilización tanto en tiempo finito como asintótica. Esto resulta particularmente útil cuando la estabilización en tiempo finito no es exacta debido a fenómenos perturbatorios o no modelados como la fricción.

3.2. Rapidez de convergencia

En el caso ideal, el último término de la ley de control (3.3) elimina el término gravitacional del modelo dinámico del péndulo actuado a través de la retroalimentación. Esto sucede si el término gravitacional calculado por

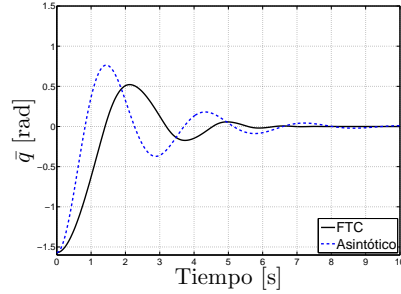
el controlador, $g_c(q) \triangleq \widehat{mgl} \sin(x_1 + q_d)$, es equivalente al término de fuerza gravitacional del sistema (3.1), *i.e.* $\widehat{mgl} = mgl$. Entonces, como se mostró en el capítulo anterior, el modelo en lazo cerrado (3.1)–(3.3) lo podemos expresar de la siguiente manera:

$$ml^2 \dot{x}_2 = -\sigma_1(k_1 x_1) - \sigma_2(k_2 x_2)$$

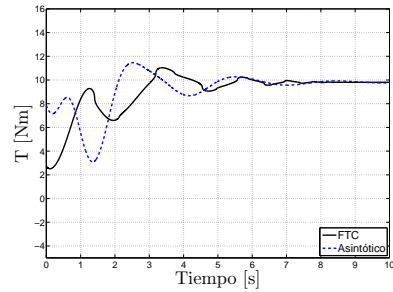
En este caso decimos que no existe error paramétrico en la simulación. Evidentemente esto sólo se cumple en el caso ideal, ya que siempre existen pequeñas variaciones o perturbaciones en sistemas físicos, además de la precisión y sensibilidad de los elementos electrónicos de medición. No obstante, tal contexto ideal será considerado para comparar el tiempo de estabilización de los esquemas FTC y asintótico en ausencia de errores de estado estable.

En la Figura 3.2 se muestra la comparación de los controladores FTC y asintótico en una simulación donde las ganancias de control son $k_1 = 5.0$ Nm/rad y $k_2 = 1.0$ Nms/rad. Para el caso del FTC: $\beta_1 = 0.5$ y $\beta_2 = 0.66$. En ambos casos $q_d = \pi/2$ rad, con condiciones iniciales $q(0) = \dot{q}(0) = 0$, es decir, con el péndulo en posición vertical hacia abajo y en reposo. En la Figura 3.2a se muestran los errores de posición para esta sintonización. Se puede apreciar que la estabilización en tiempo finito es más rápida que la estabilización asintótica. Con $a = 0.01$ en (3.5), tenemos que $t_s = 7.401$ s en FTS y $t_s = 11.176$ s en la estabilización asintótica. Además, observemos en las Figuras 3.2c y 3.2d el valor de los argumentos de las funciones de saturación: en ambos controladores el valor de cada uno de estos argumentos se encuentra la mayor parte del tiempo en $D_a = (-1, 1)$, zona en la que los componentes SP y SD del controlador se ejercen con mayor intensidad en el caso FTC que en el asintótico, de acuerdo a lo comentado en la observación 3.1.1. En la Figura 3.2b se aprecia que la señal de control no llega a niveles de saturación.

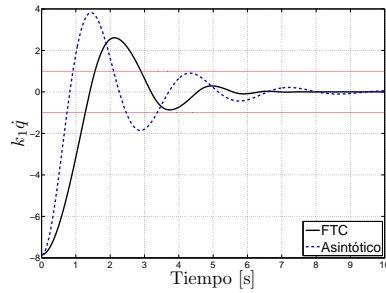
En la Figura 3.3 se muestran los resultados obtenidos con los controla-



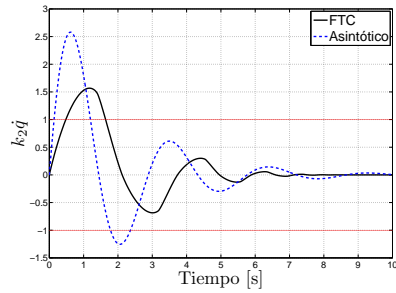
(a) Errores de posición.



(b) Señales de control.



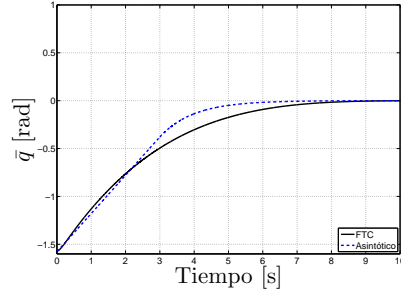
(c) Argumento de la función σ_1



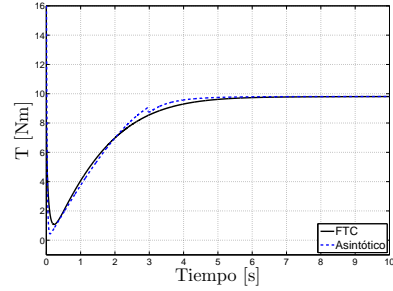
(d) Argumento de la función σ_2 .

Figura 3.2: $k_1 = 5.0 \text{ Nm/rad}$, $k_2 = 1.0 \text{ Nms/rad}$, $\beta_1 = 0.5$, $\beta_2 = 0.66$, $q_d = \pi/2 \text{ rad}$.

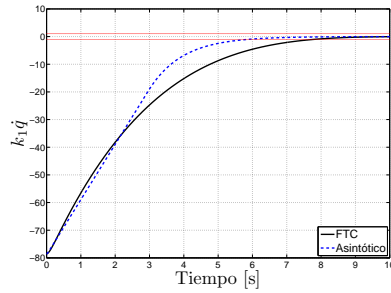
dores FTC y asintótico, con una sintonización de las ganancias de control de $k_1 = 50.0 \text{ Nm/rad}$ y $k_2 = 50.0 \text{ Nms/rad}$. Para el caso FTC: $\beta_1 = 0.5$, $\beta_2 = 0.66$. En ambos casos: $q_d = \pi/2 \text{ rad}$ y $q(0) = \dot{q}(0) = 0$ como condiciones iniciales. Notemos que con esta sintonización, de la Figura 3.3a, el controlador asintótico muestra una reacción más veloz. De hecho, tomando $a = 0.01$ en (3.5), se obtiene $t_s = 6.582 \text{ s}$ en estabilización asintótica y $t_s = 8.638 \text{ s}$ en FTS. Por otro lado, contrariamente a lo que sucede en el caso anterior, de las Figuras 3.3c y 3.3d se observa que el valor de cada uno de los argumentos de las funciones de saturación en el estado transitorio se encuentran la mayor parte del tiempo



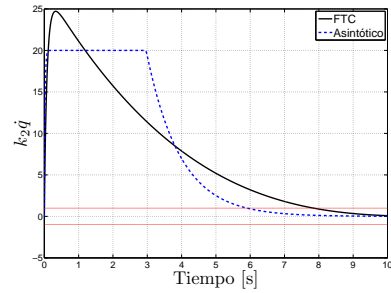
(a) Errores de posición.



(b) Señales de control.



(c) Argumento de la función σ_1 .



(d) Argumento de la función σ_2 .

Figura 3.3: $k_1 = 50.0$ Nm/rad, $k_2 = 50.0$ Nms/rad, $\beta_1 = 0.5$, $\beta_2 = 0.66$, $q_d = \pi/2$ rad.

fuera del intervalo D_a , en donde la intensidad de los componentes SP y SD de la ley de control es mayor o igual en el caso del controlador asintótico que en el del FTC. En la Figura 3.3b se aprecia que la señal de control no llega a niveles de saturación.

Observación 3.2.1. De lo anterior, concluimos lo siguiente: si las respuestas del sistema en lazo cerrado pasan la mayor parte del tiempo en D_a , la FTS presentará un menor tiempo de estabilización. Por el contrario, si durante la mayor parte del transitorio, los argumentos se encuentran fuera de

Cuadro 3.3: Tiempos de estabilización, $k_1 = 50.0 \text{ Nm/rad}$, $k_2 = 50.0 \text{ Nms/rad}$.

a	Tiempo Finito [s]	Asintótico [s]
0.01	8.844	6.911
1.0×10^{-3}	10.314	9.167
1.0×10^{-4}	11.055	11.422
1.0×10^{-5}	11.408	13.678

D_a , el controlador asintótico generará reacciones más veloces por lo que sus respuestas tenderán a aproximarse más rápidamente a la referencia deseada.

Por otro lado, tomemos el tiempo de estabilización t_s para comparar la rapidez de convergencia en ambos controladores para distintos valores de a con la sintonización de la segunda prueba, *i.e* $k_1 = 50.0 \text{ Nm/rad}$ y $k_2 = 50.0 \text{ Nms/rad}$. En el Cuadro 3.3 notamos que conforme a se va reduciendo cada vez más, se llega a un punto donde la FTS presenta un menor t_s . Esto tiene que ver con la naturaleza finita de este tipo de estabilización, en contraposición con la estabilidad asintótica, en la que se tiene convergencia hacia el equilibrio deseado en tiempo infinito.

En vista de la diferencia en la intensidad de los componentes SP y SD del controlador que se aprecia entre el caso FTC y del asintótico, proponemos ahora la siguiente estructura para la funciones de saturación:

$$\sigma_i(\zeta) = \text{sgn}(\zeta) \min \left\{ \max \left\{ |\zeta|^{\beta_i}, |\zeta| \right\}, M_i \right\} \quad \forall \zeta \in \mathbb{R} \quad i = 1, 2$$

Mediante esta estructura se evita que exista alguna región donde haya una reducción en la intensidad de los componentes SP y SD del FTC con respecto a los del asintótico. Podemos verificar fácilmente que se sigue cumpliendo el concepto de homogeneidad local con dominio de homogeneidad

$D_{F1} = (-1, 1) \times (-1, 1)$. Denotemos a esta última estructura de estabilización en tiempo finito como *FTC1* y mostremos los resultados obtenidos en los tiempos de estabilización para compararlos con los de las estructuras anteriormente usadas. En el Cuadro 3.4 se observa el tiempo de estabilización con distintos valores de a para una misma sintonización: $k_1 = 50$ Nm/rad y $k_2 = 50$ Nms/rad. Para el caso FTC: $\beta_1 = 0.5$, $\beta_2 = 0.66$. Para los tres casos $q_d = \pi/2$ rad y $q(0) = \dot{q}(0) = 0$. Notamos que este último esquema de funciones de saturación tiene un menor tiempo de estabilización para cualquier $a > 0$ que propongamos.

Cuadro 3.4: Tiempos de estabilización, $k_1 = 50.0$ Nm/rad, $k_2 = 50.0$ Nms/rad.

a	Tiempo Finito [s]	Asintótico [s]	<i>FTS1</i>
0.01	8.844	6.912	6.910
1.0×10^{-3}	10.314	9.167	8.390
1.0×10^{-4}	11.055	11.422	9.131
1.0×10^{-5}	11.408	13.678	9.484

De las observaciones anteriores concluimos que el FTC ofrece respuestas más rápidas en los siguientes casos.

- Cuando las trayectorias del sistema en lazo cerrado pasan la mayor parte del tiempo en donde el valor de cada uno de los argumentos de las funciones de saturación se encuentra en la región $D_a = (-1, 1)$; en este caso, las funciones localmente homogéneas involucradas juegan un papel fundamental y las ganancias de control influyen de manera importante.
- Si la estructura de las funciones de saturación para la estabilización en tiempo finito evita que estas funciones arrojen valores menores (en magnitud) que su contraparte asintótica, para cualquier valor del argumento.

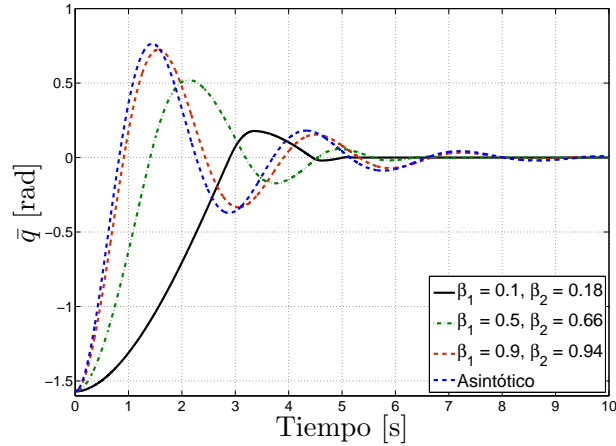


Figura 3.4: Errores de posición, $k_1 = 5.0 \text{ Nm/rad}$, $k_2 = 1.0 \text{ Nms/rad}$, $q_d = \pi/2 \text{ rad}$.

3.2.1. Variación del parámetro β_1

El parámetro β_1 se manipula para obtener estabilización en tiempo finito o solamente asintótica. Si β_1 toma valores cercanos a cero, las funciones de saturación toman una forma cercana a la función signo. Para valores de β_1 cercanos a la unidad, adoptan una forma cercana a la de las funciones de saturación del caso asintótico.

En las Figuras 3.4 y 3.5 se tiene una sintonización de $k_1 = 5.0 \text{ Nm/rad}$, $k_2 = 1.0 \text{ Nms/rad}$, $q_d = \pi/2 \text{ rad}$, con condiciones iniciales $q(0) = \dot{q}(0) = 0$. Tomamos tres valores para el parámetro β_1 : 0.1, 0.5 y 0.9, con los siguientes correspondientes valores de β_2 : 0.182, 0.667 y 0.947 respectivamente, para los controladores en tiempo finito. En la Figura 3.4 podemos apreciar cómo se reduce el tiempo de estabilización considerablemente cuando $\beta_1 = 0.1$ en comparación con los casos en los que se tienen valores mayores de este parámetro. Además, la respuesta del FTC con $\beta_1 = 0.9$ se acerca al comportamiento asintótico. Sin embargo, se observa que en la señal de control obtenida

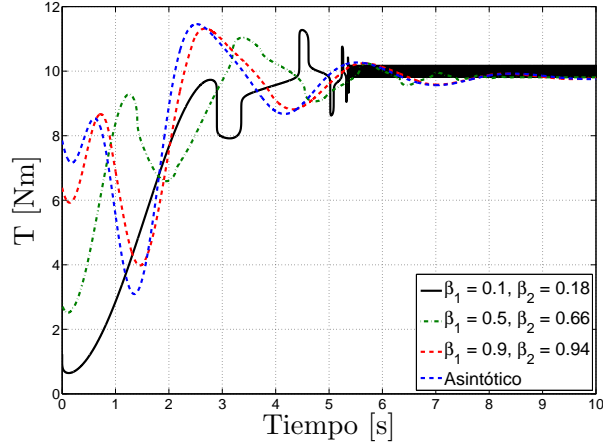


Figura 3.5: Señales de control, $k_1 = 5 \text{ Nm/rad}$, $k_2 = 1 \text{ Nms/rad}$, $q_d = \pi/2 \text{ rad}$.

con $\beta_1 = 0.1$ (Figura 3.5) se presenta un fenómeno parecido al *chattering*, lo cual no sucede en los otros casos simulados con valores mayores de β_1 .

Comparemos ahora el tiempo de estabilización para la prueba anterior, *i.e.* $k_1 = 5 \text{ Nm/rad}$, $k_2 = 1 \text{ Nms/rad}$, donde variamos el valor del parámetro β_1 para observar cómo influye este cambio. En el Cuadro 3.5 vemos claramente que con valores de β_1 pequeños se reduce el tiempo de estabilización. Sin embargo, como se mencionó anteriormente, se corre el riesgo de que aparezca un fenómeno tipo *chattering*, lo cual es indeseable en implementación.

3.3. Perturbaciones

Consideremos una perturbación de entrada ω constante en la dinámica del sistema:

$$ml^2\ddot{q} + mgl \sin q = \tau + \omega \quad (3.6)$$

Cuadro 3.5: Tiempos de estabilización, $k_1 = 5 \text{ Nm/rad}$, $k_2 = 1 \text{ Nms/rad}$, $a = 0.01$.

β_1	β_2	Tiempo [s]	β_1	β_2	Tiempo [s]
0.1	0.182	5.26	0.6	0.750	8.04
0.2	0.333	5.45	0.7	0.824	8.63
0.3	0.462	6.01	0.8	0.889	9.89
0.4	0.571	6.54	0.9	0.947	10.58
0.5	0.667	7.41			

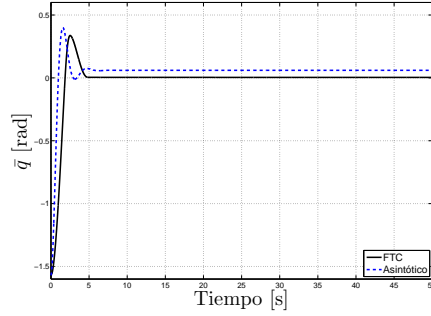
Si consideramos la dinámica del sistema en lazo cerrado (3.6), (3.3) en estado estable ($\dot{x}_2(t) \equiv \dot{x}_1(t) \equiv 0$), la expresión queda reducida de la siguiente manera:

$$\sigma_1(k_1 \bar{q}_{ss}) = \omega$$

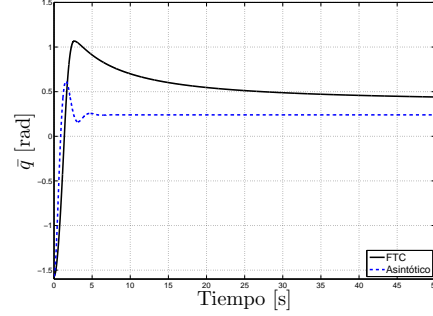
donde $k_1 > 0$ y \bar{q}_{ss} es el error de estado estable. Entonces, sustituyendo σ_1 por la forma definida a través de (3.4), *i.e.* $\sigma_1(\zeta) = \text{sgn}(\zeta) \min\{|\zeta|^{\beta_1}, M_1\}$, y despejando para \bar{q}_{ss} :

$$\bar{q}_{ss} = \frac{\text{sgn}(\omega) |\omega|^{1/\beta_1}}{k_1} \quad (3.7)$$

para una ω suficientemente pequeña, tal que $|\omega| < M_1$. Notemos que debido a que $0 < \beta_1 < 1$ para el FTC, y $\beta_1 = 1$ para el controlador asintótico, si $|\omega| < 1$ entonces \bar{q}_{ss} del FTC será de magnitud menor al que se obtenga en la estabilización asintótica. Contrariamente a lo que sucede cuando la magnitud de la perturbación es mayor a la unidad, *i.e.* $|\omega| > 1$, donde es evidente que la estabilización asintótica presentará un menor de error de estado estable. Comprobemos lo expuesto mediante la simulación que se muestra en la Figura 3.6, con una sintonización de $k_1 = 5 \text{ Nms/rad}$ y $k_2 = 2 \text{ Nm/rad}$, $q_d = \pi/2 \text{ rad}$. Para el FTC $\beta_1 = 0.3$ y $\beta_2 = 0.462$. Se tomaron como condiciones iniciales $q(0) = \dot{q}(0) = 0$ y dos valores para ω : 0.3 y 1.2.



(a) $\omega = 0.3 < 1$.



(b) $\omega = 1.2 > 1$.

Figura 3.6: Errores de posición, $k_1 = 5.0 \text{ Nm/rad}$, $k_2 = 2.0 \text{ Nms/rad}$, $\beta_1 = 0.3$ y $\beta_2 = 0.462$ (FTC), $q_d = \pi/2 \text{ rad}$.

Observemos en la Figura 3.6a que efectivamente se presenta un error de estado estable mucho menor en el FTC, en contraposición con lo presentado en la Figura 3.6b, donde además de presentarse un mayor \bar{q}_{ss} , el FTC tiene una respuesta mucho más lenta (si bien la perturbación introducida, $\omega = 1.2$, es considerablemente grande). Si obtenemos los valores de \bar{q}_{ss} mediante la expresión (3.7) tenemos que cuando $\omega = 0.3$ para el FTC $\bar{q}_{ss} = 3.6 \times 10^{-3} \text{ rad}$, y para el controlador asintótico $\bar{q}_{ss} = 0.06 \text{ rad}$. En cambio, cuando $\omega = 1.2$ tenemos $\bar{q}_{ss} = 0.36 \text{ rad}$ en el FTC, y $\bar{q}_{ss} = 0.24 \text{ rad}$. Lo cual es muy aproximado a lo que se presenta en simulación.

Además, de la expresión (3.7) notemos que si tomamos valores de β_1 más cercanos a cero tendremos un menor error de estado estable que para valores de β_1 cercanos a la unidad, cuando la magnitud de la perturbación es menor a la unidad, *i.e.* $|\omega| < 1$. Sin embargo, si la perturbación es mayor (en valor absoluto a la unidad) sucederá lo contrario: el FTC con valores de β_1 más grandes tendrá una mejor respuesta; de hecho, tenderá a acercarse a la respuesta del controlador asintótico, el cual presentará el menor error de estado

estable.

A pesar de que, para los FTC, con valores de β_1 más cercanos a cero obtenemos mejores respuestas, en cuanto a errores de estado estable (ante perturbaciones lo suficientemente pequeñas) y tiempo de estabilización, no podemos dejar de lado la presencia de un fenómeno tipo *chattering*. Así que el valor que se tome para el parámetro β_1 siempre estará restringido con el fin de evitar este fenómeno.

Capítulo 4

Resultados experimentales

Para los resultados experimentales se realizaron pruebas de la ley de control en el *Mechatronics Kit*, el cual es un banco de trabajo experimental que puede ser utilizado para comprobar leyes de control para el posicionamiento de un péndulo actuado. En este equipo el algoritmo de control es implementado mediante el lenguaje de programación C, a través del ambiente de desarrollo integrado *Code Composer Studio*, de *Texas Instruments*. El código es compilado y descargado a un procesador de señales digitales para la ejecución en tiempo real. En el programa, la variable u que representa la entrada activa el ciclo de trabajo de una señal de modulación por ancho de pulsos, la cual controla la corriente alimentada al motor que mueve el péndulo a la posición deseada. En el esquema implementado, u carece de dimensión y queda restringido al par máximo:

$$T_{max} = 10$$

Con el propósito de simplificar la implementación de la ley de control se omitirán las unidades involucradas. Para este sistema: $ml^2 = 6.24 \times 10^{-2}$ y $mgl = 5.9$. Las cotas de saturación fueron fijadas de la siguiente manera: $M_1 = M_2 = 2$, de donde es fácil observar que se satisface la condición (2.7),

i.e. $M_1 + M_2 < T_{max} - mgl$.

Entonces, se procedió a comprobar la ley de control considerada:

$$u(\bar{q}, \dot{q}) = -\sigma_1(k_1\bar{q}) - \sigma_2(k_2\dot{q}) + mgl \sin(\bar{q} + q_d)$$

con las siguientes funciones de saturación generalizadas:

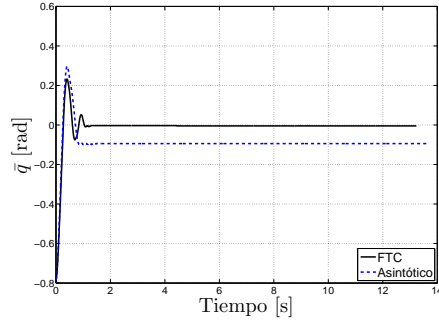
$$\sigma_i(\zeta) = \text{sgn}(\zeta) \min\{|\zeta|^{\beta_i}, M_i\} \quad \forall \zeta \in \mathbb{R} \quad i = 1, 2 \quad (4.1)$$

con $0 < \beta_1 < 1$ y $\beta_2 = \frac{2\beta_1}{1 + \beta_1}$ para el controlador en tiempo finito y $\beta_1 = \beta_2 = 1$ para el controlador asintótico. Además, también se probó el esquema de control con estabilización en tiempo finito, denominado FTC1 :

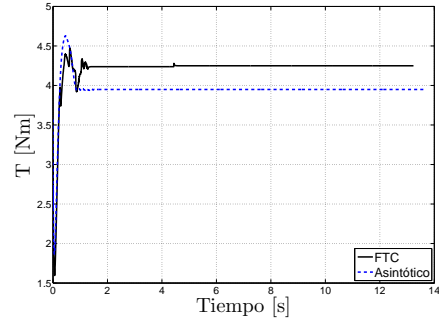
$$\sigma_i(\zeta) = \text{sgn}(\zeta) \min \left\{ \max \left\{ |\zeta|^{\beta_i}, |\zeta| \right\}, M_i \right\} \quad \forall \zeta \in \mathbb{R} \quad i = 1, 2 \quad (4.2)$$

En la Figura 4.1 se tiene la comparación del controlador FTC con el asintótico con una sintonización de ganancias de $k_1 = 2$ y $k_2 = 0.05$, $q_d = \pi/4$ rad, con $q(0) = \dot{q}(0) = 0$ como condiciones iniciales. Para el caso de estabilización en tiempo finito $\beta_1 = 0.5$ y $\beta_2 = 0.66$. En este caso utilizamos las funciones de saturación generalizadas como se definieron en (4.1).

En la Figura 4.1a se observa que el FTC presenta un mucho menor error de estado estable. Con ganancias de control pequeñas, el FTC logra una mejor aproximación a la posición deseada en comparación con el controlador asintótico, lo que en aplicaciones reales resulta muy práctico.

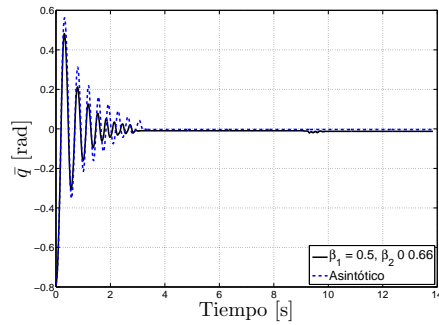


(a) Errores de posición.

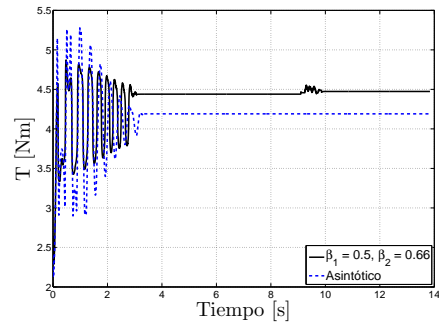


(b) Señales de control.

Figura 4.1: $k_1 = 2.0$, $k_2 = 0.05$, $\beta_1 = 0.5$, $\beta_2 = 0.66$, $q_d = \pi/4$



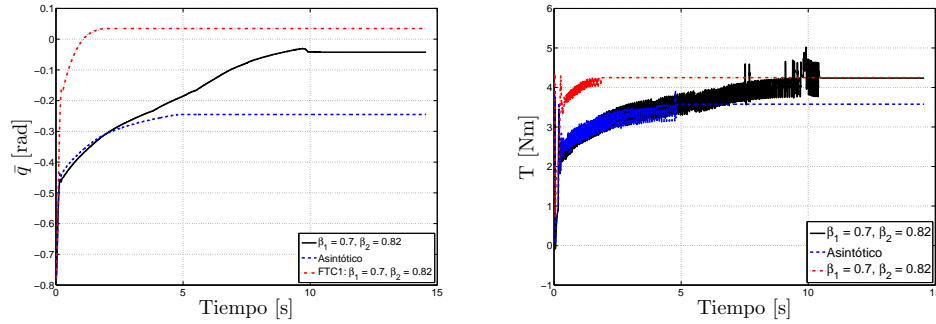
(a) Errores de posición.



(b) Señales de control.

Figura 4.2: $k_1 = 10.0$, $k_2 = 0.01$, $\beta_1 = 0.5$, $q_d = \pi/4$

En la Figura 4.2 se muestran pruebas con una sintonización de ganancias, para ambos controladores FTC y asintótico, de $k_1 = 10.0$ y $k_2 = 0.01$, $q_d = \pi/4$ rad, con $q(0) = \dot{q}(0) = 0$ como condiciones iniciales. Para el caso de estabilización en tiempo finito $\beta_1 = 0.5$ y $\beta_2 = 0.66$. En este caso utilizamos las funciones de saturación generalizadas como se definieron en (4.1). Además, nótese en la Figura 4.1b se presentan picos alrededor de los 5 seg,



(a) Errores de posición.

(b) Señales de control.

Figura 4.3: $k_1 = 2.0$, $k_2 = 4.0$, $\beta_1 = 0.7$, $\beta_2 = 0.82$, $q_d = \pi/4$.

y en la Figura 4.2b alrededor de los 10 seg. Esto puede deberse a que en el origen se tiene una pendiente infinita en las funciones de saturación del FTC, lo que causa una gran sensibilidad del controlador a cambios en la trayectoria del sistema cuando ésta se encuentra lo suficientemente cerca del origen; sin embargo las acciones de control que se originan a partir de estos cambios son muy pequeñas en magnitud.

En la Figura 4.2a se puede apreciar que el FTC llega ligeramente antes al punto de equilibrio. Si bien ambos controladores presentan un reducido error de estado estable, se debe tomar en cuenta el valor considerablemente grande en la ganancia k_1 .

En la Figura 4.3 tenemos los errores de estado estable y las señales de control de los controladores FTC, FTC1 y asintótico para una sintonización de $k_1 = 2.0$ y $k_2 = 4.0$, $q_d = \pi/4$ rad, con $q(0) = \dot{q}(0) = 0$ como condiciones iniciales. Para el caso del FTC y FTC1 $\beta_1 = 0.7$ y $\beta_2 = 0.82$. Se puede apreciar que el controlador asintótico tiene una respuesta más rápida que el controlador en tiempo finito cuyas funciones de saturación se establecen en (4.1). Por otro lado, el esquema definido por (4.2) para las funciones de saturación, permite

tener una respuesta más rápida que en el esquema en (4.1) y el controlador asintótico. Este último esquema permite asegurar que se tendrá una respuesta más rápida en FTS para cualquier sintonización de ganancias y de parámetros de control.

Capítulo 5

Conclusiones y perspectivas

En este trabajo de tesis se compara la estabilización asintótica —en tiempo infinito— con la estabilización en tiempo finito en el control de posición de un péndulo actuado. Esta comparación además sirve para comprobar el esquema de control propuesto en [11] donde los autores definen una noción local de homogeneidad que les permite lograr estabilización en tiempo finito con entradas acotadas, es decir, con cota en el actuador $T_{max} > 0$, *i.e.*

$$\tau = T_{max} \text{sat} \left(\frac{u}{T_{max}} \right)$$

El algoritmo de control se define a través de la siguiente expresión:

$$u(\bar{q}, \dot{q}) = -\sigma_1(k_1\bar{q}) - \sigma_2(k_2\dot{q}) + mgl \sin(\bar{q} + q_d)$$

donde $\bar{q} = q - q_d$, para cualquier posición deseada constante q_d , $k_1 > 0$, $k_2 > 0$; $\sigma_i(\zeta)$, $i = 1, 2$, son funciones de saturación generalizadas con cotas $M_i > 0$, tales que

$$M_1 + M_2 < T_{max} - mgl$$

y

$$\sigma_i(\zeta) = \text{sign}(\zeta) \min\{|\zeta|^{\beta_i}, M_i\} \quad \forall \zeta \in \mathbb{R} \quad i = 1, 2 \quad (5.1)$$

con $0 < \beta_1 < 1$ y $\beta_2 = \frac{2\beta_1}{1 + \beta_1}$ para el controlador en tiempo finito y $\beta_1 = \beta_2 = 1$ para el controlador asintótico.

A través de pruebas en simulaciones computacionales y experimentales se pudo observar que las ventajas de la FTS mencionadas en diversos trabajos, *e.g* [13], [2], [10], [14], en cuanto a rapidez de convergencia, precisión y robustez se mantienen para la mayoría de los casos. Sin embargo, se pudo encontrar que existen pruebas donde la respuesta más rápida viene del controlador asintótico y otras donde además presenta un menor error de estado estable este último. En el caso particular de este FTC se tiene que los componentes de la ley de control ejercen mayor intensidad cuando el valor de los argumentos de las funciones de saturación son menores, en valor absoluto, a la unidad, es decir cuando se encuentra en el intervalo $D_a = (-1, 1)$. Entonces, si en el estado transitorio, el valor de cada uno de los argumentos se encuentra la mayor parte del tiempo en esta zona, el FTC presentará un menor tiempo de respuesta; en el caso contrario, cuando se encuentren la mayor parte del tiempo fuera de D_a , el controlador asintótico presentará una respuesta más rápida.

También se observó que dependiendo de la estructura de las funciones de saturación, se puede evitar tener zonas donde se tenga una menor intensidad en el FTC respecto al controlador asintótico, y con ello tener respuestas más rápidas en tiempo finito para cualquier sintonización de ganancias de control. Como resultado de la observación anteriormente expuesta y comparando la estructura de las funciones de saturación del FTC y del controlador asintótico se propuso el siguiente esquema de saturación para estabilización en tiempo finito:

$$\sigma_i(\zeta) = \text{sgn}(\zeta) \min\left\{\max\left\{|\zeta|^{\beta_i}, |\zeta|\right\}, M_i\right\} \quad \forall \zeta \in \mathbb{R} \quad i = 1, 2 \quad (5.2)$$

Para visualizar esto se compararon resultados obtenidos con la estructura expresada en (5.1) con la nueva estructura definida en (5.2). Con esta última estructura se obtuvieron respuestas más rápidas en todos los casos para la estabilización en tiempo finito.

Otro factor que influye en la rapidez de convergencia en el caso de la FTS es el valor que toma el parámetro β_1 : si éste toma valores más cercanos a cero, entonces las respuestas serán más rápidas en comparación de pruebas donde β_1 tome valores más cercanos a la unidad. Sin embargo, con valores más cercanos al origen para β_1 , se tiene una mayor probabilidad de que aparezca *chattering* en las señales de control, fenómeno indeseado en aplicaciones reales.

Para el análisis de robustez, consideramos una perturbación de entrada ω constante en la dinámica del sistema

$$ml^2\ddot{q} + mgl \sin q = \tau + \omega$$

Observamos que si la magnitud de la perturbación es menor a la unidad, *i.e.* $|\omega| < 1$, el FTC presentará un menor error de estado estable. Además, si se toman valores de β_1 más cercanos a cero, se reducirá la magnitud del error de estado estable, en comparación con el caso en que se toman valores de β_1 cercanos a la unidad. Si, por el contrario, ω toma valores grandes ($|\omega| > 1$), entonces el controlador asintótico presentará un menor error de estado estable; y si se toman valores de β_1 más cercanos a la unidad para β_1 en el FTC, se tendrán valores más pequeños de error en comparación con FTC con valores de β_1 más pequeños. Es decir, que con valores cercanos a la unidad para β_1 , se tendrán respuestas en FTS muy parecidas a las de la estabilización asintótica. Adicionalmente, el FTC presenta una mejor respuesta, en cuanto a tiempo de estabilización y error de estado estable, cuando se utilizan valores de la ganancia k_1 pequeñas, en comparación con el controlador asintótico, lo cual

es desable en aplicaciones prácticas.

Como trabajo a futuro se considera la generalización de estas observaciones para un sistema de n -grados de libertad, aplicado a robots manipuladores. Se considera además el diseño de una estructura generalizada de saturación y homogeneidad local, como se hizo en el caso asintótico en relación a la estructura de saturación en [6]. Un estudio similar al desarrollado en esta tesis, así como de diseño, para el caso de retroalimentación de salida, prescindiendo de lectura de velocidad, también será de interés futuro.

Capítulo 6

Bibliografía

- [1] Y. Feng, X. Yu, and Z. Man. Non-singular terminal sliding mode control of rigid manipulators. *Automatica*, 38(12):2159 – 2167, 2002.
- [2] Y. Hong, J. Wang, and D. Cheng. Adaptive finite-time control of nonlinear systems with parametric uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(5):858–862, May 2006.
- [3] Y. Hong, Y. Xu, and J. Huang. Finite-time control for robot manipulators. *Systems & Control Letters*, 46(4):243 – 253, 2002.
- [4] R. Kelly, V. Santibáñez, and A. Loria. *Control of Robot Manipulators in Joint Space*. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing. Springer, 2006.
- [5] H. K. Khalil. *Nonlinear systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2002.
- [6] D. J. López-Araujo, A. Zavala-Río, V. Santibáñez, and F. Reyes. A generalized scheme for the global adaptive regulation of robot manipulators with bounded inputs. *Robotica*, 31:1103–1117, 10 2013.
- [7] A. Michel, L. Hou, and D. Liu. *Stability of Dynamical Systems: Continuous, Discontinuous, and Discrete Systems*. Systems & Control: Foundations & Applications. Birkhäuser Boston, 2008.

- [8] V. Santibáñez, R. Kelly, and F. Reyes. A new set-point controller with bounded torques for robot manipulators. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 45(1):126–133, Feb 1998.
- [9] S. S. Sastry. *Nonlinear systems : analysis, stability, and control*. Interdisciplinary applied mathematics. Springer, New York, 1999.
- [10] L. Wang and F. Xiao. Finite-time consensus problems for networks of dynamic agents. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(4):950–955, April 2010.
- [11] A. Zavala-Río and I. Fantoni. Global finite-time stability characterized through a local notion of homogeneity. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 59(2):471–477, Feb 2014.
- [12] A. Zavala-Río and V. Santibáñez. Simple extensions of the pd-with-gravity-compensation control law for robot manipulators with bounded inputs. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 14(5):958–965, Sept 2006.
- [13] B. Zhang, Y. Jia, J. Du, and J. Zhang. Finite-time consensus control for multiple manipulators with unmodeled dynamics. In *American Control Conference (ACC), 2013*, pages 5380–5385, June 2013.
- [14] D. Zhao, S. Li, Q. Zhu, and F. Gao. Robust finite-time control approach for robotic manipulators. *IET Control Theory & Applications*, 4(1):1 – 15, 2010.